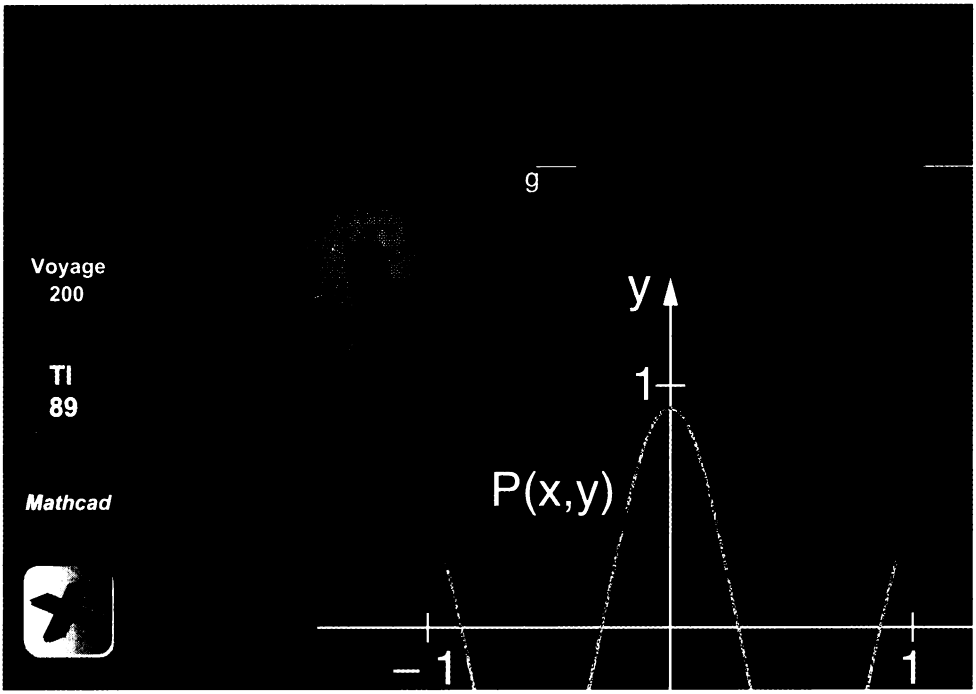
Timischl
Kaiser

Ingenieur-Mathematik

1



E. DORNER

Wolfgang Timischl
Gerald Kaiser

Ingenieur-Mathematik

1

E. DORNER

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, Zl. 43.492/1-V/2/96, für den Unterrichtsgebrauch an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen für die 1. Klasse im Unterrichtsgegenstand Mathematik geeignet erklärt.

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, Zl. 43.492/4-III/13/97, für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den I. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik sowie für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den I. Jahrgang nach den derzeit geltenden Lehrplänen im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Bildquellenverzeichnis: 1.1: Das alte Ägypten, C. Bertelsmann, 1984; 2.5: Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek; 4.1: Geodata, Leoben; 4.56: Bildende Kunst 3, Schroedel Verlag, 1995; Seite 197: Samsung; 7.1: PRISMA Engineering, Graz. Alle übrigen Bilder stammen von den Autoren.

Buch-Nr. 5554

Timischl - Kaiser
Ingenieur-Mathematik 1

Ungargasse 35, 1030 Wien
Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15
E-Mail: office@dorner-verlag.at
www.dorner-verlag.at

ISBN 978-3-7055-**0155**-3

Dazu ist lieferbar:

Ingenieur-Mathematik 1 Lösungen
Buch-Nr. 5606, **ISBN** 978-3-7055-**0207**-9

Ingenieur-Mathematik 1
Durchgerechnete Lösungen
Buch-Nr. 120 710, **ISBN** 978-3-7055-**0632**-9

7. Auflage, 2009
Alle Drucke sind im Unterricht parallel verwendbar.

Umschlag, Satz, Computergraphik, Repro und Montage: DOKU-Consult GmbH, Wien
Gesamtherstellung: Verlag E. DORNER GmbH, Wien

Inhalt

1 Erste Schritte 4
1.1 Einfache Gleichungen und Formelumformungen 4
1.2 Zum Gebrauch des Taschenrechners 10

2 Zahlen und Variable 12
2.1 ABC der Logik 12
2.2 Einmaleins der Mengenlehre 20
2.3 Zahlenarten 27
2.3.1 Die natürlichen und ganzen Zahlen 27
2.3.2 Die rationalen Zahlen 32
2.3.3 Die reellen Zahlen 33
2.4 Die Zahlengerade 36
2.5 Variable und Terme 40
2.6 Grundlegende Rechenregeln 44
2.7 Potenzen 58
2.7.1 Erklärungen 58
2.7.2 Rechnen mit Potenzen 62
2.7.3 Gleitkommadarstellung 68
2.7.4 Wurzeln 74
2.8 Bruchterme 78
2.9 Verhältnisse 90

3 Numerisches Rechnen 99
3.1 Dezimalzahlen 99
3.2 Überschlagsrechnung 102
3.3 Der Taschenrechner 105
3.4 Der Umgang mit Näherungswerten 109

4 Elementare Geometrie 115
4.1 Einführung 115
4.2 Das Dreieck 121
4.2.1 Allgemeines Dreieck 121
4.2.2 Kongruente Dreiecke 124
4.2.3 Flächeninhalt des Dreiecks 126
4.2.4 Ähnliche Dreiecke und Strahlensätze 127
4.2.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck 131
4.3 Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks 140
4.3.1 Kreisfunktionswerte eines spitzen Winkels 140
4.3.2 Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks 144
4.4 Geradlinig begrenzte Figuren 148
4.4.1 Vierecke 148
4.4.2 Vielecke 152
4.5 Kreis und Kreisteile 156
4.5.1 Allgemeines 156
4.5.2 Berechnungen am Kreis 157
4.5.3 Winkelmessung im Bogenmaß 163

5 Funktionen 166
5.1 Grundbegriffe 166
5.2 Relationen 169
5.3 Nullstellen und Monotonieverhalten von Funktionen 170
5.4 Erster Überblick 173
5.5 Lineare Funktion und Gerade 174
5.6 Lineare Interpolation 185
5.7 Einige besondere Funktionen 191
5.8 Anwendungen der linearen und stückweise linearen Funktionen 192
5.9 Proportionalität 205
5.9.1 Direkte Proportionalität 205
5.9.2 Indirekte Proportionalität 206

6 Lineare Gleichungen und Ungleichungen 210
6.1 Gleichungen - Grundbegriffe 210
6.2 Lineare Gleichungen 215
6.3 Bruchgleichungen 219
6.4 Textaufgaben 223
6.5 Formelumwandlungen 231
6.6 Proportionen 234
6.7 Schlussrechnungen 240
6.8 Ungleichungen - Grundlagen 242
6.9 Bruchungleichungen 245

7 Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme 247
7.1 Eine lineare Gleichung in zwei Variablen 247
7.2 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen 249
7.3 Lineare Gleichungssysteme in drei oder mehr Variablen 268

8 Vektorrechnung 275
8.1 Einführung 275
8.2 Rechnen mit Vektoren 282
8.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren 282
8.2.2 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl 286

9 Stereometrie 294
9.1 Prisma und Zylinder 294
9.2 Pyramide und Kegel 302
9.3 Stumpfe Körper 307
9.4 Kugel und Kugelteile 311

10 Moderne Hilfsmittel 316

Mathematische Zeichen 327
Formelsammlung 328
Stichwortverzeichnis 333

1 Erste Schritte

Die Mathematik gehört zu den **ältesten Wissenschaften**. Denn das Zusammenleben in größeren Gemeinschaften schuf Probleme, die ohne Mathematik nur schwer lösbar gewesen wären. Die Notwendigkeit, ausreichend Nahrung zu erwerben, Häuser zu bauen oder das Zusammenleben in größeren Gemeinschaften zu organisieren, ließen die Mathematik entstehen.

Die ältesten Zeugnisse mathematischer Tätigkeit stammen aus dem alten Ägypten (ca.1700 v.Chr.) und waren ganz auf **praktische Anwendungen** ausgerichtet. Beispiele dafür sind die Vermessung der Felder nach jeder der jährlichen Nilüberschwemmungen, die Verteilung von Geldbeträgen auf mehrere Arbeiter, die Berechnung des Getreidebedarfs für eine bestimmte Brotmenge oder die Berechnungen beim Pyramidenbau. Ähnlich praxisorientiert war auch die Mathematik anderer früher Hochkulturen.

Heute bietet die Mathematik geeignete Verfahren zur Beschreibung von Vorgängen in Natur, Technik und Wirtschaft an. Sie dient in diesen Bereichen als **Instrument zur Informationsgewinnung**. Als Unterrichtsfach ist sie grundlegend für die technischen Fachgegenstände und die berufliche Praxis.

Abb. 1.1 Feldvermessung nach der jährlichen Nilschwemme

Dieses erste Kapitel wird im Wesentlichen kaum etwas Neues bringen, es ist eine Wiederholung von – vielleicht in anderer Form – bereits bekannten Dingen. Damit soll ein einfacher Einstieg in die HTL-Mathematik sichergestellt sein. Die Überlegungen dieses Kapitels haben einen *vorläufigen* Charakter; ihre Behandlung folgt nicht in einem in der Mathematik sonst üblichen systematischen Aufbau, der erst etwas später erfolgen kann.

1.1 Einfache Gleichungen und Formelumwandlungen

Praktische Fragestellungen lassen sich oft mit Gleichungen ausdrücken und dann systematisch lösen. Der richtige Umgang mit Gleichungen ist daher von besonderer Bedeutung.

Eine **Gleichung** entsteht, wenn man zwischen zwei Termen ein Gleichheitszeichen schreibt. Bei einer Gleichung mit *einer* Variablen enthält wenigstens eine der beiden Gleichungsseiten diese Variable. Sie heißt **Gleichungsvariable** oder **Unbekannte** und wird oft neutral mit x bezeichnet. In Anwendungsaufgaben wird jedoch häufig eine auf die Art der Gleichungsvariablen hinweisende Bezeichnung gewählt.

Eine Gleichung **lösen** heißt, jenen Wert (oder jene Werte) für die Gleichungsvariable suchen, der (die) die Gleichung erfüllt (erfüllen). Zu diesem Zweck nimmt man bestimmte Umformungen vor.

Eine Gleichung bleibt dabei "richtig" (d.h. die Lösung bleibt gleich), wenn man

Regel 1: *beide* Seiten vertauscht;

Regel 2: auf *beiden* Seiten der Gleichung entweder die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert;

Regel 3: *beide* Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert (die Zahl darf nicht gleich null sein).

Mit Hilfe dieser drei Regeln versucht man eine Gleichung so lange umzuformen, bis man die Lösung ablesen kann.

Eine Gleichung kann mit einer Waage im Gleichgewicht verglichen werden. Wenn wir die Gewichte auf beiden Waagschalen austauschen, bleibt das Gleichgewicht erhalten (Regel 1). Wenn wir in beide Waagschalen das gleiche Gewicht dazulegen, von ihnen wegnehmen, die Inhalte vervielfachen oder auf gleiche Art teilen, ist dies auch der Fall (Regeln 2 und 3). Wichtig ist, dass wie bei den Waagschalen stets auf beiden Seiten der Gleichung gleiches geschieht. Abb. 1.2 und Abb. 1.3 zeigen die Anwendung der Regel 2.

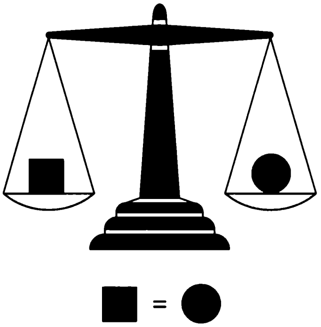


Abb. 1.2 Waage im Gleichgewicht

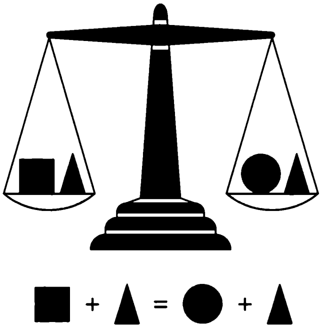


Abb. 1.3 Regel 2; Waage bleibt im Gleichgewicht

Nach Lösung einer Gleichung sollte stets eine **Probe** gemacht werden. Wesentlich ist, dass die Probe immer an der Ausgangsgleichung noch *vor* jeder Umformung gemacht wird. Dabei berechnet man die linke und rechte Seite *getrennt* und prüft auf Gleichheit.

Beispiel 1.1 : Lösung einfacher Gleichungen

a) $2x + 3 = 4;$ **b)** $\frac{1}{2} \cdot (t + 1) = 2;$ **c)** $u + 2 = 3 \cdot (2u - 1).$

Lösung

Es gibt keine strenge Vorschrift, wie man eine Gleichung zu lösen hat. Das Ziel ist, so lange nach den Regeln 1 bis 3 umzuformen, bis die Gleichungsvariable allein auf einer Seite steht.

Bis zum Erreichen eines sicheren Umganges mit Gleichungen ist es empfehlenswert, die beabsichtigte Umformung rechts neben der Gleichung in Kurzform anzuschreiben!

zu **a)**

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 4 && | -3 \\ 2x + 3 - 3 &= 4 - 3 && \\ 2x &= 1 && | : 2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{1}{2} && \\ x &= \frac{1}{2} && \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$; rechte Seite: 4; somit Übereinstimmung.

zu **b)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (t + 1) &= 2 && | \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (t + 1) &= 2 \cdot 2 && \\ t + 1 &= 4 && | -1 \\ t + 1 - 1 &= 4 - 1 && \\ t &= 3 && \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $\frac{1}{2} \cdot (3 + 1) = 2$; rechte Seite: 2; somit Übereinstimmung.

zu **c)**

$$\begin{aligned} u + 2 &= 3 \cdot (2u - 1) && | \text{ auf der rechten Seite multiplizieren} \\ u + 2 &= 6u - 3 && | -u \\ u + 2 - u &= 6u - 3 - u && \\ 2 &= 5u - 3 && | \text{ Seiten vertauschen} \\ 5u - 3 &= 2 && | +3 \\ 5u - 3 + 3 &= 2 + 3 && \\ 5u &= 5 && | : 5 \\ \frac{5u}{5} &= \frac{5}{5} && \\ u &= 1 && \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $1 + 2 = 3$; rechte Seite: $3 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 3$; somit Übereinstimmung.

Umwandeln von Formeln

Formeln treten sehr häufig in technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen auf. Sie geben in Gleichungsform den Rechengang an, wie gewünschte Größen berechnet werden können.

Oft ist es notwendig, aus einer Formel eine bestimmte Größe zu berechnen, die Formel also umzuformen. Da Formeln Gleichungen sind, werden sie wie diese nach der gewünschten Größe aufgelöst. Die zu berechnende Größe ist die Gleichungsvariable.

Bei den folgenden Berechnungen wird von der Bruchrechnung Gebrauch gemacht. Da auf dieses Gebiet noch eingegangen wird, könnten hier auftretende Unsicherheiten später behoben werden.

Beispiel 1.2 : Umwandeln einer Formel

Für den elektrischen Widerstand R eines Leiters (Abb. 1.4) gilt: $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$, wobei ρ (griech. Kleinbuchstabe Rho) eine vom Material des Leiters abhängige Konstante, l die Länge und A die Querschnittsfläche des Leiters ist. A ist aus dieser Formel zu berechnen!

Lösung

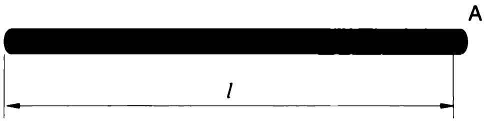


Abb. 1.4 Zu Beispiel 1.2

$$\begin{aligned} R &= \varrho \cdot \frac{l}{A} && | \cdot A \\ R \cdot A &= \varrho \cdot \frac{l}{A} \cdot A && \\ R \cdot A &= \varrho \cdot l && | : R \\ \frac{R \cdot A}{R} &= \frac{\varrho \cdot l}{R} && \\ A &= \frac{\varrho \cdot l}{R} && \end{aligned}$$

Zahlenprobe: Rechenkontrolle durch Einsetzen von Zahlen

Die Richtigkeit unserer Formelumwandlung im Beispiel 1.2 kann durch eine Zahlenprobe schnell getestet werden. Dazu setzen wir *irgendwelche* "bequeme" Zahlen für ϱ, l und A in die gegebene Formel ein und berechnen damit R.

Da es nur auf die mathematische Richtigkeit der Umformung ankommt, brauchen wir dabei nicht an die Bedeutung von ϱ, l, A und R zu denken, sondern nur daran, dass sie mathematisch "passen".

$$\varrho = 2,\ l = 3,\ A = 6: \qquad R = \varrho \cdot \frac{l}{A} = 2 \cdot \frac{3}{6} = 1$$

Danach wird A aus der umgewandelten Formel durch Einsetzen von $\varrho = 2$, $l = 3$ und $R = 1$ berechnet, wofür sich nun der Wert 6 ergeben muss.

$$A = \frac{\varrho \cdot l}{R} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6; \quad \text{somit Übereinstimmung!}$$

Gibt es *keine* Übereinstimmung, so zeigt diese Rechenkontrolle eine *falsche* Umwandlung an. Bei Übereinstimmung kann allerdings nicht mit Sicherheit auf eine richtige Rechnung geschlossen werden. Es handelt sich eben um keine echte Probe!

Beispiel 1.3 : Umwandeln einer Formel

Aus der Physik stammt die Formel für die momentane Wurfhöhe h beim senkrechten Wurf eines Körpers nach oben: $h = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

Hierbei ist v die momentane Geschwindigkeit des Körpers, v_0 dessen Abwurfgeschwindigkeit und t die momentane Wurfdauer. Gesucht ist die Auflösung dieser Formel nach v.

Lösung

Die auf einem Bruchstrich stehenden Summanden gehören genauso zusammen wie zwischen Klammern! *Der Bruchstrich ersetzt Klammern!*

1. Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{v + v_0}{2} \cdot t && | \cdot 2 \\
2h &= 2 \cdot \frac{v + v_0}{2} \cdot t && \\
2h &= (v + v_0) \cdot t && | \text{ auf der rechten Seite multiplizieren} \\
2h &= vt + v_0 t && | \text{ Seiten vertauschen} \\
vt + v_0 t &= 2h && | - v_0 t \\
vt + v_0 t - v_0 t &= 2h - v_0 t && \\
vt &= 2h - v_0 t && | : t \\
\frac{vt}{t} &= \frac{2h - v_0 t}{t} && \\
v &= \frac{2h - v_0 t}{t} &&
\end{aligned}$$

Zahlenprobe mit $v = 2$, $v_0 = 3$ und $t = 2$:

$$h = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{2 + 3}{2} \cdot 2 = 5; \quad v = \frac{2h - v_0 t}{t} = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 2}{2} = 2;$$

somit Übereinstimmung mit der ursprünglich getroffenen Wahl für v.

2. Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{v+v_0}{2}\cdot\frac{t}{1} = \frac{(v+v_0)\cdot t}{2} && \mid \cdot \frac{2}{t}\\
h\cdot\frac{2}{t} &= \frac{(v+v_0)\cdot t}{2}\cdot\frac{2}{t} &&\\
\frac{2h}{t} &= v+v_0 && \mid \text{Seiten vertauschen}\\
v+v_0 &= \frac{2h}{t} && \mid -v_0\\
v+v_0-v_0 &= \frac{2h}{t}-v_0 &&\\
v &= \frac{2h}{t}-v_0 &&
\end{aligned}$$

Überprüfe durch eine Zahlenprobe!

Aufgaben

Löse nach der auftretenden Variablen:

1.1	**a)** $x+1=3$	**b)** $x-2=5$	**c)** $2x=5$	**d)** $\frac{x}{2}=1$
	e) $3x+1=0$	**f)** $\frac{x}{4}-1=0$	**g)** $\frac{3x}{4}=\frac{1}{2}$	**h)** $\frac{2x}{5}-\frac{1}{2}=0$
1.2	**a)** $4x=0$	**b)** $\frac{a}{5}=2$	**c)** $\frac{2m}{5}=0$	**d)** $\frac{1}{5}=2k$
	e) $0{,}3\cdot n=0{,}4$	**f)** $\frac{e}{2}=0{,}1$	**g)** $\frac{s}{5}-0{,}2=0$	**h)** $\frac{p}{0{,}1}-0{,}2=0$

1.3	**a)** $3c-4=2c$	**b)** $\frac{u}{2}-1=2u$	**c)** $2v+3=-v+2$
	d) $-4a+0{,}5=a+2$	**e)** $0{,}1\cdot b+2=b+0{,}2$	**f)** $\frac{c}{3}-1=2c-11$
1.4	**a)** $2+x=3\cdot(2-x)$	**b)** $4y-(1+y)=0$	**c)** $2\cdot(1-4x)=-(1+2x)$
	d) $k+2\cdot(1-3k)=2-k$	**e)** $1-(c+1)=2-3c$	**f)** $0{,}1\cdot(d+3)=0{,}02+0{,}3\cdot d$
1.5	**a)** $\frac{r}{0{,}1}-3=0{,}2+2r$	**b)** $0{,}5d+\frac{1}{2}=2d$	**c)** $\frac{k}{2}=\frac{4-k}{3}$
	d) $\frac{m+4}{3}=3m$	**e)** $a-2=\frac{a}{2}+0{,}5$	**f)** $\left(\frac{w}{0{,}3}-4\right)\cdot 0{,}1=\frac{w}{7}$

Die folgenden Formeln sind nach der angegebenen Größe umzustellen:

1.6	$s=v\cdot t$	$v=?$	$t=?$	Gleichförmige Bewegung
1.7	$U=R\cdot I$	$R=?$	$I=?$	Ohmsches Gesetz
1.8	$W=U\cdot I\cdot t$	$U=?$	$t=?$	Arbeit eines elektrischen Gleichstroms
1.9	$p=\frac{F}{A}$	$F=?$		Druck
1.10	$A=\frac{1}{2}\cdot g h$	$h=?$		Flächeninhalt eines Dreiecks

1.11	$P = \frac{U^2}{R}$	$R = ?$		Leistung eines elektr. Gleichstroms
1.12	$W = \frac{m \cdot v^2}{2}$	$m = ?$		Kinetische Energie
1.13	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$T = ?$		Winkelgeschwindigkeit
1.14	$W = \frac{C\,U^2}{2}$	$C = ?$		Energie in einem Kondensator
1.15	$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$	$A = ?$	$d = ?$	Kapazität eines Plattenkondensators
1.16	$m = \frac{a + c}{2}$	$a = ?$	$c = ?$	Mittellinie eines Trapezes
1.17	$I = \frac{2}{5} \cdot m\,r^2$	$m = ?$		Massenträgheitsmoment einer Kugel
1.18	$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2 h$	$h = ?$		Volumen eines Kegels
1.19	$r = \frac{a\,b\,c}{4\,A}$	$a = ?$	$A = ?$	Umkreisradius beim Dreieck
1.20	$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$	$a = ?$		Höhe eines gleichseitigen Dreiecks
1.21	$p_1 = p_2 \cdot \frac{V_2}{V_1}$	$V_2 = ?$	$p_2 = ?$	Boyle-Mariottesches Gesetz
1.22	$I_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot I_2$	$I_2 = ?$	$R_1 = ?$	Parallelschaltung von Widerständen
1.23	$u = 2 \cdot (a + b)$	$a = ?$	$b = ?$	Umfang eines Rechtecks
1.24	$v = v_0 + a \cdot t$	$v_0 = ?$	$a = ?$	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung
1.25	$C = \frac{5}{9}\,(F - 32)$	$F = ?$		Fahrenheit- und Celsiusgrade
1.26	$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$	$h = ?$	$a = ?$	Fläche eines Trapezes
1.27	$O = 2\pi\,r\,(r + h)$	$h = ?$		Oberfläche eines Zylinders
1.28	$\rho = \frac{2A}{a + b + c}$	$A = ?$	$b = ?$	Inkreisradius beim Dreieck
1.29	$U_K = U_L - I \cdot R_i$	$U_L = ?$	$I = ?$	Klemmenspannung
1.30	$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$	$v_0 = ?$	$a = ?$	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung
1.31	$i = \frac{R - r}{2R}$	$r = ?$	$R = ?$	Übersetzungsverhältnis (Flaschenzug)
1.32	$r = \frac{x}{x_0} - 1$	$x = ?$	$x_0 = ?$	Relativer Fehler
1.33	$f_1 = f_0 \cdot \frac{c}{c - v_0}$	$v_0 = ?$	$c = ?$	Dopplereffekt

1.2 Zum Gebrauch des Taschenrechners

In diesem Abschnitt geht es nur um die grundlegenden Rechenoperationen, nämlich um die Grundrechnungsarten sowie das Potenzieren und Wurzelziehen mit Hilfe des Taschenrechners. Dabei werden nur kürzere Berechnungen durchgeführt. Grundsätzliche Überlegungen zum numerischen Rechnen sowie umfangreichere Berechnungen folgen in späteren Abschnitten.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Tastenfolge für einige einfache Rechenoperationen; dabei werden folgende Rechner besprochen:

TI-30Xa, TI-30 ecoRS, "Algebraic Operation System": Die Auswertung eines Ausdruckes erfolgt schrittweise bereits während der Eingabe, wenn eine Operation abgeschlossen ist. Betätigen der Taste = schließt alle Operationen ab.

TI-30X IIB, TI-30X IIS, "Equation Operation System": Die Auswertung eines Ausdruckes erfolgt erst nach dessen vollständiger Eingabe; Abschluss der Eingabe durch Betätigen der ENTER = -Taste. Das Ergebnis wird in einer *zweiten* Zeile angezeigt.

Voyage 200 (oder TI-89) Graphikrechner; Display mit Eingabezeile und Protokollbereich. Auswertung ebenfalls erst nach Abschluss der Eingabe durch **ENTER**.

Mathem. Schreibweise	TI-30Xa, TI-30 ecoRS	TI-30X IIB, TI-30X IIS Abschluss der Eingabe stets durch ENTER =	Voyage 200 (TI-89) Abschluss der Eingabe stets durch **ENTER** oder ◆ **ENTER**
-5	5 +/−	(−) 5	(−) 5
$\frac{1}{5}$ (Kehrwert)	1 ÷ 5 =	5 x^{-1} oder 1 ÷ 5	5 2ND 9 oder 1 ÷ 5
2,8	2 · 8	ebenso	ebenso
$3+4$	3 + 4 =	3 + 4	3 + 4
$7-2$	7 − 2 =	7 − 2	7 − 2
$7-(-2)$	7 − 2 +/− =	7 − (−) 2	7 − (−) 2
$5 \cdot 6$	5 X 6 =	5 X 6	5 X 6
8 : 5 oder $\frac{8}{5}$	8 ÷ 5 =	8 ÷ 5	8 ÷ 5
5^2	5 x^2	5 x^2	5 ^ 2
5^4	5 y^x 4 =	5 ^ 4	5 ^ 4
$\sqrt{5}$	5 $\sqrt{x}$	■ x^2 5)	2ND X 5)
$\sqrt{9}+7$	9 $\sqrt{x}$ + 7 =	■ x^2 9) + 7	2ND X 9) + 7
$\sqrt[3]{5}$	5 ■ 0	3 ■ ^ 5	5 ^ (1 ÷ 3)
$(2+3) \cdot 4$	(2 + 3) X 4 =	(2 + 3) X 4	(2 + 3) X 4
$2+3 \cdot 4$	2 + 3 X 4 =	2 + 3 X 4	2 + 3 X 4

⚠

Achtung!

+/− bzw. (−) bewirkt eine *Vorzeichenänderung*.

− führt zu einer *Subtraktion*.

Beispiel 1.4 : Einfache Berechnungen mit dem Taschenrechner

Bestätige mit dem Taschenrechner:

a) $\left(0{,}8 - \frac{1}{2}\right) \cdot 5 = 1{,}5$ **b)** $3 + 4 \cdot \sqrt{9} = 15$

c) $\frac{33}{2 \cdot 4 + 3} = 3$ **d)** $\sqrt[3]{12 \cdot 18} = 6$

Lösung

Zu **a)** (0 · 8 − 1 ÷ 2) × 5, Abschluss durch = bzw. ENTER= bzw. **ENTER**

Zu **b)**

TI-30Xa, TI-30 ecoRS 3 + 4 × 9 √x =

TI-30X IIB, TI-30X IIS 3 + 4 × ■ x² 9) ENTER=

Voyage 200 (TI-89) 3 **+** 4 **X** 2ND **X** 9) **ENTER**

Zu **c)** 33 ÷ (2 × 4 + 3), Abschluss durch = bzw. ENTER= bzw. **ENTER**

Zu **d)**

TI-30Xa, TI-30 ecoRS (12 × 18) ■ 0

TI-30X IIB, TI-30X IIS 3 ■ ^ (12 × 18) ENTER=

Voyage 200 (TI-89) (12 **X** 18) ^ (1 ÷ 3) **ENTER**

Aufgaben

Die Berechnungen der Aufgaben 1.34 bis 1.38 sind richtig. Sie sollen mit dem Taschenrechner bestätigt werden:

1.34 **a)** $2{,}1 - 5{,}3 + 7{,}4 = 4{,}2$ **b)** $-5{,}3 + 2{,}1 + 7{,}4 = 4{,}2$ **c)** $8{,}2 - 1{,}5 + (-0{,}9) = 5{,}8$
d) $9{,}4 - (-0{,}6) = 10{,}0$ **e)** $-1{,}4 - 9{,}5 = -10{,}9$

1.35 **a)** $14 \cdot 36 \cdot 25 = 12600$ **b)** $4 \cdot (-4{,}3) \cdot 5{,}2 = -89{,}44$ **c)** $2{,}3 \cdot 8 - 4 = 14{,}4$
d) $2{,}3 \cdot (7{,}1 - 8{,}2) = -2{,}53$

1.36 **a)** $\frac{1}{8} + 2{,}875 = 3$ **b)** $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 0{,}7$ **c)** $\frac{2{,}8}{7} - 0{,}38 = 0{,}02$ **d)** $5{,}1 + \frac{0{,}18}{0{,}3} = 5{,}7$

1.37 **a)** $1{,}8^2 = 3{,}24$ **b)** $17^4 = 83521$ **c)** $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ **d)** $\sqrt[3]{216} = 6$

1.38 **a)** $\frac{1}{4^2} = 0{,}0625$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{0{,}0016}} = 25$ **c)** $32 - \sqrt{1024} = 0$ **d)** $4 \cdot \sqrt[3]{0{,}216} = 2{,}4$

1.39 Die folgenden Gleichungen sind durch getrenntes Berechnen der linken und der rechten Seite zu bestätigen:

a) $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$ **c)** $\sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$ **d)** $3 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81}$

2 Zahlen und Variable

2.1 ABC der Logik

Die Anschauung kann trügen: Eine unmögliche Fläche, die es doch gibt!

Ein rechteckiger Papierstreifen wird an seinen Enden so zusammengeklebt (Abb. 2.1), dass ein zylindrisches Band entsteht, vergleichbar mit einem Gürtel. Ein solches Band besitzt eine Innen- und eine Außenseite. Will man einen Punkt der Innenseite mit einem Punkt der Außenseite durch eine durchgehende Linie verbinden, so muss einer der beiden Ränder überschritten werden.

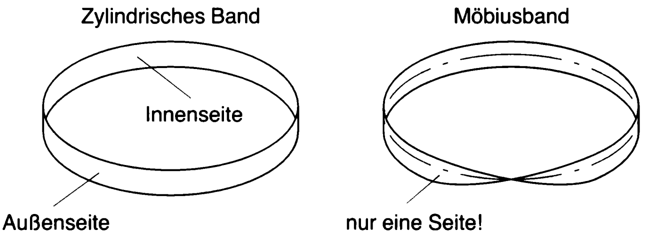


Abb. 2.1 Zylindrisches Band und Möbiusband

Gibt es *einseitige* Bänder, bei denen man also von einem Punkt zu jedem anderen Punkt des Bandes ohne eine Randüberschreitung gelangt?
Die Anschauung sagt uns, dass dies nicht möglich sein kann; trotzdem kann man leicht ein einseitiges Band herstellen.
Dazu braucht man den Papierstreifen (Maße etwa 40 cm mal 5 cm) vor dem Zusammenkleben nur um 180° zu verdrillen. Die so entstehende Fläche besitzt nur *eine* Seite; dies erkennt man, wenn von irgendeinem Punkt des Bandes ausgehend das gesamte Band ohne Absetzen einfärbt. Zudem besitzt diese Fläche auch nur *einen* Rand, was man durch Abfahren der Randlinie erkennt. Dieses sonderbare Band wird nach seinem Erfinder **Möbiusband**[2] genannt.
Schneide ein Möbiusband entlang der Mittellinie in zwei Hälften. Das Ergebnis ist ganz anders, als man erwartet: es entstehen nicht zwei getrennte Bänder, sondern ein einziges Band, das nun allerdings zweimal um 180° verdrillt ist!
Das Möbiusband findet praktische Verwendung, indem man Treibriemen durch eine halbe Drehung in ein Möbiusband verwandelt.

Im Alltag wird das Wort "logisch" verwendet, wenn man glaubt, richtig zu denken. Nicht selten treten dabei aber ernste Probleme auf, die auf Unklarheiten unserer Sprache zurückgehen. Seit alten Zeiten haben sich Forscher mit dem Denken beschäftigt und allmählich die **Logik als die Wissenschaft vom richtigen Denken** entwickelt. Davon hat nicht nur die Mathematik sehr profitiert, auch Anwendungsgebiete wie die Informationsverarbeitung in einer Rechenanlage beruhen auf Gesetzen der Logik. Auf ein wichtiges Teilgebiet der Logik, die **Aussagenlogik**, soll nun kurz eingegangen werden.

Zuerst ein kleiner **Test**! Die Lösungen stehen auf Seite 18:

(1) Wie lautet die Verneinung folgender Aussagen?
Das Glas ist voll mit Wasser.
Die Personenanzahl ist unter 4.
Der Schnee ist weiß.
Zu jedem Schloss gibt es einen Schlüssel.

(2) Eine Sicherheitsanweisung lautet: "Tanken und der Umgang mit offenem Feuer ist verboten". Offenbar darf getankt werden, wenn man den Umgang mit offenem Feuer vermeidet. Nun liest man auf einem Schild: "Rauchen und Trinken ist verboten." Heißt dies nun auch, dass man rauchen darf, wenn man nicht trinkt? Wie sollte das Verbot besser formuliert werden?

(3) Am Sonntag schlafe ich lange. Lässt sich daraus folgern: Am Montag schlafe ich nicht lange?

---

[2] A. F. Möbius, deutscher Mathematiker, 1790 – 1868

(4) "Jedes Feuerwehrauto ist rot" (wir nehmen jedenfalls an, dass diese Aussage wahr ist). "Jedes rote Auto ist ein Feuerwehrauto" ist dann offenbar falsch, da es ja auch andere rote Autos gibt. Ist die Aussage "Ein blaues Auto ist kein Feuerwehrauto" wahr?

Grundbegriff der Aussagenlogik ist die **Aussage**.

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Man sagt, dass jede Aussage einen der **Wahrheitswerte** "wahr" oder "falsch" besitzt, die wir mit "w" bzw. "f" abkürzen.

Beispiele von Aussagen:

1. Linz ist eine österreichische Landeshauptstadt.
2. 7 ist eine gerade Zahl.
3. $1 + 8 = 9$.
4. 3 ist kleiner als 5.
5. $2^3 = 3$.

Die Beispiele 1, 3 und 4 sind wahre Aussagen, die Beispiele 2 und 5 sind falsche Aussagen. Wesentlich ist, dass es bei einer Aussage grundsätzlich feststeht, ob sie wahr oder falsch ist (unabhängig davon, ob dies ein bestimmter Mensch entscheiden kann).

Beispiele für Sätze, die keine Aussagen sind:

1. Wie spät ist es?
2. Guten Morgen!
3. New York ist eine schöne Stadt.

Bei diesen Sätzen kann man nicht sagen, ob sie wahr oder falsch sind.

Betrachten wir nun die Gleichung $2 \cdot x + 1 = 7$. Da wir diese nicht als wahr oder falsch bezeichnen können, handelt es sich um keine Aussage. Setzen wir jedoch für x die Zahl 3 ein, so erhalten wir

$2 \cdot 3 + 1 = 7;$

und dies ist eine Aussage, und zwar eine wahre Aussage. Setzen wir für x die Zahl 4, so erhalten wir wieder eine Aussage, diesmal eine falsche Aussage. Wir haben also eine Vorstufe einer Aussage vor uns, eine **Aussageform**. Eine Aussageform enthält mindestens eine **Variable**, in unserem Beispiel x, für welche Zahlen (allgemeiner gewisse Elemente) eingesetzt werden können; wird das getan, so entsteht eine Aussage. Gleichungen wie auch Ungleichungen sind wichtige Beispiele für Aussageformen.

Noch einige wichtige Begriffe:

Axiom: Grundlegende Aussage, die unbewiesen bleibt (z.B.: "Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte" ist ein Axiom der euklidischen, d.h. der "gewöhnlichen" Geometrie).

Definition: Genaue Bestimmung eines Begriffes. Definitionen sind ein wesentlicher Bestandteil mathematischer Arbeit; sie müssen eindeutig und widerspruchsfrei sein. Damit wird vermieden, dass zwei Gesprächspartner zwar das gleiche Wort verwenden, aber etwas Verschiedenes darunter verstehen. Als Beispiel die Definition eines Trapezes: "Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind."

(Mathematischer) Satz: Bezeichnung für eine wahre Aussage in der Mathematik (z.B.: Satz von Pythagoras). Manchmal spricht man auch von einem **Theorem** oder **Gesetz**.

(Mathematischer) Beweis: Nachweis, dass ein Satz wahr ist. Beweise erfolgen aus Axiomen oder Sätzen nach Regeln, welche die Logik zur Verfügung stellt.
Keinesfalls wird ein mathematischer Beweis – wie in den Naturwissenschaften – durch Beobachtung oder durch ein Experiment geführt!

Aussageverbindungen

Aussagen werden häufig zu zusammengesetzten Aussagen verbunden oder "verknüpft". Die Umgangssprache verwendet dazu Wörter wie "und", "oder", "entweder ... oder", "weder ... noch", usw. Der Gebrauch dieser Wörter ist umgangssprachlich aber nicht klar geregelt (siehe Testaufgabe (2), Seite 12). Wir brauchen daher Regeln zum einheitlichen Verständnis.

1. Die UND-Verknüpfung oder Konjunktion:

Das Wort "und" wird in der Logik mit dem Zeichen " $\wedge$ " abgekürzt.

Beispiel 2.1 : UND-Verknüpfung

a) Aussage P: 3 ist eine ungerade Zahl; Aussage Q: 7 ist eine ungerade Zahl.
Wir verknüpfen P, Q durch das Wort "und" zu einer *neuen* Aussage:
3 ist eine ungerade Zahl **und** 7 ist eine ungerade Zahl. Kurz: 3 **und** 7 sind ungerade Zahlen.
Statt "und" schreibt man das Zeichen " $\wedge$ ": 3 ist eine ungerade Zahl $\wedge$ 7 ist eine ungerade Zahl.

b) 3 ist größer als 4 $\wedge$ 25 ist das Quadrat von 5.
Die Aussage in **a)**: "3 und 7 sind ungerade Zahlen" ist wahr, die Aussage in **b)** ist falsch.

Bezeichnen P und Q je eine Aussage, so heißt P $\wedge$ Q, in Worten "P und Q", ihre **UND-Verknüpfung** oder **Konjunktion**. Wir vereinbaren, dass **P $\wedge$ Q genau dann wahr ist, wenn sowohl P als auch Q wahr** sind.

Tab. 2.1, eine **Wahrheitstabelle**, zeigt die 4 möglichen Fälle von Wahrheitswerten für P, Q und dazu den Wahrheitswert der UND-Verknüpfung P $\wedge$ Q in knapper Form.

P	Q	P $\wedge$ Q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Tab. 2.1: Wahrheitstabelle der Konjunktion

Dies erfolgt in weitgehender Übereinstimmung mit dem umgangssprachlichen Gebrauch des Wortes "und". Die Konjunktion wird nach dem englischen Wort für "und" auch AND-Verknüpfung genannt.

Die UND-Verknüpfung kann in einfacher Form durch einen elektrischen Stromkreis (Abb.2.2) dargestellt werden, der nur ganz einfache Bauteile, nämlich Schalter sowie eine Lampe L (zur Stromanzeige), enthält. Ein Schalter kann nur zwei Zustände haben: er kann entweder *eingeschaltet* oder *ausgeschaltet* sein. Diese beiden Zustände können als Wahrheitswerte gedeutet werden: w = "eingeschaltet", f = "ausgeschaltet". Im Zusammenhang mit Schaltern schreibt man statt w auch 1 und statt f auch 0. Sagen wir noch, dass die Lampe genau dann den Wahrheitswert w (oder 1) anzeigt, wenn sie *brennt,* so stellt Abb. 2.2 die Schaltung einer UND-Verknüpfung dar: $L = S_1 \wedge S_2$. Nur wenn S_1 als auch S_2 eingeschaltet sind (also den Wert w haben), hat die Lampe L den Wert w.

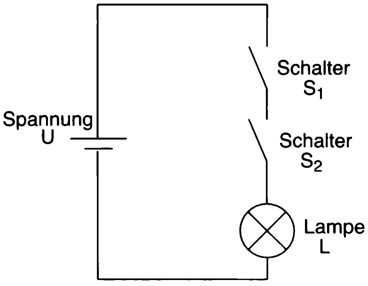


Abb. 2.2: Beispiel für eine UND-Verknüpfung

2. Die ODER-Verknüpfung oder Disjunktion:

Das Wort "oder" wird in der Logik mit dem Zeichen " $\vee$ " abgekürzt.

Beispiel 2.2 : ODER-Verknüpfung

a) Aussage P: Auf der Bank kann man Geld einlegen.

Aussage Q: Auf der Bank kann man Geld abheben.

Wir verknüpfen P, Q durch das Wort "oder" zu einer *neuen* Aussage:

Auf der Bank kann man Geld einlegen **oder** auf der Bank kann man Geld abheben. Kurz: Auf der Bank kann man Geld einlegen oder Geld abheben. Statt "oder" schreibt man das Zeichen $\vee$, wenn das "oder" nicht ausschließend gemeint ist (also nicht in der Bedeutung von "entweder ... oder"); dies ist hier der Fall, da man auf einer Bank Geld einlegen oder Geld abheben oder beides tun kann:

$P \vee Q$.

b) 3 ist größer als 4 $\vee$ 25 ist das Quadrat von 5.

Die Aussage in **a)** "Auf der Bank kann man Geld einlegen oder abheben" ist wahr. Die Aussage in **b)** ist ebenfalls wahr (weil eine der beiden Teilaussagen wahr ist).

Bezeichnen P und Q je eine Aussage, so heißt die so gebildete Verknüpfung P $\vee$ Q, in Worten "P oder Q", ihre **ODER-Verknüpfung** oder **Disjunktion. P $\vee$ Q ist wahr, wenn P wahr oder Q wahr oder beide wahr** sind. Tab. 2.2 zeigt die Wahrheitstabelle der Disjunktion.

P	Q	P $\vee$ Q
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tab. 2.2: Wahrheitstabelle der Disjunktion

Die Disjunktion wird nach dem englischen Wort für "oder" auch OR-Verknüpfung genannt. Die Festlegung ihrer Wahrheitswerte erfolgt in nur *teilweiser* Übereinstimmung mit dem umgangssprachlichen Gebrauch des Wortes "oder", das auch in der Bedeutung des "entweder ... oder" verwendet wird. In diesem Fall spricht man vom ausschließenden "oder" (ENTWEDER-ODER-Verknüpfung, engl. XOR, eXclusive OR).

Beispiel: Er wird schreiben **oder** anrufen; hier liegt eine ENTWEDER-ODER-Verknüpfung vor, wenn Schreiben *und* Anrufen ausgeschlossen ist. D.h. "oder" wird ausschließend verwendet (im Sinne von "entweder ... oder").

In der Logik und der Mathematik ist "oder" stets im nicht ausschließenden Sinn, also wie in Tab. 2.2, gemeint.

Gelegentlich schreibt man sicherheitshalber "und/oder", wenn man "oder" im nicht ausschließenden Sinn meint: "Auf der Bank kann man Geld einlegen und/oder abheben."

Auch die ODER-Verknüpfung kann in einfacher Form durch einen elektrischen Schaltkreis (Abb. 2.3) dargestellt werden: die Schalter S_1, S_2 liegen aber nun "parallel". Die Lampe L brennt, wenn S_1 oder S_2 oder beide eingeschaltet sind; nur wenn S_1 als auch S_2 die Werte f haben, hat die Lampe L den Wert f: $L = S_1 \vee S_2$.

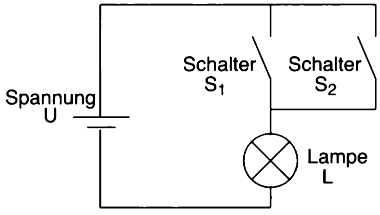


Abb. 2.3: Beispiel einer ODER-Verknüpfung

3. Die Verneinung oder Negation:

Das Wort "nicht" wird in der Logik mit dem Zeichen " ¬ " abgekürzt.

Beispiel 2.3 : Verneinung

1. Die Negation von "Das Auto ist zweitürig" lautet "Es trifft nicht zu, dass das Auto zweitürig ist" oder vereinfacht "Das Auto ist nicht zweitürig".
2. Die Negation von "Alle Plätze sind besetzt" lautet "Es trifft nicht zu, dass alle Plätze besetzt sind" oder auch "Es gibt Plätze, die frei sind".

Bezeichnet P eine Aussage, so heißt ¬ P, gelesen: "nicht P", ihre **Negation**. Die Negation (Verneinung) erfolgt, indem man vor die zu verneinende Aussage das Wort "Nicht" oder den Zusatz "Es trifft nicht zu, dass ... " setzt und danach sinngemäß sprachlich vereinfacht. Tab. 2.3 zeigt die Wahrheitstabelle der Negation.

P	¬ P
w	f
f	w

Tab. 2.3: Wahrheitstabelle der Negation

4. Wenn-dann-Verknüpfung oder Implikation:

Die Verknüpfung "wenn ... dann" wird in der Logik mit dem Zeichen "⇒" abgekürzt.

Beispiel 2.4 : Wenn-dann-Verknüpfung

a) Aussage P: Es ist neblig; Aussage Q: Die Sicht ist schlecht.
Wir verknüpfen P, Q durch "wenn ... dann" zu einer *neuen* Aussage:
Wenn es neblig ist, **dann** ist die Sicht schlecht; dafür schreibt man auch: $P \Rightarrow Q$.

b) Aussage P: Das Viereck ABCD ist ein Quadrat;
Aussage Q: Das Viereck ABCD ist ein Rechteck.
Aussage $P \Rightarrow Q$: Wenn ABCD ein Quadrat ist, dann ist ABCD ein Rechteck. Dies ist eine wahre Aussage, da jedes Quadrat auch ein Rechteck ist.

Bezeichnen P und Q je eine Aussage, so heißt die neue Aussage $P \Rightarrow Q$ **Wenn-dann-Verknüpfung** oder **Implikation**.

In Worten:

"Wenn P, dann Q." "Aus P folgt Q."
"P ist *hinreichend* für Q." "Q ist *notwendig* für P."

Trifft $P \Rightarrow Q$ zu, so bedeutet dies: **Wenn P wahr ist, so ist auch Q wahr**.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tab. 2.4: Wahrheitstabelle der Implikation

So kann man sagen:

Nebel ist hinreichend (d.h. ausreichend) für schlechte Sicht;
Nebel ist aber nicht notwendig für schlechte Sicht.
Schlechte Sicht ist notwendig(e Folge) bei Nebel.
Ist ein Viereck ABCD ein Quadrat, so ist dies hinreichend dafür, dass es ein Rechteck ist.
Soll ein Viereck ABCD ein Quadrat sein, so ist es notwendigerweise ein Rechteck.

Achtung!

Die Aussage "Wenn es neblig ist, ist die Sicht schlecht" sagt *nur* etwas aus, *wenn* es neblig ist. Ist es nicht neblig, so könnte die Sicht gut oder auch schlecht sein (schlecht, weil es Nacht ist oder stark regnet). Ist also P falsch, so könnte Q wahr oder auch falsch sein. Tab. 2.4 zeigt den Sachverhalt.

5. Genau-dann-wenn-Verknüpfung oder Äquivalenz:

Hier wird in der Logik der Äquivalenzpfeil "$\Leftrightarrow$" verwendet.

Beispiel 2.5 : Genau-dann-wenn-Verknüpfung

a) Aussage P: Die Zahl x ist gerade. Aussage Q: Die Zahl x ist durch 2 teilbar.
Hierbei ist für x eine bestimmte Zahl eingesetzt zu denken.
Wir verknüpfen P, Q durch "genau dann, wenn" zu einer *neuen* Aussage: **Genau dann, wenn** die Zahl gerade ist, ist sie durch 2 teilbar; dafür schreibt man auch: $P \Leftrightarrow Q$.

b) Aussage P: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
Aussage Q: Für das Dreieck ABC gilt der pythagoräische Lehrsatz.
Aussage $P \Leftrightarrow Q$: Genau dann, wenn ABC rechtwinklig ist, gilt der pythagoräische Lehrsatz.

Bezeichnen P und Q je eine Aussage, so heißt $P \Leftrightarrow Q$ **Äquivalenz** (Äquivalenz heißt hier Gleichwertigkeit, was die *Wahrheitswerte* betrifft). In Worten:
"P genau dann, wenn Q."
"Aus P folgt Q und aus Q folgt P."
"P ist *notwendig und hinreichend* für Q."
"P ist äquivalent zu Q."

Trifft die Äquivalenz $P \Leftrightarrow Q$ zu, so bedeutet dies: **P, Q sind entweder beide wahr oder beide falsch**. Sie sind logisch gleichwertig oder äquivalent. Zum Unterschied zur Implikation ist nun bei falschem P auch Q falsch! Siehe auch Tab. 2.5.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Tab. 2.5: Wahrheitstabelle der Äquivalenz

So kann man sagen:
Genau dann, wenn die Zahl *x gerade* ist, ist sie *durch 2 teilbar.*
Daraus, dass die Zahl *x gerade* ist, folgt, dass sie *durch 2 teilbar* ist und umgekehrt.
x gerade ist notwendig und hinreichend dafür, dass *x teilbar durch 2* ist.
x gerade ist äquivalent zu *x ist durch 2 teilbar.*

Wir fassen die besprochenen Aussageverbindungen zusammen:

Im Überblick: ABC der Logik

Verknüpfung	In Zeichen	Gesprochen	Ist die Verknüpfung wahr, ...
Konjunktion (AND-Verknüpfung)	$P \wedge Q$	P und Q	sind sowohl P als auch Q wahr.
Disjunktion (OR-Verknüpfung)	$P \vee Q$	P oder Q	ist P wahr oder Q wahr oder es sind beide wahr.
Negation	$\neg P$	nicht P	ist P falsch.
Implikation	$P \Rightarrow Q$	wenn P, dann Q; aus P folgt Q; P ist *hinreichend* für Q; Q ist *notwendig* für P.	ist bei wahrem P die Aussage Q wahr.
Äquivalenz	$P \Leftrightarrow Q$	P genau dann, wenn Q; aus P folgt Q und aus Q folgt P; P ist *notwendig und hinreichend* für Q.	sind P, Q entweder beide wahr oder beide falsch.

Nun zur Auflösung unseres Tests von Seite 12:

Zu (1)

Aussage	Richtige Verneinung	Beispiel für unrichtige Verneinung
Das Glas ist voll.	Das Glas ist nicht voll (vielleicht ist es halb voll).	Das Glas ist leer.
Die Personenanzahl ist unter 4.	Die Personenanzahl ist nicht unter 4; die Personenanzahl ist gleich 4 oder darüber.	Die Personenanzahl ist über 4.
Der Schnee ist weiß.	Der Schnee ist nicht weiß.	Der Schnee ist schwarz.
Zu jedem Schloss gibt es einen Schlüssel.	Es gibt ein Schloss, zu dem es keinen Schlüssel gibt.	Zu keinem Schloss gibt es einen Schlüssel.

Zu (2) Rauchen *oder* Trinken ist verboten.

Zu (3) Nein, denn die Implikation sagt nur etwas über den Sonntag aus! So könnte man durchaus am Montag lange schlafen, weil dieser arbeitsfrei ist, weil man verschlafen hat usw. Hätte jedoch die Aussage gelautet: "Genau dann, wenn Sonntag ist, schlafe ich lange", so wäre die Antwort "ja".

Zu (4) Ja, denn ein Feuerwehrauto ist stets rot.

Aufgaben

2.1 Beantworte, ob eine Aussage oder keine Aussage vorliegt.

a) Komm sofort her!
b) Die Erde besitzt zwei Monde.
c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
d) Rot ist schöner als Blau.
e) Kalt ist langsamer als 7.
f) Liegt Wien an der Donau?

2.2 Ausschließendes "oder"?

a) Morgen oder übermorgen kann es regnen.
b) Morgen oder übermorgen ist Sonntag.
c) Zahl oder Wappen?
d) Kenntnisse in Englisch oder Französisch sind erforderlich.

2.3 Wie kann besser formuliert werden?

a) Wenn die Ampel rot und gelb zeigt, ist anzuhalten.
b) Betreten des Rasens und Blumenpflücken ist verboten.

2.4 Wird richtig verneint?

a) Er ist arm. / Er ist reich.
b) Sie ist älter als 16. / Sie ist jünger als 16.
c) Es gibt viele Kranke. / Niemand ist krank.
d) Es gab höchstens zwei Bewerber. / Es gab mindestens zwei Bewerber.

2.5 Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen?

a) Es ist kalt.

b) Niemand konnte das Problem lösen.

c) Bernd ist der Größte in der Klasse.

d) Alle Schüler nehmen teil.

e) Sportler sind immer Nichtraucher.

f) Er ist höchstens 15 Jahre alt.

g) Kein Schüler ist krank.

h) Wer viel Alkohol trinkt, wird dick.

2.6 Wenn die Sonne scheint, fährt Stefan mit dem Fahrrad in die Schule. Heute scheint die Sonne jedoch nicht. Was lässt sich sagen, wie Stefan heute in die Schule kommt?

2.7 Genau dann, wenn die Sonne scheint, fährt Stefan mit dem Fahrrad. Heute scheint die Sonne nicht. Was lässt sich sagen, wie Stefan heute in die Schule kommt?

2.8 Sind die angegebenen Bedingungen notwendig und/oder hinreichend?

a) Ein Stromanschluss ist ... , dass die (elektrische) Lampe leuchtet.

b) Regen ist ... , dass die Straße nass ist.

c) Der Führerschein ist ... für die Lenkerberechtigung.

d) Die Teilbarkeit einer ganzen Zahl durch 2 ist ... , dass diese Zahl gerade ist.

e) Die Teilbarkeit einer ganzen Zahl durch 9 ist ... , dass die Zahl durch 3 teilbar ist.

2.9 Sei n eine natürliche Zahl, also eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Aussage P: n ist durch 4 teilbar; Aussage Q: n ist eine gerade Zahl. Was ist richtig?

a) $P \Rightarrow Q$

b) $Q \Rightarrow P$

c) $P \Leftrightarrow Q$

d) P ist hinreichend für Q.

e) P ist notwendig für Q.

f) P ist notwendig und hinreichend für Q.

2.10 Wenn eine Zahl positiv ist, so ist auch ihr Quadrat positiv. Gilt auch die Umkehrung ”Wenn das Quadrat einer Zahl positiv ist, so ist diese Zahl ebenfalls positiv”?

2.11 Wenn die Sonne scheint, bin ich froh (Abb. 2.4). Sind dann die folgenden Aussagen richtige logische Schlüsse?

a) Heute bin ich froh, also scheint die Sonne.

b) Heute regnet es, also bin ich nicht froh.

c) Heute bin ich nicht froh, also scheint auch nicht die Sonne.

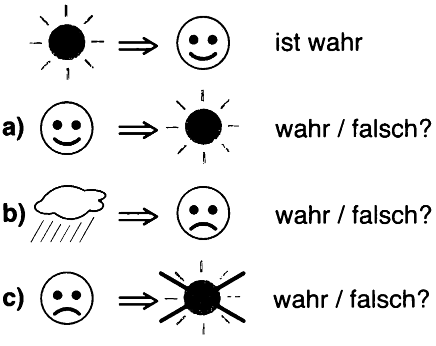


Abb. 2.4

2.12 Wenn ein Viereck vier rechte Winkel besitzt, so halbieren einander die Diagonalen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Besitzt ein Viereck nicht vier rechte Winkel, so halbieren einander auch nicht die Diagonalen.

b) Halbieren einander die Diagonalen, so besitzt das Viereck vier rechte Winkel.

c) Halbieren einander die Diagonalen nicht, so besitzt das Viereck auch nicht vier rechte Winkel.

2.13 Wie sieht die Wahrheitstabelle für das ausschließende ODER aus?

2.2 Einmaleins der Mengenlehre

Die **Mengenlehre** bietet eine gewissermaßen normierte Sprechweise an, in der mathematische Begriffe klar und präzise formuliert werden können. Sie ist weltweit zur mathematischen **Umgangssprache** geworden. Die Situation ist ganz ähnlich wie in anderen Fachgebieten. Jemand, der öfter mit EDV zu tun hat, verwendet Begriffe wie Taktfrequenz, Byte oder RAM und wird sie nicht ständig mit gewöhnlichen Worten umschreiben. In diesem Sinn werden wir einige einfache Vokabeln und Formulierungen aus der Mengenlehre kennen lernen. Darüber hinaus ist die Mengenlehre eine grundlegende mathematische Disziplin, die viele Gebiete der Mathematik und Logik entscheidend geprägt hat.

Eine der grundlegenden Fähigkeiten des menschlichen Geistes ist das gedankliche Zusammenfassen von Dingen mit einer **gemeinsamen Eigenschaft** zu einer Einheit, eben zu einer **Menge** dieser Dinge. Die so zusammengefassten Dinge werden **Elemente** dieser Menge genannt.

Abb. 2.5 Georg CANTOR (1845 – 1918), der Begründer der Mengenlehre

Beispiele:

- Menge der Schüler einer bestimmten Klasse; die Schüler sind die "Elemente" dieser Menge.
- Menge der Pflichtgegenstände (einer bestimmten Klasse)
- Menge der natürlichen Zahlen bis einschließlich 4

Der Begriff "Menge" wird nicht weiter erklärt, d.h. auf andere Begriffe zurückgeführt. Er ist ein Grundbegriff ähnlich wie in der Geometrie die Begriffe "Punkt" oder "Gerade".

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet.

Z.B.: M = Menge der natürlichen Zahlen bis einschließlich 4.

Die Zahl 3 ist *Element von M*, nicht jedoch $\frac{2}{3}$. Dies bringt man kurz durch die folgende Schreibweise zum Ausdruck:

$3 \in M$ (gelesen: 3 ist Element von M), $\frac{2}{3} \notin M$ (gelesen: $\frac{2}{3}$ ist nicht Element von M).

Das Elementzeichen "$\in$" erinnert an den Buchstaben "E" (wie Element).

Angaben von Mengen

Diese erfolgt meist durch zwei Verfahren. Im **aufzählenden Verfahren** werden einfach die Namen aller Elemente zwischen geschwungenen Klammern ("Mengenklammern") aufgeschrieben. Z.B.: $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Einige häufig auftretende Zahlenmengen werden mit besonderen Symbolen gekennzeichnet:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null, Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen

Sie sind Beispiele für *unendliche* Mengen, d.h. Mengen mit unendlich vielen Elementen. Weitere besondere Zahlenmengen und ihre Symbole wie $\mathbb{Q}$ (Seite 32 f.) und $\mathbb{R}$ (Seite 33 f.) folgen.

Im **beschreibenden Verfahren** gibt man die Eigenschaft, welche die Menge kennzeichnet, zwischen geschwungenen Klammern an. So können wir die Menge M auch schreiben:

$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$.

Nach einem senkrechten Strich erfolgt die nähere Beschreibung der Elemente. Man spricht: "Menge aller natürlichen Zahlen, für die gilt: $x < 5$."

Wir hätten zur Beschreibung auch $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4{,}7\}$, $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 4\}$ oder dergleichen schreiben können.

Zur Erinnerung:

Die Spitze der Zeichen $<$ oder $>$ zeigt immer zur kleineren Zahl, sie öffnen sich zur größeren Zahl. Beachte: $x \leqslant 5 \Leftrightarrow x < 5 \vee x = 5$.

$<$ steht für "ist kleiner als".
$\leqslant$ steht für "ist kleiner oder höchstens gleich".
$>$ steht für "ist größer als".
$\geqslant$ steht für "ist größer oder höchstens gleich".

Ein weiteres Beispiel:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12\}$

In Worten: "A ist die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 12 ist." Im aufzählenden Verfahren würde man schreiben: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Beispiel 2.6 : Aufzählende und beschreibende Mengenangabe

a) Gib die Menge $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 12\}$ im aufzählenden Verfahren an.

b) Gib die Menge $D = \{5, 6, 7, 8\}$ in einem beschreibenden Verfahren an.

Lösung

Zu **a)** $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Alle Elemente von B haben Quadrate, die kleiner als 12 sind.

Zu **b)** $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5 \wedge x \leqslant 8\}$.

Hier haben wir die Abkürzung " $\wedge$ " für "und" (siehe Seite 14) verwendet. Für die beiden zugleich geltenden Bedingungen "$x \geqslant 5$" und "$x \leqslant 8$" ist die Schreibweise als "Ungleichungskette" $5 \leqslant x \leqslant 8$ üblich. Damit:

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leqslant x \leqslant 8\}$.

Es gibt es noch andere Möglichkeiten, die Menge D zu beschreiben.

Gleichheit von Mengen

Wir treffen die *Vereinbarung:* Mengen mit den gleichen Elementen nennt man *gleich.* Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Elemente nicht an. Z.B.:

$M = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{2, 4, 0, 3, 1\}$.

Leere Menge

Darunter versteht man die Menge, die kein Element enthält. Sie wird mit dem Symbol $\{\,\}$ (oder auch mit $\varnothing$) bezeichnet.

Z.B.: $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 1\}$. Es gibt keine natürliche Zahl, die gleich bleibt, wenn man zu ihr 1 addiert. Somit enthält S kein Element; es gilt daher $S = \{\,\}$.

Die Einführung der leeren Menge ist recht nützlich und macht den Umgang mit Mengen einfacher. Hätte man die leere Menge nicht zur Verfügung, so dürfte man S nicht als Menge bezeichnen, da sie kein Element enthält. Ebenso könnte man beispielsweise nicht von der Menge aller Mädchen in einer bestimmten Klasse sprechen, wenn man sich nicht vorher erkundigt hätte, ob es wirklich Mädchen in dieser Klasse gibt.

Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Kurzschreibweise: $A \subseteq B$. Diese Definition schließt auch noch die Gleichheit der betreffenden Mengen ein!

Enthält B wenigstens ein Element, das nicht in A enthalten ist, so bezeichnet man A auch als **echte Teilmenge** von B. Dafür schreibt man auch kurz: $A \subset B$.

Beispiel 2.7 : Teilmengenbeziehung

a) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$, auch: $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$

b) $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$

c) Für $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ kann man auch $\{1, 2, 3\} \subseteq \{3, 1, 2\}$ schreiben.

Beachte die Vereinbarung, dass für die Gleichheit von Mengen die Reihenfolge der Elemente belanglos ist.

Die Zeichen $\subset$ und $\subseteq$ erinnern an die Zeichen $<$ und $\leqslant$.

Vereinigung von Mengen

Die Menge aller Elemente, die mindestens zu einer der Mengen A oder B gehören, heißt **Vereinigungsmenge** von A und B.

Kurzschreibweise: $A \cup B$ (gelesen: ”A vereinigt mit B”). Das Zeichen $\cup$ erinnert an den Buchstaben V (Vereinigung) oder an das logische Zeichen $\vee$ für das einschließende ”oder”.

Beispiel 2.8 : Vereinigung von Mengen

a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\{1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $\{1, 2, 3\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

Bemerkung zu **a)**: Kommt ein Element in beiden Mengen vor, so wie hier die Zahl 3, so wird es in der Vereinigungsmenge nur *einmal* angeschrieben.

Durchschnitt von Mengen

Die Menge aller Elemente, die *sowohl* zu A als *auch* zu B gehören, heißt **Durchschnittsmenge** von A und B.

Kurzschreibweise: $A \cap B$ (gelesen: ”A geschnitten mit B”). Das Zeichen $\cap$ erinnert an das logische Zeichen $\wedge$ für das ”und”.

Beispiel 2.9 : Durchschnitt von Mengen

a) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

b) $\{1, 2, 3\} \cap \{4\} = \{\ \}$, d.h. kein gemeinsames Element

c) $\{1, 2, 3\} \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$

Besitzen zwei Mengen A, B kein gemeinsames Element, ist also $A \cap B = \{\ \}$, so heißen sie **elementefremd** oder **disjunkt**.

Differenzmenge

Die Menge aller Elemente von A, die *nicht* zu B gehören, heißt **Differenzmenge** $A \setminus B$ (gelesen "A ohne B").

Ist $B \subseteq A$, so nennt man $A \setminus B$ auch **Komplementärmenge** oder **Ergänzungsmenge** von B bezüglich A.

Die Bildung der Differenzmenge $A \setminus B$ erinnert an das Bilden einer Differenz: Man nimmt aus A alle jene Elemente heraus, die auch in B enthalten sind (falls es solche gibt).

Beispiel 2.10 : Differenzmenge

a) $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\}$

b) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\}$

c) $\{3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$

d) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Bemerkung zu **a)**: $\{1, 2\}$ ist die Komplementärmenge von $\{3, 4\}$ bezüglich $\{1, 2, 3, 4\}$.

Beachte, dass im Allgemeinen gilt: $A \setminus B \neq B \setminus A$! Vergleiche dazu **b)** und **c)**.

Mengendiagramme (oder Venn[3]-Diagramme)

Eine beim Arbeiten mit Mengen häufig benützte graphische Veranschaulichung sind **Mengendiagramme**. Dabei werden so viele geschlossene Kurven gezeichnet wie Mengen auftreten. Die von einer solchen Kurve umfassten Punkte (einzelne markierte Punkte oder sonst das gesamte Flächenstück) bilden jeweils die entsprechende Menge.

Die folgende Übersicht (Abb. 2.6) soll $A \subseteq B$ bzw. $A \subset B$, $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ graphisch veranschaulichen:

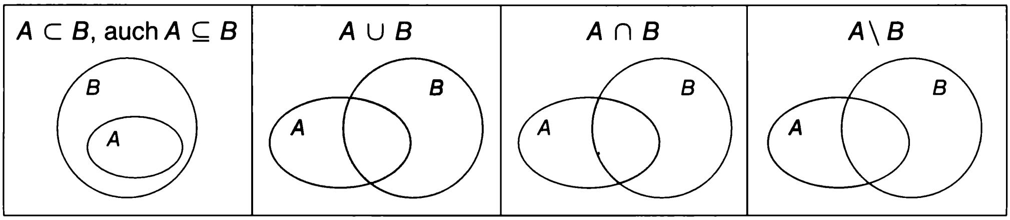


Abb. 2.6 Mengendiagramme

---

[3] John VENN, englischer Mathematiker, 1834 – 1923

Beispiel 2.11 : Zeichnen von Mengendiagrammen

Zeichne ein Mengendiagramm für die drei Mengen A, B, C, wenn

a) $A \cap B = \{\}$ und $A \cap C = \{\}$ und $B \cap C = \{\}$

b) $A \cap C = \{\}$ und $A \subset B$ und $C \subset B$

Lösung

zu **a)** Die drei Mengen sind untereinander elementefremd oder disjunkt (Abb. 2.7).

zu **b)** Die elementefremden Mengen A und C sind Teilmengen von B (Abb. 2.8).

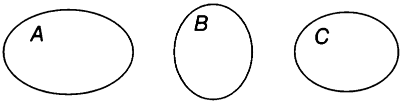


Abb. 2.7 Zu Beispiel 2.11 a)

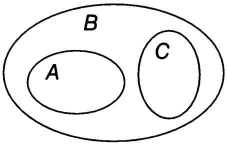


Abb. 2.8 Zu Beispiel 2.11 b)

Beispiel 2.12 : Überlegungen mit Mengen

Welche Schlussfolgerungen über A, B lassen sich ziehen, wenn gilt:

a) $A \cup B = B$ **b)** $A \setminus B = A$ **c)** $A \cup B = \{\}$

Lösung

zu **a)** A muss Teilmenge von B sein, also $A \subseteq B$ (Abb. 2.9). Wäre dies nicht der Fall, so würde A wenigstens ein Element besitzen, das nicht in B enthalten ist. Dann könnten aber A und B vereinigt nicht die Menge B sein!

zu **b)** A und B müssen elementefremd sein (Abb. 2.10). Wäre dies nicht der Fall, so würden A und B wenigstens ein gemeinsames Element besitzen. $A \setminus B$ könnte dann nicht A sein!

zu **c)** Sowohl A als auch B müssen die leere Menge sein; denn wäre eine von ihnen nicht leer, so könnte ihre Vereinigung nicht die leere Menge sein!

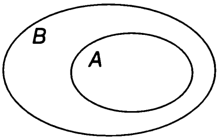


Abb. 2.9 $A \cup B = B$

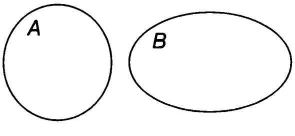


Abb. 2.10 $A \setminus B = A$

Im Überblick: Einmaleins der Mengenlehre ●

$x \in M$, $y \notin M$	x ist Element, y ist nicht Element von M.
Mengenangabe aufzählend	Die Namen der Elemente werden angegeben.
Mengenangabe beschreibend	Die kennzeichnende Eigenschaft der Menge wird angegeben.
$A = B$, Gleichheit von Mengen	A und B enthalten die gleichen Elemente (Reihenfolge der Angabe ist belanglos).

Leere Menge { }	Menge, die kein Element enthält.
$A \subseteq B$, A ist Teilmenge von B	Jedes Element von A gehört zu B.
$A \subset B$, A ist echte Teilmenge von B	Jedes Element von A gehört zu B, aber $A \neq B$.
$A \cup B$, Vereinigungsmenge von A, B ("A vereinigt mit B")	Erfasst alle Elemente, die zu A oder B oder zu beiden dieser Mengen gehören.
$A \cap B$, Durchschnittsmenge von A, B ("A geschnitten mit B")	Erfasst alle Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.
$A \setminus B$, Differenzmenge von A, B ("A ohne B"). Ist $B \subseteq A$, so heißt $A \setminus B$ Komplementärmenge von B bezüglich A	Erfasst alle Elemente, die zwar zu A, aber nicht zu B gehören.
Mengendiagramme (Venn-Diagramme)	Graphische Veranschaulichung von Mengen mit Hilfe geschlossener Kurven.

Aufgaben

2.14 Gib die folgenden Mengen im aufzählenden Verfahren an:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x < 5\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leqslant 4\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$ **d)** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leqslant 3\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leqslant x \leqslant -1\}$ **f)** $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < -1\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 10 \wedge x^2 < 12\}$ **h)** $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4 \wedge x < 7\}$

2.15 Stelle folgende Mengen im beschreibenden Verfahren dar:

a) $A = \{4, 5, 6\}$ **b)** $B = \{-1, 0, 1\}$ **c)** $C = \{5, 6, 7, \ldots\}$

d) $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ **e)** $E = \{\ldots, -2, -1\}$ **f)** $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

2.16 Wahr oder falsch?

a) $2 < 3$ **b)** $2 > 1$ **c)** $2 \leqslant 3$ **d)** $3 < 3$ **e)** $3 \leqslant 3$

2.17 Gegeben sind zwei Mengen A und B. Gib ihre Vereinigungsmenge, ihre Durchschnittsmenge sowie die Differenzmengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ an:

a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ **b)** $A = \{4, 5, 6\}$, $B = A$

c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \mathbb{N}$ **d)** $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

2.18 Gegeben sind zwei Mengen $B \subseteq A$. Ermittle die Komplementärmenge von B bezüglich A.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ **b)** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$

c) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}^*$ **d)** $A = B$

2.19 Was ergibt:

a) $\{1\} \cup \{1\}$ **b)** $\{1\} \cup \{0\}$ **c)** $\{\,\} \cup \{0\}$ **d)** $\mathbb{N}^* \cup \{0\}$ **e)** $\mathbb{N} \cup \{0\}$

f) $\mathbb{N}^* \cap \{0\}$ **g)** $\mathbb{N} \cap \{0\}$ **h)** $\mathbb{N}^* \setminus \{0\}$ **i)** $\{0\} \setminus \mathbb{N}^*$ **j)** $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^*$

2.20 Was ergibt: **a)** $A \cup A$ **b)** $A \cap A$ **c)** $A \setminus A$

2.21 Es ist $B \subseteq A$. Zeichne ein Mengendiagramm für die Komplementärmenge von B bezüglich A.

2.22 Abb. 2.11 zeigt vier Mengendiagramme für zwei Mengen A, B; markiere (wenn möglich) in *jedem* dieser Diagramme die Menge **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \setminus B$ **d)** $B \setminus A$

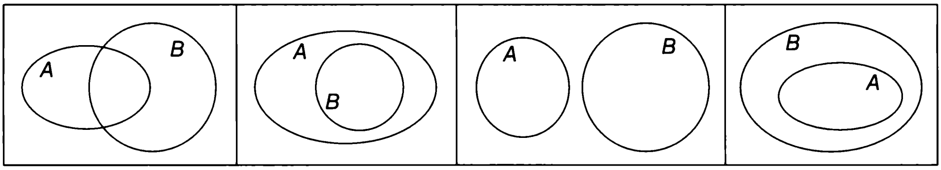


Abb. 2.11 Vier Mengendiagramme für zwei Mengen

2.23 Zeichne ein Mengendiagramm für die Mengen A, B, wenn gilt:
a) $A \cup B = A$ **b)** $A \cap B = A$ **c)** $A \cap B = \{\,\}$ **d)** $A \setminus B = A$

2.24 Zeichne ein Mengendiagramm für die Mengen A, B, C, wenn
a) $A \cup B = B$ und $B \cup C = C$ **b)** $A \subset C$ und $B \subset C$ und $A \cap B = \{\,\}$

2.25 Wahr oder falsch?
a) $\{\,\} = \{0\}$ **b)** $\{4, 5, 9\} = \{5, 4, 9\}$ **c)** $\{4, 5, 9\} \subset \{5, 4, 9\}$
d) $\{4, 5, 9\} \subseteq \{5, 4, 9\}$ **e)** $\{1\} \cup \{1\} = \{2\}$ **f)** $\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$

2.26 Im Mengendiagramm der Abb. 2.12 sind die Elemente der Mengen A, B und C die von den zugehörigen Kurven umfassten Zahlen; so ist etwa $A = \{1, 2, 4\}$. Bilde:
a) $A \cup B$ **b)** $A \cup C$ **c)** $B \cup C$
d) $A \cap B$ **e)** $A \cap C$ **f)** $B \cap C$
g) $A \setminus B$ **h)** $(A \cup B) \cup C$ **i)** $(A \cap B) \cap C$

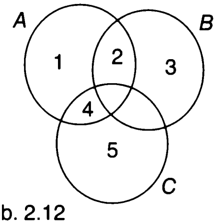


Abb. 2.12

2.27 Von drei Mengen A, B und C hat man die folgende Kenntnis, aus denen A, B und C zu rekonstruieren sind:
a) $A \cap B = \{4\}$, $A \cap C = \{2, 3, 4\}$, $B \cap C = \{4\}$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$
b) $A \cap B = \{\,\}$, $A \cap C = \{4, 5\}$, $B \cap C = \{2\}$,
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2.28 In einer Klasse mit 32 Schülern besitzen 20 Schüler einen eigenen PC und 28 Schüler ein eigenes Fahrrad. Wie viele Schüler besitzen
a) *nur* einen PC, **b)** *nur* ein Fahrrad, **c)** sowohl einen PC als auch ein Fahrrad?

Hinweis: Versuche die Lösung über ein Mengendiagramm zu finden. S ist die Menge aller Schüler, P die Menge der Schüler, die einen PC, F die Menge der Schüler, die ein Fahrrad besitzen. Drücke nun die gesuchten Mengen durch S, P und F aus.

2.29 Ein elektrisches Bauelement setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Jede der beiden Komponenten kann fehlerhaft sein, was äußerlich nicht erkennbar ist. Angenommen, von 1 000 Einheiten der ersten Komponente sind 950 einwandfrei, von der zweiten dagegen nur 900. Welche Mindestzahl sowie Höchstzahl von einwandfreien Bauelementen kann daraus zusammengebaut werden?

Hinweis: C ist die Menge aller 1 000 Bauelemente, A jene Teilmenge von C mit einwandfreier erster Komponente, B jene mit einwandfreier zweiter Komponente. Löse über ein Mengendiagramm!

2.3 Zahlenarten

2.3.1 Die natürlichen und ganzen Zahlen

Alle natürlichen Zahlen können mit 10 Zeichen, den arabischen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, in der gewohnten dezimalen Zahlendarstellung geschrieben werden. Beispielsweise:

$1088 = 1 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 1$.

Die 4 Grundrechenarten

Addition	$3 + 4 = 7$	Summand + Summand = Summe
Subtraktion	$7 - 3 = 4$	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation	$3 \cdot 4 = 12$	Faktor · Faktor = Produkt
Division	$12 : 3 = 4$	Dividend : Divisor = Quotient

Subtrahieren ist die Umkehraufgabe des Addierens, Dividieren die Umkehraufgabe des Multiplizierens. $7 - 2 = 5$, weil $5 + 2 = 7$ ist; $12 : 3 = 4$, weil $4 \cdot 3$ gleich 12 ist. Als Divisionszeichen kann auch der Bruchstrich oder der Schrägstrich verwendet werden: $\frac{12}{3}$ oder 12/3.

Potenzieren

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren wird abkürzend als sogenannte **Potenz** geschrieben.

Beispiel:

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, "dritte Potenz von 4"; "4 hoch 3".

Man nennt:

4 *Grundzahl* oder *Basis,*
3 *Hochzahl* oder *Exponent.*

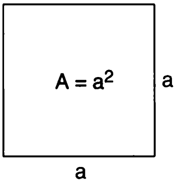


Abb. 2.13 $A = a^2$

Der Rechenvorgang heißt **Potenzieren**. Beim Rechnen treten besonders häufig die zweiten und dritten Potenzen auf; sie heißen **Quadrate** und **Kuben**. Man spricht vom Quadrieren und vom Kubieren. Diese Namen rühren davon her, daß a^2 der Flächeninhalt A eines Quadrates mit der Seitenlänge a und a^3 das Volumen V eines Würfels (Kubus) mit der Kantenlänge a ist (Abb. 2.13 und 2.14).

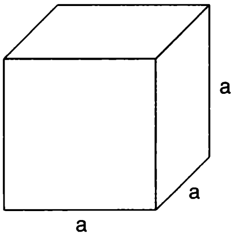


Abb. 2.14 $V = a^3$

Es gibt natürliche Zahlen, die besonders vielfältig teilbar und aus diesem Grund in der Praxis sehr beliebt sind. Beispiele dafür sind die Zahlen 12 oder 60. Ein Tag besitzt zweimal 12 Stunden, 1 Stunde hat 60 Minuten. Auf der anderen Seite stehen die unteilbaren Zahlen, die Primzahlen; auch sie haben in letzter Zeit eine enorme praktische Bedeutung als Grundlage für raffinierte, praktisch sichere Geheimcodes gewonnen. Genauer definiert man:

> Eine natürliche Zahl größer oder gleich 2, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, heißt **Primzahl**.

Hinweis: 1 ist keine Primzahl.

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

Tab. 2.6: Primzahlen bis 100

Die Primzahlen unter 100 sind in Tab. 2.6 angeführt.

Es lässt sich leicht zeigen, dass es **unendlich viele Primzahlen** gibt. Dies soll durch einen sogenannten **indirekten Beweis** erfolgen. Dabei wird aus der Verneinung (Negation) der Behauptung ein Widerspruch abgeleitet, weshalb die Verneinung falsch und damit die Behauptung wahr sein muss. Dieser Beweis, er stammt vom griechischen Mathematiker EUKLID[4] (365 – ca. 300 v. Chr.), gilt als ein Musterbeispiel mathematischer Beweisführung.

Indirekter Beweis der Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Verneinung: Es gibt nur endlich viele Primzahlen; ihre Anzahl ist n. Sie lauten der Größe nach angeordnet: 2, 3, 5, 7, ..., p, wobei p die größte der n Primzahlen ist. Wir bilden das Produkt dieser n Primzahlen und addieren dazu 1:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1.$

Diese natürliche Zahl lässt sich nicht durch 2, 3, 5, 7, ... oder p teilen, wir erhalten stets den Rest 1. Das heißt aber, wir haben zusätzlich zu den bisherigen n Primzahlen eine weitere gefunden! Dies steht im Widerspruch dazu, dass ihre Anzahl n ist. Damit kann es nicht endlich viele Primzahlen geben, sondern es müssen unendlich viele sein.

Jede natürliche Zahl (größer als 1) **ist entweder selbst eine Primzahl oder lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.**

Die Faktoren einer solchen "Zerlegung" werden *Primfaktoren* genannt.

Die Primzahlen bilden also die "Bausteine" der natürlichen Zahlen. Was in der Physik die Elementarteilchen und in der Chemie die chemischen Elemente sind, sind in der Zahlentheorie, einem Teilgebiet der Mathematik, die Primzahlen. Ein ordnendes Schema für die Primzahlen wurde bis jetzt jedoch noch nicht gefunden!

Beispiel 2.13 : Primfaktorzerlegung

Zerlege in das Produkt ihrer Primfaktoren: **a)** 120 **b)** 1530.

Lösung

Wir versuchen es zuerst mit kleineren Faktoren und zerlegen schrittweise bis in Primfaktoren:

Zu **a)** $120 = 6 \cdot 20 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Zu **b)** $1530 = 2 \cdot 765 = 2 \cdot 3 \cdot 255 = 2 \cdot 3^2 \cdot 85 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17$

---

[4] EUKLID von Alexandria, griechischer Mathematiker, ca. 365 – 300 v. Chr.; er fasste das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit in seinem Werk "Die Elemente" zusammen; dieses wurde bis in die Neuzeit verwendet und gilt deshalb als das langlebigste Lehrbuch aller Zeiten.

Einige Teilbarkeitsregeln:

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch

- 2 teilbar, wenn sie gerade ist;
- 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Quersumme ("Ziffernsumme") durch 3 bzw. 9 teilbar ist;
- 4 bzw. 25 teilbar, wenn ihr zweistelliges Ende durch 4 oder 25 teilbar ist;
- 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

Beispiele: 4128 ist durch 3 teilbar, weil ihre Quersumme $4 + 1 + 2 + 8 = 15$ durch 3 teilbar ist.
4128 ist nicht durch 9 teilbar, weil dies ihre Quersumme 15 nicht ist.
1275 ist durch 5 teilbar, weil ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.
1275 ist durch 25 teilbar, weil ihr zweistelliges Ende 75 durch 25 teilbar ist.

Verschlüsselung von Nachrichten

Es ist vergleichsweise leicht, große Primzahlen zu finden. Die Zerlegung einer großen natürlichen Zahl in Primfaktoren kann dagegen überaus schwierig sein.

Beispiel:

1583 und 1777 sind zwei kleine Primzahlen, was selbst durch "Probedividieren" mit einem Taschenrechner noch leicht zu bestätigen ist. Dagegen ist die Zerlegung der Zahl 2 812 991 in das Produkt $1583 \cdot 1777$ schon etwas aufwendiger.

1793 1034 2319 5672 2019 2659
2303 4610 2810 6672 3409 5027
1804 2145 3220 6783 3120 3760
3200 4632 4521 7894 4241 0871
2109 3419 2441 ...

???

Genau davon macht man bei der Verschlüsselung von Nachrichten in großen internationalen Datennetzen Gebrauch. Man multipliziert zwei sehr große Primzahlen, jede etwa 100-stellig. Die Rückzerlegung des Produktes in die beiden anfänglichen Primzahlen lässt sich auch mit den heute leistungsfähigsten Computern und den besten verfügbaren Primzahlprogrammen praktisch kaum durchführen. Nach dem **RSA-Verfahren**[5] wird eine Nachricht mit Hilfe des Produktes (= erster, öffentlicher Schlüssel, **"public key"**) kodiert. Die Dekodierung der Nachricht erfolgt mit Hilfe der beiden Primzahlfaktoren des Produktes (zweiter, geheimer Schlüssel, **"private key"**). Man spricht von einem Zwei-Schlüssel-System.

Verwendet man nur *einen* Schlüssel zur Kodierung, so müssen sich der sendende und der empfangende Partner irgendwie über den Schlüssel verständigen, etwa persönlich treffen oder eine sehr vertrauenswürdige Person einschalten. Dagegen braucht bei einem Zwei-Schlüssel-System dem sendenden Partner nur der public key mitgeteilt werden, um den man kein Geheimnis machen muss. Praktisch nur der, der den private key kennt, kann die gesendete Nachricht entschlüsseln. Die Möglichkeit einer solchen "public-key"-Verschlüsselung wurde 1975 erstmals vorgeschlagen und ist heute im RSA-Verfahren am meisten verbreitet. Das RSA-Verfahren bietet auch die Möglichkeit, eine "elektronische Unterschrift" zu leisten, die sicherstellt, dass eine Nachricht wirklich von der Person stammt, von der sie erwartet wird. Auch eine Zugangsprüfung (zu einem Computer, Geldautomat, ...) kann ähnlich erfolgen.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Multipliziert man eine natürliche Zahl mit 1, 2, 3, 4, ..., so erhält man die Vielfachen dieser Zahl. Wir betrachten die Vielfachen der Zahlen 8 und 12:

---

5) Anfangsbuchstaben von Ronald Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman, amerikanische Mathematiker, 1978

Vielfache von 8: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, ...
Vielfache von 12: 12, **24**, 36, **48**, 60, **72**, 84, **96**, ...

Unter den gemeinsamen Vielfachen beider Zahlen: 24, 48, 72, ... ist 24 das *kleinste* gemeinsame Vielfache (kgV). Es findet Anwendung als kleinster gemeinsamer Nenner in der Bruchrechnung. Man ermittelt das kgV zweier oder auch mehrerer Zahlen, indem man diese Zahlen in Primfaktoren zerlegt.

Beispiel 2.14 : Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

a) kgV(8, 12) = ? **b)** kgV(36, 54, 112) = ?

Lösung

Zu **a)** $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$;

Als unterschiedliche Primfaktoren treten in den Zerlegungen 2 und 3 auf; diese schreibt man so oft an, wie sie am häufigsten in *einer* der beiden Zerlegungen vorkommen und multipliziert sie. Der Faktor 2 tritt in der Zerlegung von 8 dreimal auf (in der Zerlegung von 12 nur zweimal); der Faktor 3 tritt in der Zerlegung von 12 einmal auf:

kgV(8, 12) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Zu **b)** $36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$;
$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
$112 = 2 \cdot 56 = 2 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$;

Als unterschiedliche Primfaktoren treten in den Zerlegungen 2, 3 und 7 auf: 2 kommt viermal, 3 kommt dreimal und 7 einmal am häufigsten in *einer* Zerlegung vor:

kgV(36, 54, 112) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024$.

Beim Rechnen wird der Zahlenbereich der natürlichen Zahlen bald zu "eng". Um auch Subtraktionen wie beispielsweise 1 – 4 oder 3 – 7 ausführen zu können, werden die natürlichen Zahlen durch die negativen ganzen Zahlen erweitert. Der dadurch erhaltene Zahlenbereich heißt Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$.

Jede natürliche Zahl ist damit auch eine ganze Zahl, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Die natürlichen Zahlen (abgesehen von 0) werden auch *positive* ganze Zahlen genannt; sie können mit einem "+" -Vorzeichen geschrieben werden: $+3 = 3$. Die negativen Zahlen werden durch ein "–" -Vorzeichen gekennzeichnet. Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ, sie hat daher kein Vorzeichen.

Die beiden Zeichen "+" und "–" (Abb. 2.15) haben somit eine zweifache Bedeutung: Einmal sind sie Operationszeichen (oder Rechenzeichen) als Aufforderung zu addieren oder zu subtrahieren. Zum anderen unterscheiden sie als Vorzeichen positive und negative Zahlen.

Mit positiven und negativen Zahlen kann man ausdrücken, wie weit eine Temperatur, ein Kontostand, eine Höhenangabe u. dgl. über oder unter null liegt.

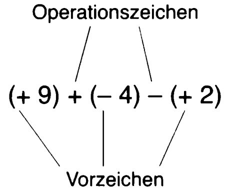


Abb. 2.15 Operations- und Vorzeichen

Ganzzahldivision

Wir führen eine Divisionsaufgabe innerhalb der ganzen Zahlen aus:

19 : 5 = 3 Rest 4.

Der *ganzzahlige* Quotient der Division 19 : 5 ist 3; der dabei entstehende Rest wird in der Form 19 mod 5 geschrieben; also 19 mod 5 = 4. Für den ganzzahligen Anteil einer Zahl x schreibt man int x; also int (19/5) = int 3,8 = 3.

Für den **ganzzahligen Anteil von x** schreibt man **int x** (gesprochen: "integer[5] von x"). Für den **ganzzahligen Rest von x bei der Division durch n** ($x \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$) schreibt man **x mod n** (gesprochen "x modulo n").

Beispiele:

int 1,8 = 1; int $\sqrt{2}$ = 1; int (- 3,1) = - 3; int (- 3,99) = - 3.

5 mod 4 = 1; 23 mod 3 = 2; 12 mod 2 = 0; 3 mod 5 = 3.

Berechnung von x mod m mit Hilfe von int x:

Beispiel: 88 mod 7 = ? 88 : 7 = 12, Rest 4; d. h. $88 = 7 \cdot 12 + 4$ oder $88 = 7 \cdot \text{int}(88/7) + (88 \bmod 7)$. Damit: $88 \bmod 7 = 88 - 7 \cdot \text{int}(88/7)$ oder allgemein:

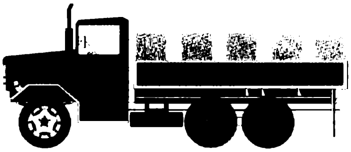
$$\boxed{x \bmod n = x - n \cdot \text{int}(x/n)}$$

Beispiel 2.15 : Ganzzahldivision

a) Ein LKW kann pro Fahrt 5 t eines Gutes befördern. Es sind insgesamt 19 t zu befördern. Wie oft kann der LKW vollbeladen fahren?
Wie viel befördert er bei der letzten Fahrt, wenn er vorher stets vollbeladen fuhr?

b) Ein Schüler sagt: Ich bin 6000 Tage alt. Wie viele Jahre und Tage sind dies? (Von Schaltjahren wird abgesehen).

Lösung



Zu **a)**

Anzahl der "vollen" Fahrten: int (19/5) = 3, Restladung bei der letzten Fahrt: 19 mod 5 = 4; d. h. 4 t.

Zu **b)**

1 Jahr = 365 Tage; Anzahl der "vollen" Jahre: int (6000/365) = 16;
Resttage: $6000 \bmod 365 = 6000 - 365 \cdot \text{int}(6000/365) = 160$.

Anmerkung: In **a)** ist die Umrechnungszahl (= der Modul) 5, in **b)** 365.

---

[5] integer (engl.), ganze Zahl; aus lat. integer = ganz

Auf welchen Wochentag fällt mein Geburtstag?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns ein wenig mit dem Kalender beschäftigen. Dieser ist aus dem Julianischen Kalender (seit 46 v. Chr.), der auf Julius Cäsar zurückgeht, hervorgegangen. Danach besitzt das Jahr 365 Tage, jedes durch 4 teilbare Jahr erhält einen zusätzlichen Schalttag. Da das nach diesem Kalender eingeteilte Jahr etwas zu lang ist, wurde von Papst Gregor XIII. ein neuer Kalender, der noch heute geltende *Gregorianische Kalender* eingeführt. Dabei folgte auf Donnerstag, den 4. Oktober 1582, unmittelbar Freitag, der 15. Oktober 1582. Nach diesem Kalender entfällt der Schalttag bei jedem vollen Jahrhundert, das nicht durch 400 teilbar ist. Beispielsweise ist das Jahr 1900 kein Schaltjahr, während das Jahr 2000 ein Schaltjahr bleibt. Damit beträgt die Länge eines Jahres im Mittel

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365{,}2425 \text{ Tage, was nur noch um } 0{,}0003 \text{ Tage zu lang ist.}$$

Wochentagsformel: $w = [a + \text{int}(a/4) - \text{int}(a/100) + \text{int}(a/400) + d] \bmod 7$,

wobei a die Jahreszahl des *Vorjahres* und d die Anzahl der Tage im gefragten Jahr (der gewünschte Tag mitgezählt) seit Jahresbeginn sind. Die Werte von w bedeuten:

$0 \leftrightarrow$ So, $1 \leftrightarrow$ Mo, $2 \leftrightarrow$ Di, $3 \leftrightarrow$ Mi, $4 \leftrightarrow$ Do, $5 \leftrightarrow$ Fr, $6 \leftrightarrow$ Sa.

Beispiel: 1. März 1984; $a = 1983$, $d = 31 + 29 + 1 = 61$ (29, weil 1984 ein Schaltjahr ist),

$[1983 + 495 - 19 + 4 + 61] \bmod 7 = 2524 \bmod 7 = 2524 - 7 \cdot \text{int}(2524/7) = 4$, also Donnerstag!

Die Formel gilt seit dem 15. Oktober 1582.

2.3.2 Die rationalen Zahlen (oder die Zahlen für das Messen)

Zollstab, Thermometer, Uhr und Preissteigerungen zeigen, dass wir mit den ganzen Zahlen nicht auskommen; wir brauchen *zusätzlich* Zahlen dazwischen, wenn wir auch von einem viertel Meter, eineinhalb Stunden, von 38,5° Fieber oder einer Steigerung um 12% = 0,12 sprechen möchten.

Dividiert man zwei ganze Zahlen, so muss das Ergebnis, der Quotient, nicht mehr ganzzahlig sein; wir können den Quotienten jedoch als **Bruch**, im Besonderen beim praktischen Rechnen auch als "Kommazahl" schreiben:

$$3 : 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Dies führt dazu, die ganzen Zahlen auf die Brüche a/b zu erweitern, wobei a und b ganze Zahlen sind ($b \neq 0$). Dieser neue **Zahlenbereich aller Brüche** heißt Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ (ratio, lat. Verhältnis). Der Buchstabe $\mathbb{Q}$ erinnert an das Wort Quotient. Beispiele: $\frac{3}{4}, \frac{+12}{-3}$.

Die Zahl über dem Bruchstrich heißt **Zähler**, jene unter dem Bruchstrich **Nenner**. Vertauscht man Zähler und Nenner eines Bruches, so erhält man den **Kehrwert** oder **reziproken Wert** dieses Bruches. $\frac{2}{7}$ ist der Kehrwert von $\frac{7}{2}$, $\frac{1}{4}$ jener von 4.

Jede ganze Zahl kann als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden und ist deshalb eine rationale Zahl: $5 = \frac{5}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$, $-4 = \frac{-4}{1}$. Daher: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Eine **Dezimalzahl** oder "Kommazahl" ist nichts weiter als eine abgekürzte Schreibweise für eine Summe von Zehnerbrüchen (Brüchen mit den besonderen Nennern 1, 10, 100, 1000, usw.). *Beispiel*: $31{,}75 = \frac{31}{1} + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$.

Beispiel 2.16 : Umwandlung eines Bruches in eine Dezimalzahl

Wandle in eine Dezimalzahl um:

a) $\frac{3}{16}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{5}{27}$ **d)** $\frac{7}{22}$

Lösung

Fortgesetzte Division durch den Nenner führt zu einer Dezimalzahl, wobei die Division entweder aufgeht oder nicht.

Zu **a)** $\frac{3}{16} = 3 : 16 = 0{,}1875$.

Das Ergebnis ist eine **endliche** Dezimalzahl. Dies ist immer dann der Fall, wenn in der Primfaktorenzerlegung des Nenners nur die Zahlen 2 oder 5 vorkommen.

Zu **b)** $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}33\ldots = 0{,}\dot{3}$

Zu **c)** $\frac{5}{27} = 5 : 27 = 0{,}185185185\ldots = 0{,}\overline{185}$

Zu **d)** $\frac{7}{22} = 0{,}31818\ldots = 0{,}3\overline{18}$

Die Division kann beliebig lange fortgesetzt werden; jedoch müssen sich schließlich die Reste wiederholen, da ein Rest immer kleiner als der Nenner ist. Daher kehrt in der Dezimalzahl eine Ziffer oder eine Ziffernfolge stets wieder. Dies kennzeichnet man durch einen Punkt oder durch Überstreichen. Wir erhalten eine **unendliche periodische** Dezimalzahl.

2.3.3 Die reellen Zahlen

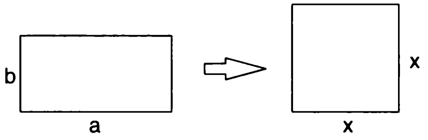


Abb. 2.16 Quadratseite und irrationale Zahlen

Problem: Es soll ein Rechteck mit den Seiten $a = 2$ cm und $b = 1$ cm in ein flächengleiches Quadrat umgewandelt werden (Abb. 2.16). Wie groß ist die Länge x der Quadratseite? Der Flächeninhalt des Rechteckes ist 2 cm^2; aus $x^2 = 2$ cm^2 folgt $x = \sqrt{2}$ cm.

Es kann gezeigt werden, dass $\sqrt{2}$ einer neuen Zahlenart angehört. $\sqrt{2}$ kann nicht mehr als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden und ist damit keine rationale Zahl! Eine solche Zahl heißt eine **irrationale Zahl**. Weitere Beispiele solcher neuer Zahlen sind $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, π, usw.

Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen, "mehr" als die ebenfalls unendlich vielen rationalen Zahlen. Anwendung finden die reellen Zahlen besonders bei den grundlegenden mathematischen Funktionen (Kreisfunktionen, Exponentialfunktionen u.a.).

Beim Lösen beliebiger Probleme der Praxis nähert man man irrationale Zahlen durch abbrechende Dezimalzahlen. Beispiel: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots \approx 1{,}414$.

Die unendlichen *nichtperiodischen* Dezimalzahlen sind gerade die irrationalen Zahlen. Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. So können wir schließlich schreiben:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Abb. 2.17 zeigt die Beziehungen zwischen den Zahlenarten.

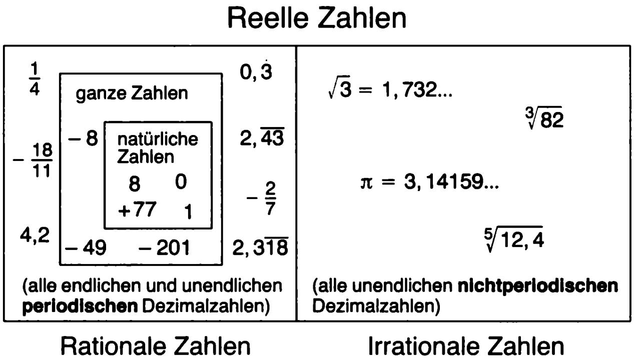


Abb. 2.17 Beziehungen zwischen den Zahlenarten

(Physikalische) Größe

Messergebnisse in Physik und Technik sind Produkte aus einem *Zahlenwert,* auch *Maßzahl* genannt, und einer *Einheit*:

z.B.: 4,2 m = 4,2 · 1 m. Der Zahlenwert 4,2 gibt an, wie oft die Einheit 1 m in 4,2 m enthalten ist.

Derartige Produkte heißen **Größen.** Somit:

4,2 m	=	4,2	·	1 m
Größe	=	**Zahlenwert**	·	**Einheit**

Im Überblick: Zahlenarten ●

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}$ ... Menge der natürlichen Zahlen, der natürlichen Zahlen ohne Null, der ganzen Zahlen

Summand + Summand = Summe; Minuend – Subtrahend = Differenz;
Faktor · Faktor = Produkt; Dividend : Divisor = Quotient; Potenz = $\text{Basis}^{\text{Exponent}}$

Primzahl: eine natürliche Zahl ($\geqslant 2$), die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist; es gibt unendlich viele Primzahlen.

Primfaktorenzerlegung: Jede natürliche Zahl (> 1) ist entweder selbst eine Primzahl oder lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.

int x: ganzzahliger Anteil von x
x mod m ($x \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$): ganzzahliger Rest von x bei der Division durch m;

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$: alle Bruchzahlen mit ganzzahligem Zähler und Nenner; oder alle endlichen sowie unendlichen periodischen Dezimalzahlen

Irrationale Zahlen: alle unendlichen nichtperiodischen Dezimalzahlen

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$: alle rationalen sowie irrationalen Zahlen

Physikalische Größe = Zahlenwert · Einheit

Historisches

Bereits in frühgeschichtlicher Zeit entstand beim mengenmäßigen Vergleichen von Gegenständen der Begriff der **natürlichen Zahl**. Zum Merken und zur Verständigung entwickelten sich besondere Zahlwörter (eins, zwei, drei, ...) und Ziffern.

Babylonier und Ägypter rechneten seit 2000 v. Chr. schon mit einfachen **Brüchen**. Die Griechen (Schule des Pythagoras) stießen einige Jahrhunderte v. Chr., noch geometrisch eingekleidet, auf **irrationale Zahlen**. Die römische Zahlenschreibweise verwendet die 7 Ziffern I, X, C, M sowie V, L und D, die durch einfaches Aneinanderfügen von möglichst wenigen dieser Zeichen eine Zahl aufbauen. Die Römer kannten kein Zeichen für "nichts" oder "null".

Unser heute benütztes Zahlensystem geht auf die Inder zurück, bei denen das Zehnersystem ab 600 n. Chr. belegt ist. Die Inder führten etwa 200 Jahre später auch die **Null** ein. Dass wir von arabischen Ziffern und nicht von indischen sprechen, kommt daher, dass die Araber dieses neue Zahlensystem etwa ab dem 10. Jh. nach Europa brachten, wo es sich langsam gegen das römische Zahlensystem durchsetzte.

Auch die **negativen Zahlen** wurden zuerst von den Indern systematisch eingesetzt, um Guthaben und Schuld auszudrücken. Die europäischen Mathematiker begannen erst im 17. Jh. negative Zahlen, teilweise noch gegen den entschiedenen Widerstand mancher Berufskollegen, ausdrücklich zu verwenden.

Aufgaben

2.30 Zerlege folgende Zahlen in das Produkt ihrer Primfaktoren

a) 26 **b)** 175 **c)** 216 **d)** 252 **e)** 880
f) 882 **g)** 1024 **h)** 4000 **i)** 4641 **j)** 3403

2.31 Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von

a) 12, 28 **b)** 13, 52 **c)** 18, 72 **d)** 21, 84, 189
e) 24, 56, 168 **f)** 2, 3, 4, 5, 6 **g)** 12, 18, 60 **h)** 35, 49, 567

2.32 Zwei Personen mit Schrittlängen von 65 cm bzw. 75 cm beginnen im gleichen Schritt zu gehen. In welchen Abständen wiederholt sich ein Gleichschritt?

2.33 Die größte natürliche Zahl, durch die zwei oder mehrere natürliche Zahlen ohne Rest teilbar sind, heißt ihr *größter gemeinsamer Teiler*, kurz ggT. Da beispielsweise 6 die größte natürliche Zahl ist, durch die sowohl 12 wie auch 18 ohne Rest teilbar sind, ist ggT (12, 18) = 6. Ermittle den größten gemeinsamen Teiler folgender natürlicher Zahlen:

a) 12, 16 **b)** 18, 24 **c)** 36, 72 **d)** 45, 54 **e)** 48, 90

2.34 Schreibe als Potenz mit der Grundzahl 10 ("Zehnerpotenz"):

a) 100 **b)** 1000 **c)** 10 000 **d)** 1 000 000 **e)** 100 000 000

2.35 Schreibe als Potenz mit der Grundzahl 2: **a)** 4 **b)** 64 **c)** 512 **d)** 1024 **e)** 4096

2.36 Ein dünnes Blatt Papier wird jedesmal in der Mitte insgesamt 8-mal gefaltet.
Wie viele Papierlagen liegen schließlich aufeinander?

2.37 Berechne **a)** 4 mod 2 **b)** 5 mod 2 **c)** 8 mod 5 **d)** 40 mod 7 **e)** 40 mod 8

2.38 Wie viele Stunden und Minuten sind 1000 Minuten?

2.39 Zahlen werden ausgedruckt: 8 Zahlen je Zeile und 60 Zeilen je Seite. Wie viele Seiten müssen für den Ausdruck von 3000 Zahlen vorgesehen werden? Wie viele Zeilen werden auf der letzten Seite gedruckt und wie viele Werte stehen in der letzten Zeile?

2.40 Was ergibt **a)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ **c)** $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$ **d)** $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$ **e)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ **f)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$

2.41 Schreibe als Dezimalzahl:

a) $\frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{11}{16}$ **b)** $-\frac{5}{9}, -\frac{1}{60}, \frac{11}{12}$ **c)** $\frac{112}{99}, \frac{5}{12}, \frac{4}{11}$
d) $\frac{4}{27}, \frac{5}{24}, \frac{7}{18}$ **e)** $\frac{3}{7}, \frac{3}{44}, \frac{5}{28}$ **f)** $\frac{5}{7}, \frac{10}{31}, \frac{3}{17}$

2.4 Die Zahlengerade

Die (reellen) Zahlen können als Punkte auf der **Zahlengeraden** (Abb. 2.18) veranschaulicht werden.

Dazu wählt man auf einer Geraden einen Nullpunkt O und einen Einspunkt E, welche die Zahl 0 bzw. 1 darstellen; eine beliebige Zahl, beispielsweise 3, wird als Punkt mit dem Abstand $3 \cdot \overline{OE}$ dargestellt. Positive Zahlen liegen rechts, negative links vom Nullpunkt O.

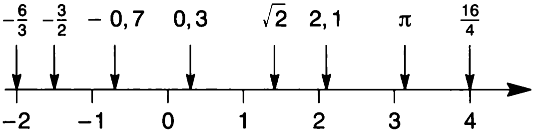


Abb. 2.18 Die Zahlengerade

In diesem Sinne sagt man, eine Zahl "liegt" auf einer Zahlengerade. Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade *lückenlos* aus. Die Durchlaufrichtung wird durch eine Pfeilspitze auf der Seite der positiven Zahlen gekennzeichnet. Die Zahlengerade wird häufig waagrecht gezeichnet, sie kann aber auch (beispielsweise als Achse eines Koordinatensystems) senkrecht oder in einer anderen Richtung verlaufen.

Auf der (waagrechten) Zahlengeraden liegt die größere von zwei Zahlen stets rechts von der kleineren. So ist $-2 < -1$ oder $-1000 < 0$. Je weiter links eine Zahl liegt, desto kleiner ist sie.

Betrag einer Zahl ("Abstand von 0")

Die beiden Zahlen + 3 und – 3 (Abb. 2.19) haben den gleichem Abstand vom Nullpunkt der Zahlengeraden. Dieser hat den Abstand 3 und heißt **Betrag** der beiden Zahlen. Man kennzeichnet den Betrag einer Zahl, indem man diese zwischen zwei senkrechte Striche setzt. So schreibt man:

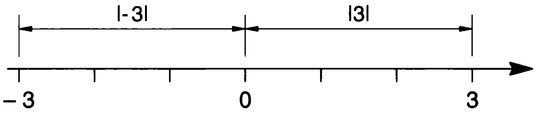


Abb. 2.19 Gleicher Abstand von 0

$$|-3| = |+3| = 3$$

Man erhält also den Betrag einer Zahl durch Weglassen des Vorzeichens. Er ist somit stets positiv oder gleich 0.

Weiß man, dass eine Zahl a positiv oder gleich 0 ist, so ist $|a|$ einfach wieder gleich a:

$$|+3| = 3; \quad |4| = 4; \quad |0| = 0$$

Ist a dagegen negativ, so erhalten wir den Betrag von a, wenn wir vor die Zahl a ein Minuszeichen setzen:

$$|-3| = -(-3) = 3$$

Somit lautet die allgemeine Definition, welche auf diese Fälle eingehen muss:

Unter dem Betrag $|a|$ einer (reellen) Zahl versteht man

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Statt "Betrag" ist auch "Absolutbetrag" gebräuchlich. $|a|$ wird "Betrag von a" oder "absolut a" gesprochen.

Beispiel 2.17 : Betrag einer Zahl, Abstand zweier Zahlen

a) $|1{,}88| = 1{,}88$; $|-2{,}3| = 2{,}3$; $|\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$; $|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$.

b) $|-5| - |-2| = 5 - 2 = 3$.

c) Für alle Zahlen gilt: $|-a| = |a|$.

d) Der Betrag der Differenz zweier Zahlen a und b ist der **Abstand** dieser Zahlen auf der Zahlengeraden.
$|6 - 2{,}5| = |3{,}5| = 3{,}5$; $|2 - (-2)| = 4$.

e) Sind a und b zwei Zahlen, so gilt: $|a - b| = |b - a|$.
Dies folgt aus c).

Beispiel 2.18 : Rechnen mit Beträgen

Vereinfache $2a + |a|$ unter der Voraussetzung, dass **a)** a positiv ist; **b)** a negativ ist.

Lösung

Zu **a)** Ist a positiv, so gilt $|a| = a$ und somit folgt $2a + |a| = 3a$.

Zu **b)** Ist a negativ, so gilt $|a| = -a$ und es folgt nun $2a + |a| = 2a - a = a$.
Setze beispielsweise $a = -3$ und rechne nach!

Intervalle

Häufig interessiert man sich für einen durchgehenden Abschnitt auf der Zahlengeraden zwischen zwei Zahlen a und b. Ein solcher durchgehender Abschnitt wird **Intervall** genannt.

Intervalle spielen schon im täglichen Leben eine Rolle. Die Wettervorhersage spricht von Temperaturen zwischen 15°C und 20°C. Liefertermine (z.B. 33. Kalenderwoche), Wartezeiten und dergleichen werden in Form von Zeitintervallen angegeben.

Intervalle werden unter Verwendung von eckigen Klammern geschrieben. Es ergeben sich unterschiedliche Intervalle, je nach dem, ob die Randpunkte a, b noch dazugehören oder nicht. Sind beispielsweise die Randpunkte $a = 1$ und $b = 4$, so schreibt man (Abb. 2.20):

$[1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$
abgeschlossenes Intervall von 1 bis 4

$]1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
offenes Intervall von 1 bis 4

$]1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 4\}$
links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall von 1 bis 4

$[1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 4\}$
links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall von 1 bis 4

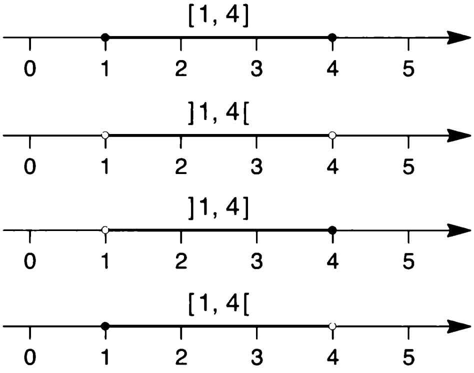


Abb. 2.20 (Endliche) Intervalle

Beachte genau die Stellung der eckigen Klammern! Beim Zeichnen der Intervalle wird ein Randpunkt, der zum Intervall gehört, durch einen kleinen "vollen" Kreis dargestellt; gehört er nicht zum Intervall, so wird er als kleiner "leerer" Kreis gezeichnet.

Die Intervallschreibweise wird auch verwendet, wenn sich ein Intervall auf einer Seite oder sogar auf beiden Seiten ins "Unendliche" erstreckt, die Intervalle also nicht mehr endlich sind. So bedeutet etwa (Abb. 2.21):

$x \in [1, \infty[$, dass $x \geqslant 1$;

$x \in]-\infty, 4[$, dass $x < 4$;
usw.

Beim Zeichen ∞ oder $-\infty$ zeigt die eckige Klammer immer "offen" an!

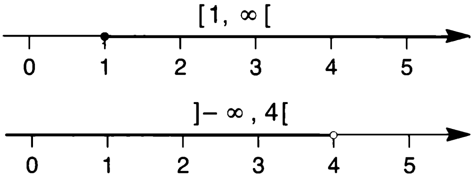


Abb. 2.21 Unendliche Intervalle

> ∞ oder $-\infty$ bezeichnen *keine* Zahlen; daher kann mit ihnen auch nicht gerechnet werden. ∞ steht für die Formulierung "über alle Grenzen". Entsprechendes gilt für $-\infty$.

Beispiel 2.19 : Intervalle

Kennzeichne die folgenden Intervalle auf der Zahlengeraden:

a) $[0, 3]$ **b)** $[-2, 1[$ **c)** $]1, 3[$ **d)** $]2, \infty[$ **e)** $[0, 1] \cup [3, 5[$

Lösung

Zu **a)**

Zu **b)**

Zu **c)**

Zu **d)**

Zu **e)**

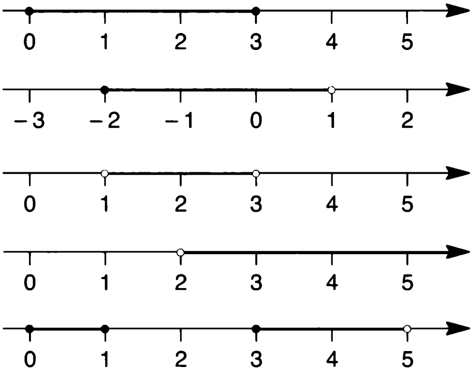


Abb. 2.22 Zu Beispiel 2.19

Achtung!

Die Mengenklammern und die Intervallklammern dürfen nicht verwechselt werden: so enthält die Menge $\{0, 3\}$ nur die beiden ganzen Zahlen 0 und 3; dagegen enthält $[0, 3]$ *alle* reellen Zahlen zwischen 0 und 3 (samt diesen beiden), also beispielsweise auch die Zahlen 1, $\frac{2}{3}$ oder 1,6.

Anmerkung:

In der mathematischen Literatur wird ein offenes Intervall auch durch eine runde oder spitze Klammer bezeichnet. Also beispielsweise (a, b) oder $<a, b>$ für $]a, b[$.

Im Überblick: Endliche und unendliche Intervalle ●

Intervall (a < b)	Mengenschreibweise	Bezeichnung
[a, b]	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
]a, b[	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
]a, b]	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall
[a, b[	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall
[a, ∞[	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$	links abgeschlossenes unendliches Intervall
]a, ∞[	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$	links offenes unendliches Intervall
]− ∞, b]	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$	rechts abgeschlossenes unendliches Intervall
]− ∞, b[	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$	rechts offenes unendliches Intervall
]− ∞, ∞[	$\mathbb{R}$	Zahlengerade

Aufgaben

2.42 Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach unter Verwendung des < -Zeichens, also aufsteigend:

a) 0, − 4 **b)** − 2, − 5 **c)** 14, − 2, 0, − 1 **d)** − 2, − 3, 1, 0

$-4<0$ $-5<-2$ $-2<-1<0<14$ $-3<-2<0<1$

2.43 Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach unter Verwendung des > -Zeichens, also absteigend:

a) − 1, 0 **b)** − 1, − 2 **c)** − 3, 0, − 4, 1 **d)** 4, − 4, 3, − 3

2.44 Gib die Menge jener Zahlen in Intervallschreibweise an, die

a) größer als − 1 sind;]-1; ∞[**b)** mindestens gleich 0 sind; [0; ∞[

c) höchstens 0 sind;]-∞; 0] **d)** größer als − 2 und höchstens gleich 4 sind.]-2; 4

2.45 Berechne:

a) $|-4| + |4|$ 8 **b)** $|-2| + |-1|$ 3 **c)** $4 - |-3|$ 1 **d)** $|-3| - 4$ -1

e) $||-3| - 4|$ 1 **f)** $||-2| + |-1||$ 3 **g)** $|-3| \cdot |+2|$ 6 **h)** $|-3 \cdot |+2||$ 6

2 1 3 2 2

2.46 Wahr oder falsch?

a) $2 = |-2|$ Wahr **b)** $2 > |-5|$ Falsch **c)** $|3| > |-100|$ Falsch **d)** $|-3| = |3|$ Wahr.

e) $|-5| < |0|$ Falsch. **f)** $|2| \geq |-2|$ Wahr **g)** $|a| = |-a|$ Wahr **h)** $-|-a| = |a|$ Falsch

2.47 Finde einen Wert für a bzw. für b, für die die folgenden Behauptungen falsch sind:

a) $|a| = a$ **b)** $|-a| = -|a|$ **c)** $|a + b| = |a| + |b|$ **d)** $|a - b| = |a| - |b|$

2.48 Schreibe die folgenden Mengen in der Intervallschreibweise und kennzeichne sie auf der Zahlengeraden:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ **c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ **f)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

2.49 Was ergibt

a) $[0, 2] \cup [1, 3[$ **b)** $[0, 2] \cup]2, 3[$ **c)** $[0, 2] \cap [1, 3[$ **d)** $[0, 2] \cap]2, 3[$
e) $[1, 5] \cup]1, 3[$ **f)** $[1, 5] \cap]1, 3[$ **g)** $[-2, 0[\cup]-1, 3]$ **h)** $[-2, 0] \cup [0, 3]$

2.50 Lies die durch den Pfeil markierte Zahl ab (Abb. 2.20 und Abb. 2.21):

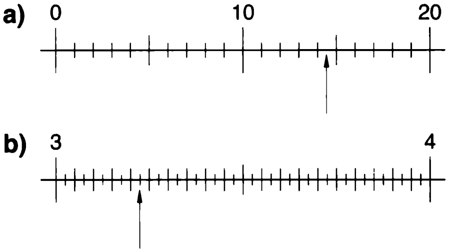


Abb. 2.23

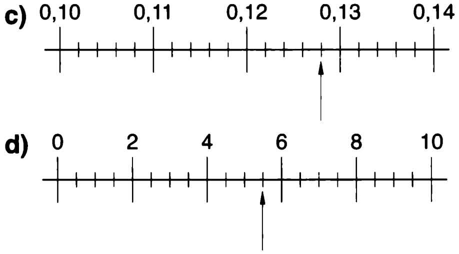


Abb. 2.24

2.5 Variable und Terme

Viele mathematische Sachverhalte gelten nicht nur für bestimmte Zahlen, sondern sind allgemein gültig. So kann man etwa die Multiplikation von 3 und 4 in der Form $3 \cdot 4$ oder $4 \cdot 3$ führen. Allgemein drückt man dies mit Hilfe von Buchstaben aus: $a \cdot b = b \cdot a$, wobei a und b für beliebige Zahlen stehen, gewissermaßen "allgemeine" Zahlen sind. Derartige Buchstaben heißen, weil sie für unterschiedliche Zahlen oder auch Größen stehen, **Variablen**.

Zur Bezeichnung von Variablen sind statt Buchstaben durchaus auch andere Symbole (Zeichen) möglich; so könnte man statt $a \cdot b = b \cdot a$ auch schreiben: □ · ○ = ○ · □. Natürlich sind Buchstaben praktischer.

Für jede Variable sind, sofern dies nicht aus dem Zusammenhang hervorgeht, jene Zahlen oder Größen anzugeben, die für sie eingesetzt werden dürfen.

> Eine **Variable** ist ein **Zeichen**, das stellvertretend für Zahlen oder Größen steht, die in einem bestimmten Ausmaß frei wählbar sind.
>
> Eine Zahl, eine Variable oder deren sinnvolle Verknüpfung mit Rechenzeichen ("+", "·", Klammern, ...) heißt **Term** (oder mathematischer Ausdruck).

Ersetzt man in einem Term die Variable(n) durch Zahlen (Größen), dann geht der Term in eine Zahl (Größe) über.

Beispiele von Termen: 4, $5 - 2$, a, $4 \cdot x$, $x \cdot y$, $\frac{a-2}{b+1}$, $(a - b)^2$, $\sqrt{v}$, ...

Der Multiplikationspunkt darf zwischen Variablen sowie zwischen Variablen und Zahlen weggelassen werden ($x \cdot y = x y$; $4 \cdot x = 4x$).

Zahlen, die in einem Term als Faktoren bei einer Variablen stehen, heißen **Koeffizienten**.

Beispiele:

$3a$	3 ist Koeffizient von 3a;
$1b$	der Koeffizient 1 wird stets weggelassen: $1b = b$ ("unsichtbarer Einser");
$-x^2 + 2xy$	-1 und 2 sind die Koeffizienten von $-x^2$ bzw. $2xy$.

Zahlen wie 7, 842, −4, die Kreiszahl π, werden öfters auch als **Konstante** bezeichnet. Keine Terme sind beispielsweise die Ausdrücke $a < 4$, $3 \cdot x = 12$ oder $1 : 0$.

Wichtige Terme:

Bezeichnung	Beispiele
Monom: Eingliedriger Term; eine Konstante oder ein Produkt einer Konstanten mit einer oder mehreren Variablen.	-4; $5x^2$; $-2xy^4$; $-ab^2c$; ...
Binom: Zweigliedriger Term.	$a+b$, $4x-3$; $7x+0{,}3y$; $3x^2+y^3$; ...
Polynom: Zwei- oder mehrgliedriger Term; als Hochzahlen der Variablen dürfen nur natürliche Zahlen auftreten und keine Variable darf im Nenner stehen.	$3x+1$; $5x^2-7x+2$; $-4x^2y+4y$; $xy^3+2yz-0{,}1z^2$; ... Kein Polynom in diesem Sinne ist beispielsweise: $x+3y^2+2\sqrt{xy}$ oder $\frac{7}{x}+2x$.
Speziell: **Polynom in einer Variablen**: hier wird meist nach "fallenden" Potenzen der Variablen geordnet. **Grad** des Polynoms: größte auftretende Hochzahl der Variablen.	x^4-3x^3+7x+1 (Grad: 4); $3x^7-x$ (Grad: 7); $-3t^3+0{,}5t^2+2$ (Grad: 3); ...
Rationaler Term: Auf die Variablen werden ausschließlich die rationalen Rechnungsarten (das sind die vier Grundrechnungsarten) angewendet.	$3x+1$; $5x^2-7x+2$; $xy^3+2yz-0{,}1z^2$; $\frac{7}{x}+2x$; $\frac{x^2+y-3}{x+y}$; ... Nicht jedoch beispielsweise: $x+3y^2+2\sqrt{xy}$.

Beispiel 2.20 : Einsetzen bei Termen

Welchen Zahlenwert nehmen die folgenden Terme für $x = 2$, $y = 3$ und $a = 5$ an?

a) $2x-y$ **b)** $\frac{3a}{x+y}$ **c)** $(x+a)^3$ **d)** x^2+x+1

Lösung

Zu **a)** $2 \cdot 2 - 3 = 1$; zu **b)** $\frac{3 \cdot 5}{2+3} = 3$; zu **c)** $(2+5)^3 = 343$; zu **d)** $2^2+2+1 = 7$.

Anmerkungen:

(1) Einige Buchstaben werden bevorzugt für bestimmte Zahlenarten verwendet. So bezeichnen etwa n, i oder k häufig natürliche oder ganze Zahlen. Dagegen sind x oder y "neutrale" Bezeichnungen.

(2) Vereinfachend ist beispielsweise die Sprechweise "eine natürliche *Zahl* n" oder auch "n = 3" üblich. Dies ist so zu verstehen, dass die Variable n für eine natürliche Zahl steht bzw. für n die Zahl 3 eingesetzt wird.

Beispiel 2.21 : Umsetzen in die mathematische Schreibweise

x ist eine beliebige (positive) Zahl. Wie lautet der Term für

a) die gegenüber x um 1 verringerte Zahl; **b)** das Dreifache von x;
c) die dritte Potenz von x; **d)** die Quadratwurzel von x;
e) den Kehrwert des Quadrates von x; **f)** das um 1 vermehrte Doppelte von x?

Lösung

Zu **a)** $x-1$; zu **b)** $3 \cdot x$; zu **c)** x^3; zu **d)** $\sqrt{x}$; zu **e)** $\frac{1}{x^2}$; zu **f)** $2x+1$.

Indizierte Variable

Gleichartige Größen (etwa mehrere Längen oder mehrere elektrische Widerstände) werden in der Regel durch denselben Buchstaben bezeichnet, dem jedoch noch eine tiefgestellte Nummer, ein **Index** (Mehrzahl: *Indizes*), beigefügt wird.

Beispiele: Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$
mechanische Kräfte $F_1, F_2, F_3, \ldots$
elektrische Widerstände $R_1, R_2, R_3, \ldots$

Durch den Index ist in einfacher Weise zum Ausdruck gebracht, dass etwa die Widerstände $R_1, R_2, R_3, \ldots$ trotz des gleichen Buchstabens *verschiedene* Variable sind. Man spricht von **indizierten Variablen**. Durch die Indizes liegt zugleich eine Nummerierung vor: Es gibt einen ersten, zweiten, dritten, ... Wert.

Das Summenzeichen Σ

Die häufig vorkommende Addition von indizierten Variablen wird kurz und übersichtlich, wenn man *beispielsweise* folgende Schreibvereinbarung trifft:

Statt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ schreibt man $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i$

gelesen: "Summe aller x_i von i = 1 bis i = 5." Das Σ-Zeichen (Sigma, griechischer Buchstabe für S wie Summe) fordert also zu einer Summenbildung bei indizierten Variablen auf, deren Index i aufeinander folgend die Werte 1 bis 5 annimmt. Welcher Buchstabe für den Index gewählt wird, ist ohne Bedeutung:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{k=1}^{5} x_k = \sum_{n=1}^{5} x_n$$

Beispiel 2.22 : Summenbildung mit dem Σ-Zeichen

a) $\sum\limits_{i=2}^{6} l_i = l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$

b) $M = \sum\limits_{j=1}^{3} F_j \cdot a_j = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3$

(Moment M von Kräften F_j mit den Normalabständen a_j, wobei j = 1, 2, 3)

c) $\frac{1}{R} = \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$

(Formel für den Ersatzwiderstand R bei Parallelschaltung von 4 elektrischen Widerständen)

Arithmetisches Mittel

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ n Zahlen oder Größen, so heißt

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

arithmetisches Mittel $\bar{x}$ (sprich: x quer) von x_i, i = 1, 2, 3, ..., n.

Beispiel 2.23 : Arithmetisches Mittel

Berechne das arithmetische Mittel $\bar{x}$ von **a)** 4 und 7 **b)** 3, 5, 5, 2, 0, – 3

Lösung

Zu **a)** $\bar{x} = \frac{4+7}{2} = 5{,}5$; zu **b)** $\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot (3 + 5 + 5 + 2 + 0 + (-3)) = 2$.

Im Überblick: Variable und Terme

Variable: Zeichen, das stellvertretend für Zahlen oder Größen steht.

Term: Zahl, Variable oder deren sinnvolle Verknüpfung mit Rechenzeichen; geht beim Einsetzen von Zahlen oder Größen für die Variable(n) in eine Zahl oder Größe über.

Koeffizient: Zahl (Größe), die als Faktor bei einer Variablen steht.

Monom: eingliedriger Term; **Binom**: zweigliedriger Term

Polynom: zwei- oder mehrgliedriger Term; als Hochzahlen der Variablen dürfen nur natürliche Zahlen auftreten und keine Variable darf im Nenner stehen.

Summenbildung bei **indizierten Variablen**: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Aufgaben

2.51 Ermittle den Wert der folgenden Terme für $x = 3$, $y = 1$ und $z = 4$:

a) $2x - 3y$ **b)** $\frac{x+y}{z}$ **c)** $2 \cdot \frac{z-3y}{x}$ **d)** $\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y}$

e) $\frac{x}{y} - \frac{z+2y}{x}$ **f)** $x^2 + y^2 + z^2$ **g)** $\sqrt{x^2 + z^2}$ **h)** $(x \cdot \sqrt{z} - y)^2$

2.52 Wahr oder falsch? Wenn n eine ganze Zahl ist, ist
a) $2n$ eine gerade Zahl; **b)** $2n - 1$ eine ungerade Zahl; **c)** $2n + 1$ eine ungerade Zahl.

2.53 x ist eine beliebige Zahl. Wie schreibt man

a) die gegenüber x um 2 vergrößerte Zahl;
b) die Hälfte von x;
c) der Kehrwert der Wurzel von x;
d) das Produkt von x mit der gegenüber x um 2 verringerten Zahl?

2.54 x und y sind zwei beliebige Zahlen. Wie schreibt man

a) die Summe von x und y; **b)** das Dreifache der Summe von x und y;
c) den Betrag der Differenz von x und y; **d)** das Quadrat der Differenz von x und y;
e) die Quadratwurzel aus dem Produkt von x und y ?

2.55 Vereinfache unter der Voraussetzung, dass a positiv ist:

a) $|a| - a$ **b)** $a - |a|$ **c)** $|a| + a$

2.56 Berechne die folgenden Summen, wenn $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, $a_4 = 2$ und $a_5 = -2$ ist:

a) $\sum_{i=1}^{3} a_i$ **b)** $\sum_{k=3}^{5} a_k$ **c)** $\sum_{n=1}^{5} a_n$ **d)** $\sum_{j=1}^{5} a_j$

2.57 Berechne die folgenden Summen, wenn $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, $a_4 = 2$:

a) $\sum_{i=1}^{4} a_i$ **b)** $\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot a_i$ **c)** $\sum_{i=1}^{4} (a_i + 1)$ **d)** $\sum_{i=1}^{4} a_i^2$

2.58 Schreibe die folgenden Summen mit dem Summenzeichen:

a) $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ **b)** $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4$

c) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ **d)** $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

e) $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ **f)** $2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^4$

2.59 Schreibe mit Hilfe des Summenzeichens

a) die Summe, **b)** die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 5.

2.60 Berechne das arithmetische Mittel der folgenden Größen:

a) 2; 5; 2; 4; 1 **b)** 169 cm; 166 cm; 170 cm; 161 cm; 175 cm; 172 cm

c) 14°C; 18°C; 15°C; 14°C; 16°C **d)** 2,1 g; 5,5 g; 3,7 g; 0,0 g; 2,9 g; 4,3 g; 2,6 g

2.61 Außer dem arithmetischen Mittel verwendet man noch weitere Mittelwerte. Sind a und b zwei (positive) Zahlen, so kann man mit diesen

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{und} \quad g = \sqrt{a \cdot b}$$

bilden. h heißt harmonisches Mittel, g heißt geometrisches Mittel von a und b. Berechne diese Mittelwerte für die folgenden Zahlen: **a)** 1, 100 **b)** 2, 2.

2.6 Grundlegende Rechenregeln

Beim Rechnen mit Termen werden bestimmte Regeln meist unbewusst angewendet. Einige wichtige dieser Rechenregeln sollen nun angeführt werden.

1. Vorrangregeln

Was **in Klammern** steht, ist stets **zuerst** zu berechnen. Sonst lautet die Reihenfolge:

1. Potenzieren
2. Multiplizieren oder Dividieren ("Punktrechnung")
3. Addition und Subtraktion ("Strichrechnung")

Beispiel 2.24 : Vorrangregeln

a) $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7$; aber: $5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14$, "Punktrechnung geht vor Strichrechnung".

b) $(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$; aber: $3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$.

c) $2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7 + 5^2 = 2 \cdot 9 + 28 + 25 = 71$

Schließlich gibt es eine Vereinbarung für Terme, in denen *nur* Punktrechnungen oder nur Strichrechnungen vorkommen und Klammern fehlen: es wird von links nach rechts vorgegangen. Diese Vereinbarung wird auch von Taschenrechnern berücksichtigt.

Beispiele: $20 - 10 + 3 = 10 + 3$ und nicht $20 - 13$
$12 : 2 \cdot 6 = 6 \cdot 6$ und nicht $12 : 12$

2. Vorzeichenregeln der Addition bzw. der Subtraktion

(1) $a + (-a) = 0$
(2) $-(-a) = a; \; -(+a) = -a$
(3) $a + (-b) = a - b$
(4) $a - (-b) = a + b$

Wegen (3) kann eine Subtraktion als Addition betrachtet werden: **eine Zahl b subtrahieren heißt, ihre Gegenzahl – b addieren.** Beispiel: $7 - 2 = 7 + (-2)$.

Beispiel 2.25 : Vorzeichenregeln der Addition bzw. der Subtraktion

a) $4 + (-3) = 4 - 3 = 1$
b) $-4 + (-3) = -4 - 3 = -7$
c) $4 - (-3) = 4 + 3 = 7$
d) $-4 - (-3) = -4 + 3 = -1$
e) $4 - (-2) + 4 - 5 - (-1) = 4 + 2 + 4 - 5 + 1 = 6.$

3. Vorzeichenregeln der Multiplikation bzw. Division

Das Produkt **zweier** Faktoren mit **gleichen** Vorzeichen ist **positiv**, mit **ungleichen** Vorzeichen dagegen **negativ**.

Wie die Subtraktion auf die Addition kann auch die Division kann auf die Multiplikation zurückgeführt werden; **durch eine Zahl b (b ≠ 0) dividieren heißt mit ihrem Kehrwert multiplizieren:** $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$. Daher gelten für die Division die gleichen Vorzeichenregeln wie für die Multiplikation. Der Quotient a:b ist **positiv**, wenn Dividend a und Divisor b (Zähler und Nenner) **gleiche** Vorzeichen haben, dagegen **negativ**, wenn sie **ungleiche** Vorzeichen haben.

Kurzform:

$(+) \cdot (+) = (+)$
$(-) \quad (+) = (-)$
$(+) \quad (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$

$(+) : (+) = (+)$
$(-) : (+) = (-)$
$(+) : (-) = (-)$
$(-) : (-) = (+)$

Beachte daher auch:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Ein Minuszeichen vor einem Bruchstrich kann also auch entweder vor den Zähler oder vor den Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2.26 : Vorzeichenregeln der Multiplikation bzw. der Division

$2 \cdot 5 = 10$	$20 : 4 = 5$
$2 \cdot (-5) = -10$	$20 : (-4) = \frac{20}{-4} = -5$
$(-2) \cdot 5 = -10$	$(-20) : 4 = \frac{-20}{4} = -5$
$(-2) \cdot (-5) = 10$	$(-20) : (-4) = \frac{-20}{-4} = 5$

4. Rechnen mit Brüchen

Erweitern	Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl ($\neq$ 0) multipliziert.
Kürzen	Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl ($\neq$ 0) dividiert.
Addieren (Subtrahieren)	Brüche müssen zuerst durch Erweitern **auf einen gemeinsamen Nenner** gebracht werden; danach werden die Zähler addiert (subtrahiert) und durch den gemeinsamen Nenner dividiert.
Multiplizieren	**Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner** multiplizieren (möglichst vor dem Multiplizieren kürzen!)
Dividieren	Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem **Kehrwert multipliziert**.

Durch Erweitern oder Kürzen eines Bruches ändert sich seine Form, nicht aber sein Wert:
$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$ (mit 7 erweitert); $\frac{18}{24} = \frac{18 : 6}{24 : 6} = \frac{3}{4}$ (durch 6 gekürzt).
Kann man einen Bruch kürzen, so erleichtert dies das weitere Rechnen. Daher der Grundsatz: **Erst kürzen, dann rechnen!**

Brüche mit ganzzahligem Zähler und Nenner, die durch Erweitern oder Kürzen entstehen, sind Schreibformen für dieselbe rationale Zahl; so bezeichnen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ oder $\frac{50}{100}$ dieselbe rationale Zahl. Häufig wählt man als Schreibform für eine rationale Zahl den voll gekürzten Bruch.

Beispiel 2.27 : Addition (Subtraktion) von Brüchen

$\frac{5}{12} + \frac{3}{8} - \frac{7}{18} = ?$

Lösung

Wir *erweitern* die Brüche, um sie auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Ein gemeinsamer Nenner ist sicher das Produkt $12 \cdot 8 \cdot 18$. Der *kleinsten* gemeinsamen Nenner, auch Hauptnenner HN genannt, ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV, siehe Seite 29) von 12, 8 und 18:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $\text{kgV}(12, 8, 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$.

Wir müssen den ersten Bruch mit 6, den zweiten mit 9 und den dritten mit 4 erweitern, um auf den gemeinsamen Nenner 72 zu kommen:

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{9} - \frac{7}{18} \cdot \frac{4}{4} = \frac{30}{72} + \frac{27}{72} - \frac{28}{72} = \frac{30 + 27 - 28}{72} = \frac{29}{72}$$

Beispiel 2.28 : Multiplikation und Division von Brüchen

a) $\frac{r}{3}\cdot\frac{6}{7}=\frac{6\cdot r}{3\cdot 7}=\frac{2\,r}{7}$

b) $2\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{x}{8}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{x}{8}=\frac{2\cdot 4\cdot x}{1\cdot 9\cdot 8}=\frac{x}{9}$

c) $2:\frac{1}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{1}=\frac{10}{1}=10$ (Wie oft ist $\frac{1}{5}$ in 2 enthalten?)

d) $\frac{4}{5}:2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{5\cdot 2}=\frac{2}{5}$ (Was ist die Hälfte von $\frac{4}{5}$?)

e) $\frac{4}{5}:\frac{4}{3}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{3}{5}$

Beim Rechnen mit Brüchen wird öfters das Wort "**von**" verwendet. Etwa: $\frac{2}{3}$ von 12 oder 5% ($\frac{5}{100}$) von 200. Es bedeutet eine **Multiplikation**:

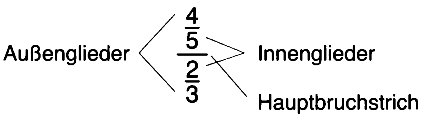
$\frac{2}{3}$ von 12 = $\frac{2}{3}\cdot 12=\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{1}=8$;

5% von 200 = $\frac{5}{100}\cdot 200=\frac{5}{100}\cdot\frac{200}{1}=10$.

Wo steckt der Fehler?

Ein Vater hinterließ seinen drei Söhnen 17 Pferde. Davon sollte der älteste Sohn die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel erhalten. Da 17 nicht durch 2, 3 oder 9 teilbar ist, borgten sich die drei Söhne ein Pferd vom Nachbarn aus und hatten damit 18 Pferde. Dann erhielt der älteste Sohn $\frac{1}{2}\cdot 18=9$ Pferde, der mittlere $\frac{1}{3}\cdot 18=6$ Pferde und der jüngste $\frac{1}{9}\cdot 18=2$ Pferde. Da $9+6+2=17$ ist, konnten die Söhne das zusätzliche Pferd dem Nachbarn wieder zurückgeben!

Oft schreibt man die Division von Brüchen selbst als Bruch; man spricht dann von einem **Doppelbruch**.



Beispiele: $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}:\frac{2}{3}$, $\frac{\frac{a}{3}}{4}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{4}{1}}$, $\frac{a}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{3}{4}}$.

Beachte den Unterschied zwischen den Doppelbrüchen $\frac{\frac{a}{3}}{4}$ und $\frac{a}{\frac{3}{4}}$. Der "Hauptbruchstrich" sollte etwas länger als die anderen Bruchstriche sein; für das Weiterrechnen ist es ratsam, das Gleichheitszeichen auf der Höhe des Hauptbruchstriches zu schreiben!

Beispiel 2.29 : Einfache Doppelbrüche

a) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 2}=\frac{\text{Produkt der Außenglieder}}{\text{Produkt der Innenglieder}}$

Nach dem Kürzen erhält man schließlich $\frac{6}{5}$.

b) $\frac{\frac{a}{3}}{4}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{4}{1}}=\frac{a\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{a}{12}$

c) $\frac{a}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{a\cdot 4}{1\cdot 3}=\frac{4\,a}{3}$

5. Der Produkt-Null-Satz

Ein Produkt ist gleich 0, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist: $a \cdot 0 = 0$.

Beispiel: $12{,}7\,s \cdot 0 \cdot 3t = 0$.

Es gilt aber auch die Umkehrung dieser Behauptung: Ist ein Produkt gleich 0, so ist wenigstens einer der Faktoren gleich 0. Die Aussagen "ein Produkt ist 0" und "wenigstens einer der Faktoren ist 0" sind daher beide zugleich entweder wahr oder falsch, also äquivalent:

Ein Produkt a · b ist genau dann gleich null, wenn wenigstens einer der Faktoren a, b gleich null ist. Kurz ausgedrückt ($\vee$ ist das Zeichen für das logische ODER, siehe Seite 15)

$$\boxed{a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \;\vee\; b = 0}$$

Dieser Satz wird öfters beim Lösen von Gleichungen angewendet.

Beispiel 2.30 : Anwendung des Produkt-Null-Satzes

Löse die folgenden Gleichungen:

a) $4x = 0$ **b)** $x \cdot (2x - 1) = 0$

Lösung

Zu **a)** Da der Faktor $4 \neq 0$ ist, folgt sofort als Lösung $x = 0$.

Zu **b)** In diesem Fall kann jeder der beiden Faktoren, also x sowie auch $2x - 1$, gleich 0 sein.

Fall I: $x = 0$

Fall II: $2x - 1 = 0$, woraus folgt: $x = \frac{1}{2}$.

Die Lösungen werden in der Regel mit Indizes versehen: $x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = \frac{1}{2}$.

Probe durch Einsetzen!

6. Die Division durch 0 ist nicht definiert!

$$\boxed{\frac{1}{0} = \infty \;?}$$

Zur Erinnerung (siehe Seite 27): Eine Divisionsaufgabe ist gleichbedeutend einer Multiplikationsaufgabe; $12 : 3 = x$ bedeutet $3 \cdot x = 12$.

Fragen wir, was beispielsweise $1 : 0$ bedeuten könnte. Nehmen wir an, dass $1 : 0 = x$, was gleichbedeutend der Multiplikationsaufgabe $0 \cdot x = 1$ ist. Diese Gleichung ist jedoch nicht lösbar, da es keine Zahl x gibt, die mit 0 multipliziert den Wert 1 ergibt.

Auch $1 : 0 = \infty$ oder $2 : 0 = \infty$ hat keinen Sinn, da ∞ keine Zahl ist (siehe auch die Bemerkung auf Seite 38); für eine solche "Zahl" ∞ würde hier folgen:

$$\infty = \frac{1}{0} = \frac{2-1}{0} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = 0.$$

Schließlich führt $0 : 0 = x$ auf $0 \cdot x = 0$. Dann löst aber *jede* Zahl diese Gleichung, $0 : 0$ ist also unbestimmt.

Auch kann man $\frac{0}{0}$ nicht gleich 1 setzen, denn dann würde folgen:

$$1 = \frac{0}{0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} + \frac{0}{0} = 2$$

Zusammenfassend folgt, dass man der Division durch 0 keinen Sinn geben kann.

Dagegen ist die Division von 0 durch eine (von 0 verschiedene) Zahl sinnvoll und besonders leicht durchführbar: das Ergebnis ist stets 0. Beispiel: $0 : 4 = 0$, $0 : (-2) = 0$.

7. Drei Grundgesetze für das Addieren und Multiplizieren

Grundgesetz	Addition	Multiplikation
Assoziativgesetz (Es ist gleichgültig, wo man beim Addieren mehrerer Summanden oder Multiplizieren mehrerer Faktoren beginnt; daher können die Klammern auch weggelassen werden.)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Kommutativgesetz (Es darf vertauscht werden.)	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz (Regel für das Ausmultiplizieren oder Herausheben eines gemeinsamen Faktors)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *Ausmultiplizieren* $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ *Herausheben*	

Beispiel 2.31 : Assoziativ- und Kommutativgesetze

a) ⚠ **Achtung!**

$2(a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b$ Verstoß gegen das Assoziativgesetz der Multiplikation.

$2 \cdot (ab) = 2ab$ Die Klammern können weggelassen werden.

b) $2b \cdot a = 2ab$; $2c \cdot 7a \cdot 4b = 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a \cdot b \cdot c$

Variable werden in einem Produkt üblicherweise alphabetisch angeordnet; Konstante werden vorne geschrieben.

Beispiel 2.32 : Distributivgesetz: Ausmultiplizieren und Herausheben

a) $2 \cdot (a - 6b) = 2a - 12b$ ... Ausmultiplizieren

b) $5a + 4a = (5 + 4) \cdot a = 9a$;

$5a - 4a = (5 - 4) \cdot a = 1 \cdot a = a$.

Gleichartige eingliedrige Terme wie 5a oder 4a lassen sich nach dem Distributivgesetz zusammenfassen. Man braucht also nur die Koeffizienten 5 und 4 zu addieren bzw. zu subtrahieren (und das Ergebnis mit a zu multiplizieren).

c) $2x - 3y^2 - x + 8y^2 + 5x = 6x + 5y^2$.

d) Terme wie $x + 2y$ oder $4a - 2b + c$ können nicht zusammengefasst werden!

e) $(5v - 2u) = (-1) \cdot (2u - 5v)$; Probe durch Ausmultiplizieren!

f) $2x^2 - 4x = 2x \cdot (x - 2)$; Probe durch Ausmultiplizieren!

Durch Herausheben, auch Ausklammern oder **Faktorisieren** genannt, wird eine **Summe in ein Produkt umgeformt**. Produkte sind oft "wertvollere" Terme als Summen. So enthält der Term $2 \cdot x \cdot x - 4 \cdot x$ drei Multiplikationen, der Term $2 \cdot x \cdot (x - 2)$ jedoch nur zwei Multiplikationen, ist also rechentechnisch einfacher.

g) $7x - 4ax + 7y - 4ay = x(7 - 4a) + y(7 - 4a) = (7 - 4a)(x + y)$.

Hier tritt im zweiten Schritt $7 - 4a$ als gemeinsamer Faktor auf. Auch hier konnte eine Summe faktorisiert, d.h. als Produkt dargestellt werden.

8. Auflösung von Klammern

Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen, so können die Klammern weggelassen werden. Steht dagegen davor ein Minuszeichen, so sind beim Weglassen der Klammern innerhalb der Klammern alle Plus- gegen Minuszeichen und alle Minus- gegen Pluszeichen auszutauschen.

Beispiel 2.33 : Auflösen von Klammern

a) $2 + (a - 2) = 2 + a - 2 = a$

b) $4 - (3 + x) = 4 - 3 - x = 1 - x$
Steht vor dem ersten Glied in einer Klammer kein Plus- oder Minuszeichen, so ist dort immer ein Pluszeichen zu denken. Also: $4 - (3 + x) = 4 - (+3 + x)$.

c) $4 - (-a + x - b) = 4 + a - x + b$

d) $x - x(y - 1) = x - (xy - x) = x - xy + x = 2x - xy = x(2 - y)$.

e) $a - b = -(b - a)$; diese Umformung kann gegebenenfalls sehr nützlich sein!

Zahlenprobe: Rechenkontrolle durch Einsetzen von Zahlen

! Wir setzen im Beispiel 2.33 d) je eine Zahl für x und y in den Anfangsterm und in den Ergebnisterm ein. Bei richtiger Termumformung muss Übereinstimmung bestehen. Da die Wahl der Zahlen für x und y beliebig ist, können "bequeme" Zahlen gewählt werden: $x = 3$, $y = 2$.

Einsetzen in den Anfangsterm: $3 - 3 \cdot (2 - 1) = 3 - 3 \cdot 1 = 0$.
Einsetzen in den Ergebnisterm: $3 \cdot (2 - 2) = 3 \cdot 0 = 0$.
Für die Termberechnungen sollte ein *anderer* Weg als bei der zu überprüfenden Rechnung gewählt werden, um möglicherweise den gleichen Fehler nicht wieder zu begehen.

Gibt es keine Übereinstimmung, so zeigt diese Rechenkontrolle – wenn sie fehlerfrei geführt wurde – eine falsch durchgeführte Umformung an. Bei Übereinstimmung kann allerdings nicht mit Sicherheit auf richtige Rechnung geschlossen werden. Es handelt sich um einen Versuch der "Widerlegung der Richtigkeit". Dieser *Schnelltest* sollte bei Termumformungen in Zweifelsfällen stets durchgeführt werden.

Beispiel 2.34 : Geschachtelte Klammern

Innerhalb einer Klammer können noch weitere Klammern auftreten. Zur besseren Unterscheidung verwendet man dann runde, eckige, geschwungene, ... Klammern.

a) $4x + [-2y - (3x - y)]$

b) $u - \{(2u - 5v) - [(5u - v) - (-3u + v)]\}$; Zahlenprobe: $u = 2$, $v = 1$.

Lösung

Es empfiehlt sich, **Klammern stets von innen nach außen aufzulösen**!

Zu **a)** $4x + [-2y - (3x - y)] = 4x + [-2y - 3x + y] = 4x - 2y - 3x + y = x - y$.

Zu b) $u - \{(2u - 5v) - [(5u - v) - (-3u + v)]\} = u - \{2u - 5v - [5u - v + 3u - v]\} =$
$= u - \{2u - 5v - [8u - 2v]\} = u - \{2u - 5v - 8u + 2v]\} = u - \{-6u - 3v]\} =$
$= u + 6u + 3v = 7u + 3v.$

Zahlenprobe:

Anfangsterm: $2 - \{(4 - 5) - [(10 - 1) - (-6 + 1)]\} = 2 - \{-1 - [9 - (-5)]\} =$
$= 2 - \{-1 - 14\} = 17.$

Ergebnisterm: $14 + 3 = 17$; somit Übereinstimmung!

Hinweis: Beim Taschenrechner gibt es nur runde Klammern für die Verschachtelung. Eckige Klammern zeigen Vektoren oder Matrizen an.

9. Multiplikation von Summen

Zweifache Anwendung des Distributivgesetzes (überlege dies!) ergibt:

Zwei Summen werden multipliziert, indem man *jeden* Summanden der einen Summe mit *jedem* Summanden der anderen Summe multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

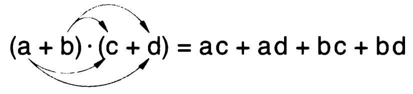


Abb. 2.25 Summe mit Summe multiplizieren

Um beim Ausmultiplizieren alle Summanden zu erfassen, ist es günstig, zunächst den ersten Summanden der ersten Summe der Reihe nach mit allen Summanden der zweiten Summe zu multiplizieren (Abb. 2. 25); dann multipliziert man den zweiten Summanden der ersten Summe mit allen Summanden der zweiten Summe usw.

Kontrolle *vor* dem Zusammenfassen: Anzahl der Teilprodukte = Anzahl der Summanden der ersten Summe mal Anzahl der Summanden der zweiten Summe. In Abb. 2. 25: $4 = 2 \cdot 2$.

Beispiel 2.35 : Multiplikation von Summen

Berechne

a) $(2x + 4) \cdot (x - 1)$ mit Zahlenprobe: $x = 2$

b) $(2u - 4v + z)(u - 3v)$

c) $(2u + v)(3u - v)(5u - 2v)$ mit Zahlenprobe: $u = 2, v = 1$

d) $(x + y) \cdot [x^2 - (2x - y)(3x + 2y)]$

Lösung

Zu a) $(2x + 4) \cdot (x - 1) = 2x^2 - 2x + 4x - 4$ (insgesamt $4 = 2 \cdot 2$ Teilprodukte)
$= 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2)$;

Zahlenprobe: Anfangsterm: $(2 \cdot 2 + 4) \cdot (2 - 1) = 8 \cdot 1 = 8$;

Ergebnisterm: $2(2^2 + 2 - 2) = 2 \cdot 4 = 8$; somit Übereinstimmung.

Zu b) $(2u - 4v + z)(u - 3v) = 2u^2 - 6uv - 4uv + 12v^2 + uz - 3vz$
(insgesamt $6 = 3 \cdot 2$ Teilprodukte) $= 2u^2 - 10uv + 12v^2 + uz - 3vz$

Zu c) $(2u+v)(3u-v)(5u-2v)=(6u^2-2uv+3uv-v^2)(5u-2v)=(6u^2+uv-v^2)(5u-2v)=$
$= 30u^3 - 12u^2v + 5u^2v - 2uv^2 - 5uv^2 + 2v^3 = 30u^3 - 7u^2v - 7uv^2 + 2v^3.$

Eine Kontrolle der Anzahl der Teilprodukte kann nicht mehr erfolgen, da zusammengefasst wurde.

Zahlenprobe: Anfangsterm: $(2 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 2 - 1)(5 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 5 \cdot 5 \cdot 8 = 200;$

Ergebnisterm: $30 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 = 240 - 28 - 14 + 2 = 200;$
somit Übereinstimmung.

Zu d) $(x + y) \cdot [x^2 - (2x - y)(3x + 2y)] = (x + y) \cdot [x^2 - (6x^2 + 4xy - 3xy - 2y^2)] =$
$= (x + y) \cdot [x^2 - 6x^2 - 4xy + 3xy + 2y^2)] = (x + y) \cdot [-5x^2 - xy + 2y^2] =$
$= -5x^3 - x^2y + 2xy^2 - 5x^2y - xy^2 + 2y^3 = -5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 2y^3.$

10. Die drei binomischen Formeln

Unter einem **Binom** (siehe Seite 41) versteht man Terme der Art $a + b$, $a - b$, $2x + 5y$, $3u - 7v$, also eine *zwei*gliedrige Summe oder Differenz. Häufig tritt die Aufgabe auf, das Quadrat eines Binoms oder ein Produkt der Art $(a + b)(a - b)$ zu berechnen. Durch Ausmultiplizieren erhält man leicht die drei binomischen Formeln:

Erste binomische Formel	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite binomische Formel	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte binomische Formel	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Die erste binomische Formel ist in Abb. 2.26 geometrisch veranschaulicht. Dabei wird die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge $a + b$ aus 4 Flächen der Größe a^2, ab, ab und b^2 aufgebaut.

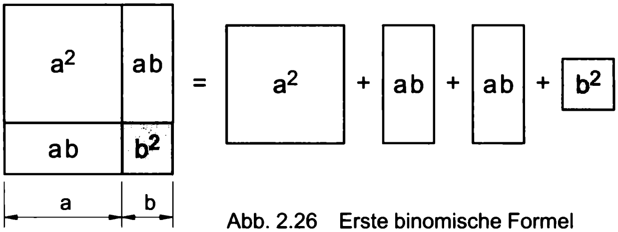


Abb. 2.26 Erste binomische Formel

Achtung!
$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$

Geometrisch veranschaulicht bedeutet dies bei der ersten binomischen Formel, dass man in Abb. 2.26 die beiden Rechtecksflächen $a \cdot b$ "vergisst"!

Statt Buchstaben kann man auch andere Zeichen für die Variablen verwenden:

$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2$

Bei dieser Schreibweise kann man sich vielleicht leichter vorstellen, dass die Variablen □ und ○ für beliebige, auch *längere* Terme stehen können. Entsprechend können auch die beiden anderen binomischen Formeln notiert werden.

Beispiel 2.36 : Binomische Formeln

Berechne

a) $(3x+2y)^2$ **b)** $(r-5s)^2$ **c)** $(2u+5v)(5v-2u)$

d) $(2+a)^2-(2-a)^2-(2+a)(2-a)$; Zahlenprobe: $a=1$;

e) Faktorisiere den Term d^3-4d; Zahlenprobe: $d=2$.

Lösung

Zu **a)** $(3x+2y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$.

Zu **b)** $(r-5s)^2=r^2-2\cdot r\cdot 5s+(5s)^2=r^2-10rs+25s^2$.

Die Anwendung der binomischen Formeln sollte nach einiger Übung auch ohne die oben angeführte Zwischenrechnung möglich sein!

Zu **c)** $(2u+5v)(5v-2u)=(5v+2u)\cdot(5v-2u)=25v^2-4u^2$

Zu **d)** $(2+a)^2-(2-a)^2-(2+a)(2-a)=4+4a+a^2-(4-4a+a^2)-(4-a^2)=$

$=4+4a+a^2-4+4a-a^2-4+a^2=a^2+8a-4$.

Zahlenprobe: Anfangsterm: $(2+1)^2-(2-1)^2-(2+1)(2-1)=9-1-3=5$;

Ergebnisterm: $1^2+8\cdot 1-4=5$; somit Übereinstimmung.

Zu **e)** $d^3-4d=d\cdot(d^2-2^2)=d\cdot(d+2)(d-2)$.

Zahlenprobe: Anfangsterm: $2^3-4\cdot 2=0$; Ergebnisterm: $2\cdot(2+2)\cdot(2-2)=0$; somit Übereinstimmung.

Beispiel 2.37 : Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formel

Faktorisiere

a) $4v^2-12v+9$; Zahlenprobe: $v=1$.

b) $3d^3-12d$; Zahlenprobe: $d=2$.

Beachte: Die 3. binomische Formel lässt eine Faktorisierung einer *Differenz* von zwei Quadraten zu; a^2+b^2, also eine *Summe* von zwei Quadraten, kann jedoch nicht in ein Produkt zerlegt werden!

Lösung

Zu **a)** $4v^2-12v+9=(2v)^2-2\cdot 2v\cdot 3+3^2$

ist von der Form: $a^2-2ab+b^2$ $(a=2v,\ b=3)$; daher: $4v^2-12v+9=(2v-3)^2$.

Rechenkontrolle: Anfangsterm: $4\cdot 1^2-12\cdot 1+9=1$;

Ergebnisterm: $(2\cdot 1-3)^2=(-1)^2=1$; somit Übereinstimmung.

Zu **b)** $3d^3-12d=3d\cdot(d^2-2^2)=3d\cdot(d+2)(d-2)$.

Rechenkontrolle: Anfangsterm: $3\cdot 2^3-12\cdot 2=24-24=0$;

Ergebnisterm: $3\cdot 2\cdot(2+2)\cdot(2-2)=0$; somit Übereinstimmung.

Beispiel 2.38 : Quadratische Ergänzung

Welche Zahl muss zu

a) x^2+6x **b)** $9x^2-12x$

addiert werden, damit das Ergebnis als Quadrat eines Binoms dargestellt werden kann?

Lösung

Zu **a)** $a^2 + 2ab$ wird durch Addition von b^2 zum "vollen" Quadrat $(a+b)^2$ ergänzt. Im Term $x^2 + 6x$ schreiben wir den Summanden $6x$ in der Form $2 \cdot x \cdot 3$ und vergleichen dann mit $a^2 + 2ab$ nach Abb. 2.27: $2ab = 2 \cdot x \cdot 3$.

Daraus folgt: $b = 3$ und $b^2 = 9$. Der zum vollen Quadrat $(x+3)^2$ ergänzte Term $x^2 + 6x$ lautet daher: $x^2 + 6x + 9$.

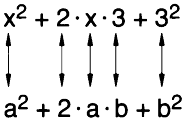


Abb. 2.27 Zu Beispiel 2.38 a)

Zu **b)** $a^2 - 2ab$ wird durch Addition von b^2 zum "vollen" Quadrat $(a-b)^2$ ergänzt. Den Term $9x^2 - 12x$ schreiben wir in der Form $a^2 - 2 \cdot a \cdot b = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2$ und vergleichen dann mit $a^2 - 2ab$ nach Abb. 2.28: $2ab = 2 \cdot (3x) \cdot 2$.

Daraus folgt: $b = 2$ und $b^2 = 4$. Der zum vollen Quadrat $(3x-2)^2$ ergänzte Term $9x^2 - 12x$ lautet daher: $9x^2 - 12x + 4$.

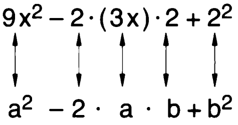


Abb. 2.28 Zu Beispiel 2.38 b)

Im Überblick: Grundlegende Rechenregeln ●

Vorrangregeln: Nach Berechnung geklammerter Terme
1. Potenzrechnung, 2. Punktrechnung, 3. Strichrechnung

$-(-a) = a$; $a - b = a + (-b)$ ... Subtraktion als Addition;

$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ ... Division als Multiplikation;

$a \cdot b$ sowie $\frac{a}{b}$ sind positiv, wenn a, b gleiche Vorzeichen haben, sonst negativ

Speziell: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

Rechnen mit Brüchen:

Vor dem *Addieren (Subtrahieren)* von Brüchen müssen diese zuerst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden; danach werden die Zähler addiert (subtrahiert) und durch den gemeinsamen Nenner dividiert.
Zwei Brüche werden *multipliziert,* indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Durch einen Bruch wird *dividiert,* indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Produkt-Null-Satz: Ein Produkt $a \cdot b$ ist genau dann gleich null, wenn wenigstens einer der Faktoren a, b gleich null ist.

Die Division durch null ist nicht definiert!

Assoziativgesetze: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Kommutativgesetze: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$

Distributivgesetz (Ausmultiplizieren bzw. Faktorisieren): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Steht **vor einer Klammer ein Minuszeichen**, so sind beim Weglassen der Klammern innerhalb der Klammern alle Plus- gegen Minuszeichen und alle Minus- gegen Pluszeichen auszutauschen.

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

Binomische Formeln: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Aufgaben

2.62 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $-2+5$ **b)** $-3+(-2)$ **c)** $8-(+2)$ **d)** $8-(-2)$ **e)** $-2{,}5-3$
f) $-2{,}5+(-2{,}5)$ **g)** $-0{,}5-0{,}5$ **h)** $-2-(-5)$ **i)** $(-1)-(+1)$ **j)** $(-1)+(-1)$

2.63 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $2-(-4)+3$ **b)** $-5-1+(-1)$ **c)** $2-(-1)+(-2)$ **d)** $-5-(-1)-1$
e) $-2+(-2)-(+2)$ **f)** $+4-(-4)+(-4)$ **g)** $-1+(-1)-1$ **h)** $(-2)-(+2)+(-2)$
i) $4-(-2)-(+4)$ **j)** $-2{,}5+1{,}9-2{,}5$ **k)** $2{,}7-3{,}9-1{,}4$ **l)** $-1{,}6-1{,}2-3{,}9$

2.64 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $2\cdot(-3)$ **b)** $(-2)\cdot(+3)$ **c)** $(-5)\cdot(-4)$ **d)** $0\cdot 7$ **e)** $(-1)\cdot(-1)\cdot 2$
f) $(-1)\cdot 0\cdot(-2)$ **g)** $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$ **h)** $(-1)^5$ **i)** $2^2\cdot 3$ **j)** $(-2)^2\cdot(-1)^2$

2.65 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $-4:(+2)$ **b)** $4:(-2)$ **c)** $-4:(-2)$ **d)** $0:(-3)$ **e)** $\frac{0}{2}$
f) $\frac{-6}{2}$ **g)** $\frac{8}{-2}$ **h)** $\frac{-2}{-1}$ **i)** $-\frac{8}{-4}$ **j)** $\frac{2\cdot(-4)}{-2}$

2.66 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $5\cdot 3+2$ **b)** $2+5\cdot 3$ **c)** $8-3\cdot 2$ **d)** $12\cdot 2-2$ **e)** $12-11\cdot 2$
f) $5-4:2$ **g)** $20+5:5$ **h)** $12:3+1$ **i)** $8:4-4:2$ **j)** $(-2)\cdot 10-5:(-4)$

2.67 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $5\cdot 3^2$ **b)** $(5\cdot 3)^2$ **c)** $18:(2\cdot 9)$ **d)** $(18:2)\cdot 9$ **e)** $18:2\cdot 9$
f) $3\cdot 4:2$ **g)** $2^3\cdot 4+2$ **h)** $2+(3\cdot 10)^2$ **i)** $18:3^2\cdot 2$ **j)** $200:2\cdot 10^2$

2.68 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $|-3-1|$ **b)** $2-|4-5|$ **c)** $8-3-|8-3|$ **d)** $2\cdot|-3|-3\cdot|-2|$
e) $|-3+|-3||$ **f)** $|-3-|-3||$ **g)** $|-3-|1-3||$ **h)** $|3-2\cdot|4-1||$

2.69 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{4}{3}-\frac{7}{5}+\frac{2}{5}+\frac{7}{12}$
d) $\frac{4}{7}+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{2}{9}$ **f)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

2.70 Die alten Ägypter hatten mit Ausnahme des Bruches $\frac{2}{3}$ nur Zeichen zur Darstellung von Brüchen mit dem Zähler 1. Sie stellten jeden Bruch (was oft unterschiedlich möglich ist) als Summe von Brüchen diesen Typs dar. Zeige:

a) $\frac{9}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{9}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180}$ **c)** $\frac{9}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
d) $\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$ **e)** $\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$ **f)** $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$

2.71 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}$ **b)** $\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2k+1}$ **c)** $\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{2j-1}$ **d)** $\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{2n}$

2.72 Vereinfache:

a) $9\cdot\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{a}{12}\cdot 3$ **c)** $21\cdot\frac{b}{7}$ **d)** $\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{u}{5}\cdot\frac{5}{6}$
f) $\frac{4}{9}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{3}{5}$ **g)** $3a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}$ **h)** $\frac{1}{6}\cdot 3\cdot\frac{2c}{5}$ **i)** $\frac{1}{4}\cdot 2a\cdot\frac{3c}{2}$ **j)** $\frac{1}{3}\cdot(-2x)\cdot\frac{3c}{-2}$

2.73 Ebenso:

a) $\frac{6}{11} : 2$ **b)** $3 : \frac{3}{2}$ **c)** $\frac{4}{3} : \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{a}{9} : \frac{13}{12}$

e) $\frac{c}{3} : \frac{2}{5}$ **f)** $\left(\frac{4}{5}\right)^2 : \frac{3}{4}$ **g)** $\left(\frac{4}{3} : \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{15}{4}$ **h)** $\frac{4}{3} : \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{12}\right)$

2.74 Ergänze den fehlenden Bruch:

a) $? : \frac{9}{4} = \frac{4}{5}$ **b)** $? : \frac{1}{7} = 5$ **c)** $\frac{2}{3} : ? = \frac{3}{2}$ **d)** $1 : ? = 10$

2.75 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ **c)** $\dfrac{2}{\frac{3}{4}}$ **d)** $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}$ **e)** $\dfrac{7}{\frac{1}{7}}$

2.76 Ermittle ohne Taschenrechner:

a) $\frac{1}{10}$ von 2 m **b)** $\frac{1}{3}$ von 180 m **c)** $\frac{2}{3}$ von 3 km **d)** $\frac{1}{15}$ von 300 €

e) $\frac{3}{5}$ von 4 **f)** $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ **g)** $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$

2.77 Löse folgende Gleichungen (teilweise gibt es mehrere Lösungen) mit Hilfe des Produkt-Null-Satzes:

a) $-3x = 0$ **b)** $\frac{x}{2} = 0$ **c)** $3(x - 1) = 0$ **d)** $2x(x + 2) = 0$

e) $x^2 - x = 0$ **f)** $2x^2 + x = 0$ **g)** $3x^2 = 2x$ **h)** $x^2 + 3x = 4x^2$

In Zweifelsfällen sollte bei den folgenden Termumformungen eine Zahlenprobe gemacht werden!

2.78 Vereinfache die folgenden Terme:

a) $40x - 10x$ **b)** $s + (-s)$ **c)** $k - 2k$ **d)** $7x + y + x$ **e)** $s + s + s + s$

f) $4u - 3v + 3v$ **g)** $3a - 4b + c - 2a - 2c$ **h)** $5x - 2y + 3z - 2y - x + z$

i) $-3u - 2v + 6u - w - 4v + w - 2u$ **j)** $-2m - k + 2n - 3k + 4m + 4k - m$

2.79 Schreibe ohne Betragsstriche unter der Voraussetzung, dass a positiv ist:

a) $|a|$ **b)** $a + |a|$ **c)** $a - |a|$ **d)** $a + |-a|$ **e)** $-a - |a|$

2.80 Schreibe ohne Betragsstriche unter der Voraussetzung, dass a negativ ist:

a) $|a|$ **b)** $a + |a|$ **c)** $a - |a|$ **d)** $a + |-a|$ **e)** $-a - |a|$

2.81 Was ergibt x mod 2, wenn **a)** x eine gerade Zahl **b)** x eine ungerade Zahl ist ?

2.82 Vereinfache: $-v - 3u + 2v$

a) $(4x + 3y) - (5x + y)$ $-x + 2y$ **b)** $a + 2b - (a + 2b)$ 0 **c)** $u - v - (3u - 2v)$ $-2u$

d) $(r + s) - (r + 3s)$ $-2s$ **e)** $1 - (-x + 1)$ $= x$ **f)** $2 - (-3 - p)$ $5+p$

$r + s - r - 3s$ $1 + x - 1$ $2 + 3 + p$

2.83 Schließe in den folgenden Termen die letzten beiden Glieder in eine Klammer ein, vor der ein Minuszeichen steht:

a) $1 - a - b$ **b)** $a + x - y$ **c)** $r - s + t$ **d)** $a + 1 - x + y$ **e)** $2u - 5v + w - 1$

$1-(a+b)$ $a-(-x+y)$ $r-(+s-t)$ $a+1-(x-y)$ $2u-(5v-w+1)$

$a+(x-y)$

2.84 Multipliziere aus:

a) $2(-2x - 2y)$ **b)** $(-1)(mn + m^2 - n^2)$ **c)** $(-2a)(3 - a - a^2)$ **d)** $(-x^2)(-x + 2x - 1)$

$-4x - 4y$ $-mn - m^2 - n^2$ $-6a + 2a^3$ $x^3 - 2x^3 + x^2$

2.85 Vereinfache:

a) $2(4x + y) - (x - y)$ **b)** $x(u + v) - x(2v + u)$
c) $2(d - 3) - (2 - d) + 3(d - 1)$ **d)** $2(a + b + c) - 2(a - b + c) - (b - c)$
e) $x(-x^2 + 1) - (1 - x^2)x$ **f)** $-4(xy - x) + y(x - 1) - 2(-x - xy)$

2.86 Vereinfache

a) $3u - \{v - [w - (4u - 5v) + u] - 2w\}$
b) $12a - 5b - \{5c + 2b + 3[-2a + 7c - (3b - 2a) - 4(-a + 2b)]\}$
c) $3x(2y - x) - \{(-x)[4y - (y - 3x)] - 3y[(x - 2y) - (x - 3y)]\}$
d) $2(2m - n) - \{2n(3m - 2n) - m[(4m - n) - 2(2m + n)] - 3mn\}$

2.87 Vereinfache

a) $3 \cdot (xy) - xy$ **b)** $a \cdot (2b) - 2ab$ **c)** $(uv) \cdot w + u \cdot (wv)$ **d)** $3x \cdot 3y - 3 \cdot (xy)$
e) $(r - s - t)(-a) - a(s + t - r)$ **f)** $p(1 - 2p) - (3p - 1)(-p) - (p - 1)p$

2.88 Multipliziere aus:

a) $(a + 2)(b + 4)$ **b)** $(u - 3)(v - 1)$ **c)** $(7r - s)(7r - 1)$
d) $(a + b - c)(a - b)$ **e)** $(2u - 4v + 3w)(2u - 3v - w)$ **f)** $(x + 2y - z)^2$
g) $(-2a + 3b + 4c)^2$ **h)** $(2s - 3t)(4s + 3t)(s - t)$ **i)** $(2s - 3t)^3$
j) $(4x - 3y)(2x + y) - (2x - 3y)(4x + y)$ **k)** $(2x + y)(3x - 2y) - (6x + 5y)(x - y)$

2.89 Faktorisiere, d.h. schreibe als Produkt:

a) $4u + 4v$ **b)** $0{,}3a - 0{,}3b$ **c)** $xy + xz$ **d)** $xy^2 + x^2y$
e) $3x^3 - 2x$ ✓ **f)** $16uv - 12uv^2$ **g)** $5mn + 2{,}5mk$ **h)** $xy + x$
i) $a^2 + a$ **j)** $-4x - 4$

2.90 Faktorisiere:

a) $3rs + 6st - 3r$ **b)** $36uv - 24u^2 + 12u$ **c)** $3ab - 9a^2b + 6a^2b^2$
d) $-ux - vx + x$ **e)** $x^3 + x^2 + x$ **f)** $xy^2 + xy - x^2y + x^2y^2$

2.91 Faktorisiere:

a) $m_0u - 3m^2u$ **b)** $K_0 + iK_0$ **c)** $R_0 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)R_0$ **d)** $v_0t + \frac{a}{2}t^2$

2.92 Faktorisiere:

a) $2(a + b) + x(a + b)$ **b)** $x(1 - a) + y(1 - a)$ **c)** $2(a - 3) + (a - 3)^2$
d) $a(u - v) + u - v$ $= (a + 1$ **e)** $3u(u + 1) + u^2(u + 1)$
f) $(r + 3t)(a - 3b) + (2a + b)(2r + 6t)$ **g)** $9ab + 3b + 6a + 2$
h) $x^2 + 2x - xy - 2y$ **i)** $9uv - 6v - 3u + 2$

2.93 Berechne unter Anwendung der binomischen Formeln:

a) $(a + 3)^2$ **b)** $(3u - v)^2$ **c)** $(3x - 4y)^2$
d) $(r + 2s)(r - 2s)$ **e)** $(4u - 3v)(4u + 3v)$ **f)** $(m + n)^2 - (m - n)^2$
g) $(5a - b)^2 - (5a - b)(5a + b)$ **h)** $(2x - 1)^2 - (1 - 2x)^2$ **i)** $(u + 2v)^2 - (2u + v)^2$

2.94 Faktorisiere mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $x^2 + 2xy + y^2$ **b)** $m^2 - 2mn + n^2$ **c)** $x^2 + 4xy + 4y^2$
d) $b^2 - 8b + 16$ **e)** $4v^2 + 4v + 1$ **f)** $9s^2 - 18s + 9$
g) $9u^2 - 6uv + v^2$ **h)** $u^2 - 0{,}2u + 0{,}01$ **i)** $0{,}25x^2 - 0{,}60xy + 0{,}36y^2$

2.95 Faktorisiere mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $x^2 - y^2$	**b)** $u^2 - 4v^2$	**c)** $9m^2 - 16n^2$	**d)** $x^2 - 1$
e) $m^3 - m$	**f)** $2x^2 - 18$	**g)** $a^2 - 0{,}01$	**h)** $1 - 16p^2$
i) $1 - 0{,}01 \cdot x^2$	**j)** $y^2 - 4y^4$	**k)** $x^4 - y^4$	**l)** $T^4 - 81$

2.96 Faktorisiere

a) $\pi R^2 - \pi r^2$	**b)** $\frac{\pi D^2}{4}\varrho h - \frac{\pi d^2}{4}\varrho h$	**c)** $\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2$	**d)** $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

2.97 Die folgenden Terme lassen sich in der angegebenen Weise faktorisieren; versuche a und b durch Probieren zu finden:

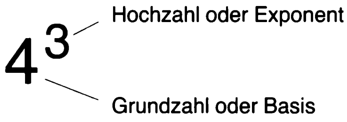
a) $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + b)$	**b)** $x^2 + x - 6 = (x + a)(x - b)$
c) $x^2 + 4x - 12 = (x + a)(x - b)$	**d)** $x^2 - 3x + 2 = (x - a)(x - b)$

2.98 Ergänze die folgenden Terme auf ein volles Quadrat:

a) $x^2 + 4x$	**b)** $x^2 + 12x$	**c)** $x^2 - 6x$	**d)** $a^2 + 18a$	**e)** $u^2 - u$
f) $4b^2 + 12b$	**g)** $9z^2 - 12z$	**h)** $4v^2 + 8v$	**i)** $4v^2 + 4v$	**j)** $16t^2 - 8t$

2.7 Potenzen

2.7.1 Erklärungen



Ein Produkt aus lauter *gleichen* Faktoren wird abkürzend als **Potenz** geschrieben.

Beispiele:

$10 \cdot 10 = 10^2$; $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$; "4 hoch 3"

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren)

Der Rechenvorgang heißt Potenzieren. Beim Rechnen treten besonders häufig die zweiten und dritten Potenzen auf.

Beispiel 2.39 : Grundlegende Bemerkungen

a) Vergleiche die abkürzende Schreibung für eine Summe und ein Produkt gleicher Zahlen: $3a = a + a + a$ und $a^3 = a \cdot a \cdot a$!

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

c) Wenn es Klammern nicht anders verlangen, gilt die Vereinbarung, dass *Potenzieren vor der Punktrechnung geht* (siehe Seite 44)!

$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$; aber: $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$;

$\frac{9^2}{3} = \frac{81}{3} = 27$; aber: $\left(\frac{9}{3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

d) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$; dagegen: $-2^4 = -16$ (2 wird zuerst zur 4. Potenz erhoben und danach wird das Vorzeichen gewechselt).

Zusätzlich legt man noch fest:

$$\boxed{a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1}$$

In Worten: Jede Potenz mit der Hochzahl 1 ist gleich der Grundzahl; jede Zahl (ausgenommen 0) hoch 0 ist gleich 1. Beide Festlegungen erweisen sich beim Rechnen mit Potenzen als sehr zweckmäßig. 0^0 ist nicht definiert.

Beispiel 2.40 : Potenzen mit Hochzahl 0 oder 1

a) $10^1 = 10$; $(-7)^1 = -7$.

b) $318^0 = 1$; $1^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$.

c) $2 - 5^0 = 2 - 1 = 1$ (Reihenfolge der Rechenoperationen beachten!).

Der "unsichtbare Einser": Jede Variable hat den Exponenten 1, obwohl dieser in der Regel nicht geschrieben wird:

$a = a^1$.

Solche unsichtbaren Einser treten in der Mathematik öfters auf. So können wir beispielsweise auch schreiben (was beim Rechnen oft hilfreich sein kann):

$a = \frac{a}{1}$, $a = 1 \cdot a$.

Eine weitere sich als sinnvoll erweisende Defintion legt Potenzen mit *negativen* ganzzahligen Hochzahlen fest:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)}$$

Beispiel 2.41 : Potenzen mit negativen Hochzahlen

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

b) $8{,}2 \cdot 10^{-3} = 8{,}2 \cdot \frac{1}{10^3} = 8{,}2 \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}0082$.

c) $\frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2 = 9$.

d) Umgekehrt können **Brüche als Potenzen mit negativen Hochzahlen** geschrieben werden: $\frac{1}{4} = 4^{-1}$; $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$; $\frac{1}{b^4} = b^{-4}$; $\frac{3}{4^5} = 3 \cdot 4^{-5}$.

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$.

Eine negative Hochzahl in einer Potenz kann als Aufforderung gesehen werden, diese als *Kehrwert* der Potenz mit positiver Hochzahl zu schreiben:

$$\blacksquare^{-\circ} = \frac{1}{\blacksquare^{\circ}}$$

Eine negative Hochzahl hat nichts mit dem Vorzeichen der Potenz zu tun!

Beispiel 2.42 : Potenzen mit negativen Hochzahlen (Weiterführung)

a) Schreibe mit positiven Hochzahlen: $\frac{a \cdot b^{-2}}{c^{-3}}$

b) Schreibe ohne Bruchstrich: $\frac{2}{x^3 \cdot y^{-1}}$

Lösung

Zu **a)** $\frac{a \cdot \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^3}} = \frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{1}{c^3}} = \frac{a \cdot c^3}{b^2}$;

Zu **b)** $\frac{2}{x^3 \cdot \frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{x^3}{y}} = \frac{2y}{x^3} = 2\,y\,x^{-3}$.

Wir können auch sagen: Wechselt eine Potenz in Brüchen wie im Beispiel 2.42 vom Zähler in den Nenner oder umgekehrt, so ändert sich das Vorzeichen ihrer Hochzahl.

Auch beim Schreiben von Maßeinheiten werden öfters zur Vermeidung von Brüchen negative Hochzahlen verwendet. Einige Beispiele:

Einheit der Geschwindigkeit: $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

Einheit der Beschleunigung: $\frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$

Einheit der Kraft: $N = kg \cdot \frac{m}{s^2} = kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Zehnerpotenzen: Potenzen mit der Basis (Grundzahl) 10.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$10^4 = 10000$ (4 Nullen nach der Ziffer 1)
$10^3 = 1000$
$10^2 = 100$
$10^1 = 10$
$10^0 = 1$
$10^{-1} = 0{,}1$
$10^{-2} = 0{,}01$
$10^{-3} = 0{,}001$
$10^{-4} = 0{,}0001$ (Ziffer 1 auf der *vierten* Nachkommastelle)
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Dezimalzahlen lassen sich übersichtlich als **Summe** schreiben, wenn man Zehnerpotenzen verwendet:

$$\begin{aligned} 438{,}75 &= 400 + 30 + 8 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} \\ &= 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.43 : Zehnerpotenzen

a) Schreibe als Zehnerpotenz: 1; 100 000; 10 000 000 000; 0,01; 0,0000001.

b) Schreibe die Zahlen 13,14; 1,207; 0,2345 in der Summenschreibweise unter Verwendung von Zehnerpotenzen.

Lösung

Zu **a)** 10^0; 10^5; 10^{10}; 10^{-2}; 10^{-7}.

Zu **b)** $13{,}14 = 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$.
$1{,}207 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.
$0{,}2345 = 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$.

Große Zahlen

Wie lange braucht man, bis man beim Zählen 1 Million, also 10^6, erreicht, wenn man in 1 Sekunde um 1 weiterzählt? Pro Stunde kommt man um 3600 weiter; dividiert man daher 1 000 000 durch 3600, so erhält man etwa 277,8 Stunden, das sind etwa 11,6 Tage! Um auf die gleiche Weise bis 1 Milliarde zu zählen, würde man bereits knapp 32 Jahre brauchen, und das ohne jede Pause!

10^{100} wird manchmal 1 Googol genannt; diese Zahl übertrifft schon weit die Anzahl der Atome (etwa 10^{80}) in unserem Weltall. Es ist eine Zahl mit 100 Nullen hinter dem Einser. Man kann damit die Frage stellen, wie weit Zahlen in diesen Größenordnungen in der Natur überhaupt noch "existieren" oder ob sie nur in unseren Köpfen gedacht werden.

Die größte Zahl, die man mit 3 Ziffern schreiben kann, ist $9^{(9^9)}$; das ist näherungsweise gleich $10^{369\,693\,100}$, eine Zahl mit 369 693 100 Nullen hinter dem Einser. Sie ist ungeheuer größer als 1 Googol; ein Laserdrucker, der 8 Seiten zu je 4000 Ziffern pro Minute druckt, würde etwa 8 Tage zum Ausdruck brauchen.

Aufgaben

2.99 Berechne (ohne Taschenrechner):

a) $0{,}3^2$ **b)** $(-0{,}3)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ **e)** $\frac{1}{2^3}$

f) $\frac{1}{0{,}1^2}$ **g)** $\left(\frac{1}{4}\right)^1$ **h)** $2 \cdot 4^2$ **i)** $2 \cdot 2^0$ **j)** $(2 \cdot 2)^0$

2.100 Ebenso:

a) $4 + 2^3$ **b)** $(4 + 2) \cdot 3^2$ **c)** $4 + (2 \cdot 3)^2$ **d)** $(4 + 2 \cdot 3)^2$

2.101 Ebenso:

a) $(-4)^2$ **b)** -4^2 **c)** $(-4)^3$ **d)** -4^3 **e)** $-2 \cdot (-2)^2$

f) $2 \cdot (-2)^3$ **g)** $2^2 + (-2)^2$ **h)** $2^3 + (-2)^3$ **i)** $-2^2 + (-2)^2$ **j)** $-2^3 - (-2)^3$

2.102 Sind folgende Gleichungen richtig?

a) $(-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 2^2$ **b)** $-1^4 + (-2)^2 = (-1)^4 + 2^2$ **c)** $3^4 - (-3)^4 = 0$

2.103 Schreibe ohne negative Hochzahlen:

a) 3^{-2} $\frac{1}{3^2}$ **b)** $0{,}1^{-3}$ $\frac{1}{0{,}1^3}$ $\frac{1}{10^3}$ **c)** $3 \cdot 4^{-5}$ $\frac{3}{4^5}$ **d)** $3 \cdot 5^{-1}$ $\frac{3}{5}$ **e)** $\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}$ $\frac{8}{3}$

f) x^{-3} $\frac{1}{x^3}$ **g)** $4 \cdot x^{-2} \cdot y^{-3}$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ **i)** $\frac{2^{-2}}{3}$ **j)** $\frac{2}{2^{-3}}$

k) $\frac{2^{-2}}{3^{-2}}$ **l)** $(a + b)^{-1}$ **m)** $(x - 2y)^{-2}$ **n)** $1 + 3 \cdot y^{-3}$ **o)** $2 - (5x)^{-2}$

2.104 Berechne (ohne Taschenrechner):

a) $(-2)^{-1}$ $-\frac{1}{2}$ **b)** $(-2)^{-2}$ $\frac{1}{4}$ **c)** $(-2)^3$ -8 **d)** -2^{-3} $-\frac{1}{8}$ **e)** $\frac{3^{-2}}{2}$ $-\frac{1}{18}$

f) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$ $\frac{9}{2}$ **g)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **i)** $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ **j)** $\frac{1}{10^{-3}}$ $\cdot 10^3$

2.105 Schreibe ohne negative Hochzahlen:

a) $2 \cdot x^{-2}$ **b)** $3^{-1} \cdot x$ **c)** $(4x)^{-1}$ **d)** $\frac{2}{x^{-3}}$

e) $\frac{2 \cdot a^{-4}}{b}$ **f)** $\frac{x y^{-2}}{z^{-1}}$ **g)** $\frac{a^{-3}}{b^{-1} c^{-2}}$ **h)** $2x^{-3} + 4x^{-2} - x^{-1}$

2.106 Beseitige die Brüche durch Umformung in Potenzen mit negativen Hochzahlen:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4^2}$ **c)** $3 \cdot \frac{x}{y}$ **d)** $\frac{a^2}{b^3}$

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ **f)** $\frac{1}{x + 1}$ **g)** $\frac{2}{(a + b)^2}$ **h)** $\frac{a}{(a - 1)(a + 3)^2}$

2.107 Schreibe folgende Einheiten ohne Bruchstrich:

a) $\frac{J}{kg}$ **b)** $\frac{1}{s}$ **c)** $\frac{A}{m}$ **d)** $\frac{N}{m^2}$ **e)** $\frac{kg}{m^3}$

f) $\frac{J}{m^3}$ **g)** $\frac{kg \cdot m}{s}$ **h)** $\frac{J}{kg\,K}$ **i)** $\frac{V\,s}{m^2}$ **j)** $\frac{W}{m^2 \cdot K}$

2.108 Schreibe als Zehnerpotenz: 10^{-4} 10^{-5} 10^{-8}

a) $\frac{1}{1000}$ **b)** $\frac{1}{10000}$ 10^{-1} **c)** 0,1 **d)** 0,000 01 **e)** 0,000 000 01

2.109 Wie viel ist:

a) 100 mal 100 **b)** 1000 mal 1000 **c)** 1000 mal 1 Million **d)** 1 Million zum Quadrat

2.110 Schreibe die folgenden Zahlen als Summe unter Verwendung von Zehnerpotenzen:

a) 0,2 **b)** 42,802 **c)** −1,113 **d)** 2,40582

2.111 Welche von den folgenden Termen sind gleich: b^2, b^{-2}, $-b^{-2}$, $(-b)^2$

2.7.2 Rechnen mit Potenzen

Beispiel 2.44 : Addition oder Subtraktion von Potenzen

a) $3a^2 + 4a^2 = 7a^2$.

Nur Potenzen mit gleichen Basen *und* gleichen Hochzahlen lassen sich addieren oder subtrahieren!

b) $a^2 + a^3$ (ungleiche Hochzahlen) oder $a^2 + b^2$ (ungleiche Basen) lassen sich nicht addieren (subtrahieren).

c) Jemand rechnet: $x^5 - x^2 = x^3$. Diese "Termumformung" kann durch eine Zahlenprobe leicht als falsch erkannt werden: (etwa) $x = 2$:

Anfangsterm: $2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$; Ergebnisterm: $2^3 = 8$; $28 \neq 8$, wodurch die Rechnung als falsch erkannt wurde.

d) $3x^2 + 5x - x^2 + x = 2x^2 + 6x$.

e) $2x^2y - xy + 2x^2y^2 - 3xy - x^2y = x^2y + 2x^2y^2 - 4xy$. Zahlenprobe: $x = 2$, $y = 3$.

Nur Potenzen mit **sowohl gleicher Grundzahl wie auch gleicher Hochzahl** lassen sich durch **Addition** oder **Subtraktion** zusammenfassen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die nun folgenden **5 Potenzgesetze**.

1. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$a^3 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{3+4}$. Dies lässt sich leicht verallgemeinern:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden *multipliziert,* indem man die Hochzahlen *addiert* und die Basis beibehält.

2. Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}; \quad \frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{2-4};$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0}$$

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden *dividiert,* indem man die Hochzahlen *subtrahiert* und die Basis beibehält.

3. Potenz eines Produktes

$(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 \cdot b^4$. Verallgemeinert:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.

Liest man das Gesetz von rechts nach links, so lautet es: Zwei Potenzen mit gleicher Hochzahl werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und die Hochzahl beibehält.

4. Potenz eines Bruches

$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^4}{b^4}$. Verallgemeinert:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0}$$

Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

Liest man wieder von rechts nach links, so lautet das Gesetz: Zwei Potenzen mit gleicher Hochzahl werden dividiert, indem man die Basen dividiert und die Hochzahl beibehält.

5. Potenz einer Potenz

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$. Verallgemeinert:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert und die Basis beibehält.

Achtung!

Für die **Potenz einer Summe** (oder Differenz) gibt es *kein* Potenzgesetz dieser Art! So ist beispielsweise $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Welche Formel ist hier anzuwenden?

Die 5 Potenzgesetze ($a, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{Z}$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Anmerkung: Wie bei mathematischen Regeln in Gleichungsform üblich, liegt eine wesentliche Anwendung der Potenzrechnung darin, dass die 5 Potenzgesetze auch von rechts nach links gelesen werden.

Ein Beispiel für die Umkehrung des 1. Potenzgesetzes lautet: $3^{n+2} = 3^n \cdot 3^2$. Näheres in den folgenden Beispielen.

Beispiel 2.45 : Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

1. Potenzgesetz

a) $10 \cdot 10^2 = 10^1 \cdot 10^2 = 10^3.$

b) $2a^3 \cdot b \cdot 3a^2 \cdot 5b^3 = 30 \cdot a^5 \cdot b^4.$

c) $(x - 2y)^2 \cdot (x - 2y) \cdot (x + 2y)^2 = (x - 2y)^3 \cdot (x + 2y)^2.$

d) $2^n \cdot (2^{-n} + 2^n) = 2^0 + 2^{n+n} = 1 + 2^{2n}.$

e) Die *Umkehrung* dieser Potenzregel, also die Regel von rechts nach links gelesen, lässt die Zerlegung einer Potenz zu:
$x^5 = x^4 \cdot x^1 = x^3 \cdot x^2; \quad x^{n+2} = x^n \cdot x^2.$

f) Zerlege die Summe $a^{n+2} + a^2$ in ein Produkt!
$a^{n+2} + a^2 = a^n \cdot a^2 + a^2 = a^2 \cdot (a^n + 1)$; Probe durch Ausmultiplizieren.

Beispiel 2.46 : Division von Potenzen mit gleicher Basis

2. Potenzgesetz

a) $2 \cdot \frac{x^5}{x^4} = 2 \cdot x^{5-4} = 2x.$

b) $\frac{-4}{(-4)^3} = \frac{(-4)^1}{(-4)^3} = (-4)^{1-3} = (-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}.$

Natürlich kann man, ebenso wie bei **a)**, den Bruch auch kürzen:

$\frac{-4}{(-4)^3} = \frac{-4}{(-4)(-4)(-4)} = \frac{1}{(-4)(-4)} = \frac{1}{16}.$

Oft kann man die Potenzrechnung wie eben umgehen. Dies kann oft einfacher sein!

c) $\frac{3 \cdot 10^2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10^6}{10^5} = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7{,}5$ oder wieder durch Kürzen.

d) $\frac{xy^2}{x^{-5}} = x^{1-(-5)}y^2 = x^6y^2.$

e) $\frac{x - 3y}{(x - 3y)^3} = (x - 3y)^{1-3} = \frac{1}{(x - 3y)^2}$ oder auch wieder durch Kürzen.

f) Die Lesart des 2. Potenzgesetzes von rechts nach links lässt die folgende Umformung zu:
$a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}.$

Beispiel 2.47 : Potenz eines Produktes

3. Potenzgesetz

a) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8 \cdot x^3.$ Beachte dagegen: $2 \cdot x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x.$
Oder natürlich auch: $(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 8 \cdot x^3.$

b) Anwendung des 3. Potenzgesetzes von rechts nach links:
$0{,}2^3 \cdot 5^3 = (0{,}2 \cdot 5)^3 = 1^3 = 1$, was einen Rechenvorteil bedeutet.

c) $(2xy)^2 = 4x^2y^2.$
Natürlich kann man auch wieder rechnen: $(2xy)^2 = (2xy) \cdot (2xy) = 4x^2y^2.$

Beispiel 2.48 : Potenz eines Bruches

4. Potenzgesetz

a) $\left(\frac{x}{5}\right)^3 = \frac{x^3}{5^3}$; beachte jedoch den Unterschied zu $\frac{x^3}{5}$.

b) $\left(\frac{2\,x}{3}\right)^2 = \frac{(2\,x)^2}{3^2} = \frac{4\,x^2}{9}$.

Unter Umgehung des 4. Potenzgesetzes könnte man natürlich wieder – wie auch in **a)** Bruchrechnungen betreiben und folgendermaßen vorgehen:

$$\left(\frac{2\,x}{3}\right)^2 = \frac{2\,x}{3}\cdot\frac{2\,x}{3} = \frac{4\,x^2}{9}.$$

c) Anwendung des 4. Potenzgesetzes von rechts nach links:

$$\frac{6^3}{3^4} = \frac{6^3}{3^3\cdot 3} = \frac{6^3}{3^3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} = 2^3\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Beispiel 2.49 : Potenz einer Potenz

5. Potenzgesetz

a) $(10^2)^3 = 10^6$; $(10^2)^{-3} = 10^{-6}$; $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$; $(10^{-2})^{-3} = 10^6$;

b) $(x^{-1})^2 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

oder als Bruchrechnung: $(x^{-1})^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$.

c) $(2\cdot x^2)^3 = 2^3\cdot(x^2)^3 = 8\cdot x^6$ (zuerst als Potenz eines Produktes mit dem 3. Potenzgesetz). Natürlich könnte man auch rechnen: $(2\cdot x^2)\cdot(2\cdot x^2)\cdot(2\cdot x^2) = \ldots$

Hinweis: Mehrfaches Kürzen führt bei umfangreicheren Termen zur Unübersichtlichkeit. Es besteht kaum die Möglichkeit, das Rechenergebnis zu kontrollieren. Daher ist hier die Anwendung der Potenzgesetze gegenüber der Bruchrechnung vorzuziehen.

Aufgaben

2.112 Vereinfache möglichst weitgehend:

a) $x^3 + x + x^3$ **b)** $4n^2 - 7n^2 + n^2$ **c)** $2y^2 - x^2 + y^2 - x^2$

d) $3x^3 - x^2 + 5x^2 - 2x^3 - x$ **e)** $x^2 + xy^2 + x^2y + xy^2$ **f)** $\frac{1}{3}a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + 2ab^2 - 3ab^2$

2.113 Wahr oder falsch?

a) $2^3 + 2^4 = 2^7$ **b)** $x + x^2 = x^3$ **c)** $2\cdot a^2 = a^2 + a^2$ **d)** $u^3 + u^3 = u^6$

e) $3^3\cdot 2^3 = 6^3$ **f)** $2^4\cdot 2^2 = 2^8$ **g)** $2^4\cdot 2^2 = 4^6$ **h)** $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

2.114 Berechne und schreibe das Ergebnis potenzfrei:

a) $10\cdot 10^2$ **b)** $10^{-3}\cdot 10^2$ **c)** $10^{-2}\cdot 10^{-4}$ **d)** $10^{-3}\cdot 10^3$ **e)** $10\cdot 10^4 + 10^5$

f) $10^4 + 10^4$ **g)** $10^4 + 10^3$ **h)** $10^5 + 2\cdot 10^4$ **i)** $10^5 - 10^4$ **j)** $10^{-1} - 10^{-2}$

2.115 Vereinfache:

a) $u^3\cdot u^4$ **b)** $a^2\cdot a^{-1}$ **c)** $2y\cdot y^2$ **d)** $r^2\cdot(2r)\cdot r^{-2}$ **e)** $b^n\cdot b^2$

f) $2k^2\cdot 3k^m$ **g)** $3w^{n-1}\cdot w$ **h)** $t^n\cdot t^3\cdot t^{1-n}$ **i)** $2(t^{3+n}\cdot t^{-n})$ **j)** $c^{-1}\cdot c^{m+1}\cdot c$

2.116 Vereinfache:

a) $2x^{-3} \cdot b^3 \cdot 2^{-1} \cdot x^4$ **b)** $2a \cdot 5^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot 10$ **c)** $4^{-2} \cdot r^{-1} \cdot 8s^2 \cdot r^2$

d) $3^{-3} \cdot u^{-2} \cdot v \cdot 54u^3v$ **e)** $(3n-m) \cdot (3n-m)$ **f)** $(3n-m) \cdot (3n-m)^{-1}$

g) $(3n-m) \cdot (3n-m)^2$ **h)** $(3n-m) \cdot (m-3n)^2$

2.117 Berechne:

a) $\frac{2^4}{2^2}$ **b)** $\frac{3^5}{3}$ **c)** $\frac{10^2}{10^3}$ **d)** $\frac{10^{-2}}{10^3}$ **e)** $\frac{-7}{7^{-3}}$

f) $\frac{10^{-1}}{10^{-4}}$ **g)** $\frac{(-4)^2}{4^{-1}}$ **h)** $\frac{(-4)^2}{(-4)^{-1}}$ **i)** $\frac{x^{n+3}}{(-x)^2}$ **j)** $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$

2.118 Für welches n entsteht eine wahre Aussage?

a) $2^n \cdot 2^2 = 2^5$ **b)** $2^{-1} \cdot 2^n = 2^3$ **c)** $2^{-1} \cdot 2^n = 1$ **d)** $3^{-1} \cdot 3^n = 3$ **e)** $2^n \cdot 4 = 2^5$

f) $3^n \cdot 3^n = 3^8$ **g)** $2^n \cdot 2^{n-1} = 2^5$ **h)** $\frac{4^n}{4^2} = 4^{-5}$ **i)** $\frac{2^{-3}}{2^n} = 1$ **j)** $4 \cdot \frac{2^{-n}}{2^n} = 1$

2.119 Vereinfache:

a) $\frac{10^{n+3}}{1000}$ **b)** $\frac{4^{-x}}{4^{2-x}}$ **c)** $\frac{(2x)^3}{2x}$ **d)** $\frac{4u^{2n}}{u^n \cdot v}$ **e)** $\frac{u^{2n+1}}{u^{n+1}}$

f) $r \cdot \frac{r^{n+1}}{r^{n-1}}$ **g)** $\frac{1}{2a^3} : a^{-3}$ **h)** $\frac{(-b)^2}{b^{-2}} : b^{-1}$ **i)** $\frac{(u+2v)^3}{(u+2v)^2}$ **j)** $\frac{4-x}{(4-x)^{-2}}$

2.120 Führe aus oder vereinfache:

a) $(4a)^3$ **b)** $(2ab)^2$ **c)** $b \cdot (4b)^2$ **d)** $2x^3 \cdot (2x)^3$ **e)** $\frac{(2u)^2}{2u^2}$

f) $\frac{2^3}{(2b)^2}$ **g)** $\frac{4 \cdot (2b)}{(-2b)^2}$ **h)** $\frac{(2u)^2}{(2u)^{-1}}$ **i)** $\frac{(4u)^2}{(2u)^{-1}}$ **j)** $\frac{(-2a)^3}{(4ab)^{-1}}$

2.121 Berechne günstig (Umkehrung des 3. Potenzgesetzes!):

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3^2$ **b)** $0{,}2^2 \cdot 5^2$ **c)** $0{,}4^3 \cdot 10^3$ **d)** $4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 12^4$

2.122 Führe aus bzw. vereinfache:

a) $\left(\frac{y}{2}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{4b}{3a}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{-2xy}{3}\right)^2$ **d)** $\left(\frac{r}{s}\right)^4 \cdot s^4$ **e)** $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^{2n}$

2.123 Berechne günstig (Umkehrung des 4. Potenzgesetzes!):

a) $\frac{9^3}{3^3}$ **b)** $\frac{12^5}{6^5}$ **c)** $\frac{3^4}{1{,}5^4}$ **d)** $\frac{2^2}{0{,}25^2}$ **e)** $0{,}5^2 : 0{,}1^2$

2.124 Vereinfache:

a) $(2^3)^2$ **b)** $(4^0)^2$ **c)** $(2^{-2})^2$ **d)** $(3^{-1})^{-2}$ **e)** $(x^5)^2$

f) $(2x^2)^2$ **g)** $(x^{3n})^2$ **h)** $(-y^3)^2$ **i)** $(5^{-1}a)^{-2}$ **j)** $(bc^{-3})^{-1}$

k) $(2^{2n})^3$ **l)** $(4^n)^n$ **m)** $(2^{n-1})^m$ **n)** $(3u^{m+1})^2$ **o)** $(k^{-1}s^{-n})^{-1}$

2.125 Schreibe 3^{12} als Potenz von

a) 9 **b)** 27 **c)** 81 **d)** 729 (= 3^6)

2.126 Berechne:

a) $(2^2)^3$ **b)** $(2^3)^2$ **c)** $2^{(2^3)}$ **d)** $2^{(3^2)}$ **e)** $(5 \cdot 10^2)^2$

f) $(-3 \cdot 10^{-1})^2$ **g)** $(5 \cdot 10^2)^{-1}$ **h)** $(2 \cdot 10^2)^{-2}$ **i)** $(-2 \cdot 10^2)^{-2}$ **j)** $(-4 \cdot 10^{-3})^{-1}$

2.127 Führe aus bzw. vereinfache:

a) $(-2x^2)^2$ **b)** $\left(\frac{3}{a^2}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$ **d)** $(a^{-1} \cdot b^3)^2$ **e)** $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-1}$

f) $(uv^{-1})^{-1}$ **g)** $(m^{-1}n^{-1})^{-1}$ **h)** $(r^{-2}s^2)^{-1}$ **i)** $\left(2 \cdot \frac{a}{b^{-2}}\right)^{-2}$ **j)** $\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^3\right]^{-2}$

2.128 Berechne oder vereinfache:

a) $(-x)^2 \cdot (-x^2)$ **b)** $(-2u^2)^3$ **c)** $(-3u^{-1})^2$ **d)** $\left(\frac{1}{2} \cdot a^2\right)^{-1}$ **e)** $(-3r^{-2})^{-1}$

2.129 Wahr oder falsch?

a) $a^{n+1} = a^n \cdot a$ **b)** $x^{n+2} = x^n + x^2$ **c)** $t^{n-2} = t^n - t^2$ **d)** $u^{4-m} = \frac{u^4}{u^m}$

2.130 Welche der Ausagen sind wahr, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist?

a) $(-1)^{2n} = 1$ **b)** $(-1)^{2n+1} = -1$ **c)** $(-1)^{2n-1} = -1$ **d)** $(-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = 1$

2.131 Ergänze:

a) $3^5 = 3^2 \cdot 3^?$ **b)** $5^2 = 5^4 \cdot 5^?$ **c)** $4^{m+1} = 4 \cdot 4^?$ **d)** $4^{2n-1} = 4^n \cdot 4^?$

2.132 Zerlege durch *Herausheben* von 2^n in ein Produkt:

a) $2^{n+1} + 2^n$ **b)** $2^{2n} + 2^n$ **c)** $2^{n+1} + 2^{3n}$ **d)** $2^{n+m} + 2^{n+1}$

2.133 Berechne bzw. vereinfache:

a) $x^n \cdot (x^n - x^{-n})$ **b)** $s^{-n} \cdot (s^n - s^{-n})$ **c)** $(2^n + 2^{-n})^2$ **d)** $\frac{r^m + r^{-m}}{r^m}$

e) $\frac{a^{2n} - a^n}{a^n}$ **f)** $\frac{b^{2n} + b^n}{b^{2n}}$ **g)** $(a^n + a^{-n}) \cdot (a^n - a^{-n})$ **h)** $p^{2n} \cdot (1 - p^{-4n})$

2.134 Vereinfache:

a) $\frac{4\,b^2\,x^3}{20\,b^3\,x^2}$ **b)** $\frac{35\,u\,v^2\,w^4}{5\,u^2\,v\,w}$ **c)** $\frac{21\,r^4 \cdot s^2 \cdot t^3}{84 \cdot (s\,t)^2}$

d) $\frac{(3\,x\,y)^3 \cdot (4\,x\,y)^2}{(2\,x\,y)^2 \cdot 3\,(x\,y)^3}$ **e)** $\frac{4\,r^2\,s}{(2\,r\,s)^2} : \frac{(r\,s)^2}{4\,r\,s^4}$ **f)** $\frac{3\,y\,z}{4\,x} \cdot \frac{2\,x^3\,y^2}{5} : \frac{3(x\,y)^2}{4\,z}$

g) $\frac{4\,u}{x\,y} : \frac{\frac{t}{(x\,y)^2}}{\frac{3\,t}{(2\,u)^2}}$ **h)** $\left(p^2 \cdot \frac{q^{-2}}{r^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{(2\,r)^2}{(p\,q)^{-1}}\right)^2$ **i)** $\left(\frac{r^{-2}\,s^0}{\frac{1}{r} \cdot t^{-1}}\right)^{-2}$

j) $\left(-\frac{2\,m^{-1}\,n}{5 \cdot \frac{1}{m}}\right)^{-2}$ **k)** $\left(\frac{1}{2\,k}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{3\,k^2}{s}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{k}{2\,s}\right)^{-1}$ **l)** $\left(\frac{a^2}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{-4}{a\,b}\right)^n \cdot \left(\frac{b^2}{2\,a^2}\right)^n$

2.135 Die Zusammenfassung von 8 Bit heißt in der EDV Byte. 2^{10} Byte = 1024 Byte heißen 1 KByte (K = Kilo), abgekürzt 1 KB. Wie viele KB sind

a) 2^{11} Byte, **b)** 2^{12} Byte, **c)** 2^{16} Byte, **d)** 2^{20} Byte?

2.136 Um einen Speicherplatz von 1 Byte anzusprechen, sind sogenannte Adressleitungen nötig; mit n Adressleitungen können 2^n Bytes versorgt werden. Wie viele Adressleitungen sind daher für 64 KB nötig?

2.7.3 Gleitkommadarstellung

Jede (positive) Zahl kann als Produkt einer Zahl m zwischen 1 und 10 (genauer: $1 \leqslant m < 10$) und einer Zehnerpotenz geschrieben werden, die die *Größenordnung* der Zahl angibt. Diese Schreibweise heißt (normalisierte) **Gleitkommadarstellung** oder Gleitpunktdarstellung der Zahl (Abb. 2.29).

Der Faktor m vor der Zehnerpotenz wird **Mantisse** genannt.

Die Gleitkommadarstellung wird auch wissenschaftliche Schreibweise (scientific notation) genannt. In Rechnern dient die Gleitkommadarstellung zur im Allgemeinen näherungsweisen Abspeicherung von Zahlen. Dabei werden Mantisse und Exponent getrennt gespeichert.

$$\begin{array}{rcc}
123 = & \boxed{1{,}23} & 10^{2} \\
12{,}3 = & \boxed{1{,}23} & 10^{1} \\
1{,}23 = & \boxed{1{,}23} & 10^{0} \\
0{,}123 = & \boxed{1{,}23} & 10^{-1} \\
0{,}0123 = & \boxed{1{,}23} & 10^{-2} \\
\textbf{Zahl} \; = & \textbf{Mantisse} \cdot & \textbf{Zehnerpotenz}
\end{array}$$

Abb. 2.29 Gleitkommadarstellung

Aus Abb. 2.29 ergibt sich folgende Vorgangsweise, eine Zahl in der Gleitkommadarstellung zu schreiben:

Verschiebe das Dezimalkomma hinter die erste von null verschiedene Ziffer. Die **Anzahl der Stellen**, um die das Komma verschoben wurde, ist der **Exponent der Zehnerpotenz**.

Bei einer Linksverschiebung ist der Exponent positiv, bei einer Rechtsverschiebung negativ.

Beispiel 2.50 : Umwandlung einer Zahl in die Gleitkommadarstellung

a) 2400 **b)** 389 000 **c)** 0,473 **d)** 0,000 000 59

Lösung

Zu **a)** $2\underbrace{400,} = 2{,}4 \cdot 10^{3}$

Kommaverschiebung um
3 Stellen nach links

Zu **b)** $3\underbrace{89\,000,} = 3{,}89 \cdot 10^{5}$

Kommaverschiebung um
5 Stellen nach links

Zu **c)** $0\underbrace{,4}73 = 4{,}73 \cdot 10^{-1}$

Kommaverschiebung um
1 Stelle nach rechts

Zu **d)** $0\underbrace{,000\,000\,5}9 = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$

Kommaverschiebung um
7 Stellen nach rechts

Merkregel zu **d)**: Auf der 7. Nachkommastelle steht die erste von null verschiedene Ziffer; daher der Exponent −7.

Bei der Rückführung von der Gleitkommadarstellung in die gewöhnliche Schreibweise braucht nur das Komma in der Mantisse um so viele Stellen verschoben zu werden, wie die Hochzahl der Zehnerpotenz angibt.

Beispiel 2.51 : Umwandlung Gleitkommadarstellung in die gewöhnliche Schreibweise

a) $1{,}83 \cdot 10^3 = 1{,}83 \cdot 1000 = 1830$

Die Multiplikation mit 10^3 verschiebt das Komma in der Mantisse um drei Stellen nach rechts. Die Zahl ist von der Größenordnung Tausend, was zur Kontrolle der Umwandlung dienen kann.

b) $7{,}11 \cdot 10^{-4} = 7{,}11 \cdot \frac{1}{10\,000} = 0{,}000711$

Die Multiplikation mit 10^{-4} verschiebt das Komma um vier Stellen nach links. Die Zahl ist von der Größenordnung Zehntausendstel, was wieder zur Kontrolle der Umwandlung dienen kann.

Merkregel: Weil die Hochzahl der Zehnerpotenz – 4 ist, steht die erste von null verschiedene Ziffer an der vierten Nachkommastelle bei gewöhnlicher Schreibweise der Zahl.

Die Gleitkommadarstellung wird als wissenschaftliche Schreibweise vielfach in den Naturwissenschaften angewendet:

Elektronenmasse: $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Elementarladung e = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C (statt 0,000 000 000 000 000 000 1602 C)

Atomradien: $5 \cdot 10^{-11}$ m bis $8 \cdot 10^{-10}$ m

Durchmesser eines roten Blutkörperchens: $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m

Mittlerer Abstand Erde – Mond: $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m

1 Astronomische Einheit (AE) = mittlere Entfernung Erde – Sonne: $1{,}49 \cdot 10^{8}$ km

Anzahl der Nervenzellen des menschlichen Gehirns: ca. 10^{11}

1 Lichtjahr: $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km ($\approx 1 \cdot 10^{13}$ km)

Mondmasse: $7 \cdot 10^{22}$ kg; Erdmasse: $6 \cdot 10^{24}$ kg;

Sonnenmasse: $2 \cdot 10^{30}$ kg

Durchmesser des Universums: ca. 10^{26} m.

Taschenrechnereingabe von Zahlen in Gleitkommadarstellung: Beispiel: $8{,}43 \cdot 10^{-5}$

TI-30Xa, TI-30 ecoRS	8 [·] 43 [EE] 5 [+⇄−]
TI-30X IIB, TI-30X IIS	8 [·] 43 [■] [x^{-1}] [(−)] 5
Voyage 200 (TI-89)	8 [·] 43 [2ND] 1 [(−)] 5

Ob die eingegebene Zahl auch in der Gleitkommadarstellung angezeigt wird, hängt vom gewählten Anzeigeformat ab.

Für bestimmte Zehnerpotenzen (meist Tausenderpotenzen) sieht das **Internationale Einheitensystem (SI, Système International d'Unités)** eine besondere Schreibweise vor, wodurch sich die Gleitkommadarstellung vereinfacht.

Beispiele: $4{,}2 \cdot 10^{6}$ W = 4,2 MW (Megawatt); $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ s = 2,1 ms (Millisekunden).

[illegible]

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

Vorsilbe	Abkürzung	Zehnerpotenz, mit der die Einheit multipliziert wird (Größenordnung!)	Name
Exa	E	10^{18}	Trillion = (1 Million)^3
Peta	P	10^{15}	Billiarde
Tera	T	10^{12}	Billion = (1 Million)^2
Giga	G	10^{9}	Milliarde (USA: Billion!)
Mega	M	10^{6}	Million
Kilo	k	10^{3}	Tausend
Hekto	h	10^{2}	Hundert
Deka	da	10^{1}	Zehn
– [illegible]	–	10^{0}	Eins
Dezi	d	10^{-1}	Zehntel
Zenti	c	10^{-2}	Hundertstel
Milli	m	10^{-3}	Tausendstel
Mikro	µ	10^{-6}	Millionstel
Nano	n	10^{-9}	Milliardstel
Piko	p	10^{-12}	Billionstel
Femto	f	10^{-15}	Billiardstel
Atto	a	10^{-18}	Trillionstel

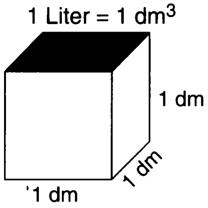
Beispiele:

2 GW = $2 \cdot 10^9$ W (Watt); 3 MHz = $3 \cdot 10^6$ Hz (Hertz); 5 hl = $5 \cdot 10^2$ *l*;
2 µm = $2 \cdot 10^{-6}$ m; 4 pF = $4 \cdot 10^{-12}$ F.

Das Byte, die Zusammenfassung von 8 Bit, ist ein Maß für die Speicherkapazität eines Rechners. Sie wird durch die Anzahl der KByte (KB), MByte (MB) oder GByte (GB) angegeben. Die Buchstaben K, M und G bedeuten hier jedoch oft nicht 10^3, 10^6 und 10^9, sondern die etwas größeren Zahlen $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1\,048\,576$ und $2^{30} = 1\,073\,741\,824$.

Zur Erinnerung: Längen-, Flächen- und Raummaße sowie Massenmaße

Umrechnungen			Umwandlungszahl
1 m = 10 dm 1 dm = $\frac{1}{10}$ m	1 dm = 10 cm 1 cm = $\frac{1}{10}$ dm	1 cm = 10 mm 1 mm = $\frac{1}{10}$ cm	10 bzw. $\frac{1}{10}$
1 m^2 = 100 dm^2 1 dm^2 = $\frac{1}{100}$ m^2	1 dm^2 = 100 cm^2 1 cm^2 = $\frac{1}{100}$ dm^2	1 cm^2 = 100 mm^2 1 mm^2 = $\frac{1}{100}$ cm^2	100 bzw. $\frac{1}{100}$
1 m^3 = 1000 dm^3 1 dm^3 = $\frac{1}{1000}$ m^3	1 dm^3 = 1000 cm^3 1 cm^3 = $\frac{1}{1000}$ dm^3	1 cm^3 = 1000 mm^3 1 mm^3 = $\frac{1}{1000}$ cm^3	1000 bzw. $\frac{1}{1000}$



1 kg = 100 dag = 1000 g; 1 Tonne (t) = 1000 kg;
1 Karat (k) = 0,0002 kg = 0,2 g (bei Edelsteinen).

Weiters: 1 Ar (a) = 100 m^2;
1 Hektar (ha) = 100 a = 10^4 m^2.
Beachte auch: 1 *l* = 1 dm^3; 1 ml = 1 cm^3.

Einige nichtmetrische Maße, die noch in Großbritannien oder den USA gebräuchlich sind:
1 inch (Zoll, 1") = 25,4 mm; 1 foot = 12 inches; 1 yard = 3 feet;
1 mile (Meile) = 1760 yards = 1,609 km.
1 gallon (Gallone) = 4,546 *l* (Großbritannien) bzw. = 3,785 *l* (USA); 1 barrel (Erdöl) = 158,97 *l*.
1 ounce (Unze) = 28,35 g; 1 pound (Pfund, 1 lb) = 16 ounces (Unzen) = 453,59 g.

Beispiel 2.52 : Umwandlungen bei Längen-, Flächen- und Volumsangaben sowie Massenangaben

Wandle um

a) 4,32 km in m
b) 0,14 μm in cm
c) 0,0043 m^2 in cm^2
d) $3{,}28 \cdot 10^5$ mm^2 in dm^2
e) $4{,}86 \cdot 10^{-5}$ m^3 in mm^3
f) 340 cm^3 in m^3
g) 0,042 m^3 in *l*
h) 0,83 dm^3 in m*l*
i) 12 cl in m^3
j) 0,0034 t in kg
k) 0,034 dag in mg
l) 0,00072 g in μg

Lösung

Zu **a)** 4,32 km = $4{,}32 \cdot 10^3$ m.

Zu **b)** 0,14 μm = $0{,}14 \cdot 10^{-6}$ m = $1{,}4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6}$ m = $1{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2$ cm = $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm.

Zu **c)**

Die Umwandlung von m^2 in cm^2 erfolgt in zwei Umwandlungsschritten mit der Umwandlungszahl 100: von m^2 in dm^2 und von dm^2 in cm^2. Daher ist $100 \cdot 100 = 10^4$ die Umwandlungszahl von m^2 in cm^2.

Somit: 0,0043 m^2 = $4{,}3 \cdot 10^{-3}$ m^2 = $4{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4$ cm^2 = $4{,}3 \cdot 10^1$ cm^2 = 43 cm^2.

Zu **d)**

Die Umwandlung von mm^2 in dm^2 erfolgt in zwei Umwandlungsschritten mit der Umwandlungszahl $\frac{1}{100} = 10^{-2}$: von mm^2 in cm^2 und von cm^2 in dm^2. Daher ist $10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-4}$ die Umwandlungszahl von mm^2 in dm^2.

Somit: $3{,}28 \cdot 10^5$ mm^2 = $3{,}28 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4}$ dm^2 = $3{,}28 \cdot 10$ dm^2 = 32,8 dm^2.

Zu **e)**

Die Umwandlung von m^3 in mm^3 erfolgt in drei Umwandlungsschritten mit der Umwandlungszahl $1000 = 10^3$: von m^3 in dm^3, von dm^3 in cm^3 und von cm^3 in mm^3. Daher ist $10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^9$ die Umwandlungszahl von m^3 in mm^3!

Somit: $4{,}86 \cdot 10^{-5}$ m^3 = $4{,}86 \cdot 10^{-5} \cdot 10^9$ mm^3 = $4{,}86 \cdot 10^4$ mm^3.

Zu **f)**

Die Umwandlung von cm^3 in m^3 erfolgt in zwei Umwandlungsschritten mit der Umwandlungszahl $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$: von cm^3 in dm^3 und von dm^3 in m^3. Daher ist $10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6}$ die Umwandlungszahl von cm^3 in m^3.

Somit: 340 cm^3 = $3{,}4 \cdot 10^2$ cm^3 = $3{,}4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}$ m^3 = $3{,}4 \cdot 10^{-4}$ m^3.

Zu g) Da die Umwandlung von m^3 in dm^3 (= *l*) in nur einem Schritt mit der Umwandlungszahl 10^3 erfolgt, ist $0{,}042\ \text{m}^3 = 4{,}2\cdot 10^{-2}\cdot 10^3\ l = 4{,}2\cdot 10^1\ l = 42\ l$.

Zu h) $0{,}83\ \text{dm}^3 = 0{,}83\ l = 0{,}83\cdot 1\ l = 0{,}83\cdot 10^3\ \text{ml} = 830\ \text{ml}$.

Zu i) $12\ \text{cl} = 12\cdot 10^{-2}\ l = 12\cdot 10^{-2}\ \text{dm}^3 = 12\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$.

Zu j) $0{,}0034\ \text{t} = 3{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{t} = 3{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 10^3\ \text{kg} = 3{,}4\ \text{kg}$.

Zu k) $0{,}034\ \text{dag} = 0{,}034\cdot 10\ \text{g} = 0{,}34\ \text{g} = 0{,}34\cdot 10^3\ \text{mg} = 340\ \text{mg}$.

Zu l) $0{,}00072\ \text{g} = 7{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{g} = 7{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 10^6\ \mu\text{g} = 7{,}2\cdot 10^2\ \mu\text{g} = 720\ \mu\text{g}$.

Beispiel 2.53 : Umrechnungen bei physikalischen Einheiten

Rechne um

a) 1 km/h in m/s **b)** 1 kg/m^3 in g/cm^3 **c)** 1 N/mm^2 in N/m^2
d) 1 mg/mm^3 in kg/m^3 **e)** 1 *l*/s in m^3/h **f)** 1 kW/m^2 in W/cm^2

Lösung

Zu a) $1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \frac{1000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}278\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zu b) $1\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1\ \text{kg}}{1\ \text{m}^3} = \frac{10^3\ \text{g}}{10^6\ \text{cm}^3} = \frac{10^3}{10^6}\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^{-3}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Zu c) $1\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{mm}^2} = \frac{1\ \text{N}}{10^{-6}\ \text{m}^2} = \frac{1}{10^{-6}}\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^6\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Zu d) $1\frac{\text{mg}}{\text{mm}^3} = \frac{1\ \text{mg}}{1\ \text{mm}^3} = \frac{10^{-6}\ \text{kg}}{10^{-9}\ \text{m}^3} = \frac{10^{-6}}{10^{-9}}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Zu e) $1\frac{l}{\text{s}} = \frac{1\ l}{1\ \text{s}} = \frac{1\ \text{dm}^3}{\frac{1}{3600}\text{h}} = \frac{10^{-3}\text{m}^3}{\frac{1}{3600}\text{h}} = \frac{10^{-3}}{\frac{1}{3600}}\frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 3600\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 3{,}6\ \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$

Zu f) $1\frac{\text{kW}}{\text{m}^2} = \frac{1\ \text{kW}}{1\ \text{m}^2} = \frac{10^3\ \text{W}}{10^4\ \text{cm}^2} = \frac{10^3}{10^4}\frac{\text{W}}{\text{cm}^2} = 10^{-1}\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} = 0{,}1\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$

Aufgaben

2.137 Schreibe in der Dezimaldarstellung: 577000 770.000000 0,93
123 **a)** $1{,}23\cdot 10^2$ 4601 **b)** $4{,}601\cdot 10^3$ **c)** $5{,}77\cdot 10^5$ **d)** $7{,}7\cdot 10^8$ **e)** $9{,}3\cdot 10^{-1}$
f) $4{,}4\cdot 10^{-3}$ 0,0044 **g)** $7{,}87\cdot 10^{-5}$ **h)** $2{,}9\cdot 10^{-7}$ **i)** $3{,}01\cdot 10^{-8}$ **j)** $2{,}9\cdot 10^{-10}$

2.138 Schreibe in der Gleitkommadarstellung:
a) 12,3 $1{,}23\cdot 10^1$ **b)** 5432,1 $5{,}432\times 10^3$ **c)** 100001 $1{,}00\times 10^5$ **d)** 0,12 $1{,}2\times 10^{-1}$
e) – 0,0053 $5{,}3\times 10^{-3}$ **f)** 0,00044 **g)** 0,00000077 **h)** 0,000000000052

2.139 Die Längenausdehnung eines festen Körpers bei Erwärmung um 1 K (Kelvin) heißt sein linearer Wärmeausdehnungskoeffizient α. Im folgenden ist dieser Wert für einige Festkörper angeführt. Schreibe ihn in der Gleitkommadarstellung!

a) Aluminium: 0,0000238 K^{-1}
b) Kupfer: 0,0000164 K^{-1}
c) Invarstahl: 0,0000009 K^{-1}

2.140 Wahr oder falsch?

a) Das Doppelte von 10^7 ist 10^{14}. **b)** Die Hälfte von 10^{-4} ist 10^{-2}.
c) Die Hälfte von 10^6 ist $5 \cdot 10^5$. **d)** Das Doppelte von 10^{-5} ist 0,000 02.
e) Die Hälfte von 10^{-8} ist 0,000 000 005. **f)** Ein Zehntel von 10^{-2} ist 10^{-3}.

2.141 Schreibe mit Zehnerpotenzen:

a) 43 km = … m **b)** 4 m = … cm **c)** 3 m = … dm **d)** 3 dm = … m
e) 5 dm = … km **f)** 3 cm = … km **g)** 5 mm = … dm **h)** 2 μm = … cm

2.142 Schreibe mit Zehnerpotenzen:

a) 8 m^2 = … dm^2 **b)** 2 dm^2 = … cm^2 **c)** 3 m^2 = … cm^2 **d)** 5 dm^2 = … m^2
e) 4 cm^2 = … dm^2 **f)** 5 cm^2 = … m^2 **g)** 7 mm^2 = … dm^2 **h)** 5 mm^2 = … m^2

2.143 Schreibe mit Zehnerpotenzen:

a) 3 m^3 = … dm^3 **b)** 5 dm^3 = … cm^3 **c)** 7 dm^3 = … mm^3 **d)** 4 dm^3 = … m^3
e) 3 cm^3 = … dm^3 **f)** 40 mm^3 = … dm^3 **g)** 340 cm^3 = … *l* **h)** 300 ml = … mm^3

2.144 Wandle um:

a) 2430 dm in cm; m; km **b)** $2{,}87 \cdot 10^3$ cm in mm; dm; m
c) 453 mg in g; dag; kg **d)** $4{,}29 \cdot 10^{-4}$ t in kg; dag; g
e) $6{,}91 \cdot 10^{-3}$ km in m; dm; cm **f)** $3{,}87 \cdot 10^{-5}$ km in dm; cm; mm
g) 0,00033 km in dm; cm; mm **h)** 0,000 0017 km in m; mm; μm

2.145 Wandle um:

a) 3 m^2 in dm^2; cm^2; mm^2 **b)** 400 cm^2 in mm^2; dm^2; m^2
c) 564 mm^2 in cm^2; dm^2; m^2 **d)** 0,34 m^2 in dm^2; cm^2; mm^2
e) 0,0067 dm^2 in cm^2; mm^2; m^2 **f)** 0,000051 m^2 in dm^2; cm^2; mm^2
g) $4{,}23 \cdot 10^3$ cm^2 in m^2; dm^2; mm^2 **h)** $5{,}38 \cdot 10^{-5}$ m^2 in dm^2; cm^2; mm^2

2.146 Wandle um:

a) 1 m^3 in dm^3; cm^3; hl **b)** 0,01 m^3 in dm^3; cm^3; hl
c) 340 dm^3 in m^3; *l*; cm^3 **d)** 4000 cm^3 in *l*; m^3; mm^3
e) $4{,}29 \cdot 10^4$ cm^3 in dm^3; m^3; *l* **f)** $6{,}7 \cdot 10^5$ cm^3 in dm^3; m^3; hl
g) 0,0045 dm^3 in cm^3; dl; mm^3 **h)** 0,0000024 *l* in cm^3; mm^3; ml
i) $2{,}88 \cdot 10^{-4}$ hl in *l*; cm^3; ml **j)** $3{,}17 \cdot 10^{-5}$ m^3 in dm^3; cm^3; mm^3

2.147 Rechne um:

a) $1\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ **b)** $1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = \dots \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ **c)** $1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = \dots \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}}$ **d)** $1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$
e) $1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ **f)** $1\frac{\mathrm{dag}}{\mathrm{cm}^3} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ **g)** $1\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{hl}} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ **h)** $1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{ml}} = \dots \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

2.148 Rechne um:

a) $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \dots \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ **b)** $1\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{min}} = \dots \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **c)** $1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = \dots \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **d)** $1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} = \dots \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
e) $1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} = \dots \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ **f)** $1\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}} = \dots \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ **g)** $1\frac{l}{\mathrm{h}} = \dots \frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{s}}$ **h)** $1\frac{l}{\mathrm{min}} = \dots \frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{s}}$

2.149 Rechne um:

a) $1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}} = \dots \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ **b)** $1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} = \dots \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ **c)** $1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = \dots \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **d)** 1 kWh = … Ws

2.150 Ergänze das Zeichen für die Vorsilbe:

a) 2 mm = 2000 ... m **b)** 0,05 mm = 50 ... m **c)** 3,4 m = 340 ... m

d) 4 dag = 40 ... g **e)** 0,8 l = 80 ... l **f)** 0,04 ms = 40 ... s

2.151 Drücke die folgenden Wellenlängenbereiche wie angegeben aus:

a) Mikrowellen: 0,3 m bis 10^{-3} m in mm

b) Infrarotes Licht: 1 mm bis 780 nm in µm

c) Ultraviolettes Licht: $3{,}8 \cdot 10^{-7}$ m bis $6 \cdot 10^{-10}$ m in nm

2.152 Die Dichte eines Atom*kerns* beträgt etwa $2 \cdot 10^{14}$ g cm^{-3}. Gib die Masse von 1 dm^3 Kernmaterie in Tonnen an und formuliere die Antwort in üblicher Sprechweise (Millionen, Milliarden?).

2.153 Schätze *ohne Taschenrechner* grob die Anzahl der Atome der Erde, wenn man die Erdmasse mit 10^{25} kg und die Masse eines Atoms mit 10^{-23} g annimmt!

2.154 18 g Wasser enthalten etwa $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Wie viele Moleküle sind in 1 l Wasser (d.h. auch 1 kg Wasser) enthalten?

2.155 Die Erde hat einen mittleren Radius $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. Berechne ihre mittlere Dichte ρ, wenn ihre Masse m rund $6 \cdot 10^{24}$ kg beträgt (Kugelvolumen: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$, Dichte $\rho = m/V$).

2.156 Ein Lichtjahr ist jene Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wie viele Kilometer sind dies, wenn die Lichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^5$ km s^{-1} beträgt und ein Jahr im Mittel 365,25 Tage hat?

2.157 Wie lange braucht das Licht von der Sonne bis zu ihrem entferntesten Planeten wie lange zu der ihr nächst gelegenen Nachbarsonne, dem Fixstern Proxima Centauri (Entfernung: $6 \cdot 10^{12}$ m bzw. $4 \cdot 10^{16}$ m, Lichtgeschwindigkeit: $3 \cdot 10^5$ km/s) ?

2.158 Sichtbares Licht besitzt eine Wellenlänge λ zwischen 0,000000380 m und 0,000000780 m.

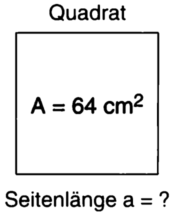
a) Schreibe diese Wellenlängen in Nanometer.

b) Berechne die zugehörigen Frequenzen f, wenn $f = c/\lambda$ und c = 300000 km/s ist.

Wo steckt der Fehler?

$1 \text{ m} = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ m} \cdot \frac{1}{10} \text{ m} = \frac{1}{100} \text{ m} = 1 \text{ cm!}$

2.7.4 Wurzeln



Ist a = 8 cm die Seitenlänge eines Quadrats, so ist sein Flächeninhalt $A = a^2 = 64$ cm^2. Man kann auch umgekehrt fragen: Welchen Wert hat die Seitenlänge a eines Quadrats, wenn dessen Flächeninhalt $A = 64$ cm^2 ist?

Wir suchen also als Zahlenwert der Seitenlänge eine (nichtnegative) Zahl, die 64 ergibt, wenn man sie quadriert. Da $8^2 = 64$, ist 8 die gesuchte Zahl. Diese heißt **Quadratwurzel** von 64 und wird mit $\sqrt[2]{64}$ oder kurz mit $\sqrt{64}$ bezeichnet.

Die Aufgabe lautet also, eine Zahl zu finden, die quadriert (oder zu einer anderen Potenz erhoben) einen vorgegebenen Wert ergibt. Dieser Rechenvorgang heißt **Wurzelziehen** oder **Radizieren**; das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ leitet sich vom Buchstaben "r", dem Anfangsbuchstaben des Wortes "radizieren" (radix, lat., Wurzel) ab. Wurzelziehen ist eine Umkehrung des Potenzierens.

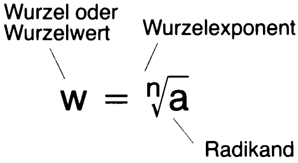
Allgemein wird definiert:

n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}^*$) aus einer nichtnegativen Zahl a heißt jene *nichtnegative* Zahl w, deren n-te Potenz gleich a ist: $\sqrt[n]{a} = w \Leftrightarrow w^n = a$.

Anmerkungen:

(1) Wir *definieren* Wurzeln nur aus Radikanden a, die nichtnegativ sind. Beispielsweise gibt $\sqrt{-4}$ keinen Sinn, da es keine reelle Zahl gibt, die quadriert gleich -4 ist.

(2) Eine Wurzel w wird nichtnegativ definiert. Andernfalls wäre $\sqrt{4}$ gleich 2 und auch gleich -2, da $2^2 = 4$, aber auch $(-2)^2 = 4$ ist, $\sqrt{4}$ würde also zwei (!) Werte besitzen.
Die Ermittlung von $\sqrt{4}$ ist daher nicht mit der Lösung der Gleichung $x^2 = 4$ zu verwechseln, die zwei Lösungen, nämlich $\sqrt{4}$ und $-\sqrt{4}$, also 2 und -2, besitzt.



Beispiel 2.54 : Wurzelziehen

a) $\sqrt{1,44} = 1,2$, weil $1,2^2 = 1,44$ (Quadratwurzel)

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, weil $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ (3. Wurzel oder Kubikwurzel)

Beachte: Die Wurzel $\frac{1}{2}$ ist größer als der Radikand $\frac{1}{8}$! Dies ist stets der Fall, wenn der Radikand kleiner als 1 ist.

c) $\sqrt[6]{64} = 2$, weil $2^6 = 64$ (6. Wurzel)

d) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$, weil $0,1^4 = 0,0001$ (4. Wurzel)

Aus der Definition einer Wurzel ergibt sich:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{sowie} \quad \sqrt[n]{a^n} = a;$$

$$\text{speziell:} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{sowie} \quad \sqrt{a^2} = a.$$

Begründe aus der Definition einer Wurzel, dass $\sqrt[1]{a} = a$ und $\sqrt[n]{0} = 0$ sowie $\sqrt[n]{1} = 1$.

Wurzeln als Potenzen

Wir haben bisher als Hochzahlen für Potenzen nur ganze Zahlen zugelassen. Keine Bedeutung hat bisher das Schreibsymbol $3^{\frac{1}{2}}$. Wir können ihm einen Sinn geben, wenn wir es als eine Wurzel *definieren:* $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$!
Diese Vereinbarung ist naheliegend, sobald wir die Gültigkeit der Potenzgesetze auch für nicht ganzzahlige Hochzahlen fordern:

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$ und dies mit $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ vergleichen.

Allgemein vereinbart man:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Damit kann eine Wurzel auch als Potenz geschrieben werden! Man macht davon bei der Wurzelberechnung mit dem Taschenrechner Gebrauch.

Aufgaben

2.159 Ermittle durch gezieltes Probieren (ohne Taschenrechner):

a) $\sqrt{49}$ **b)** $\sqrt{100}$ **c)** $\sqrt{121}$ **d)** $\sqrt{144}$ **e)** $\sqrt{225}$
f) $\sqrt{10000}$ **g)** $\sqrt{1}$ **h)** $\sqrt{0}$ **i)** $\sqrt{0,25}$ **j)** $\sqrt{0,09}$
k) $\sqrt{0,01}$ **l)** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **m)** $\sqrt{\frac{1}{9}}$ **n)** $\sqrt{\frac{1}{49}}$ **o)** $\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.160 Ermittle durch gezieltes Probieren (ohne Taschenrechner):

a) $\sqrt[3]{8}$ **b)** $\sqrt[3]{64}$ **c)** $\sqrt[3]{216}$ **d)** $\sqrt[4]{81}$ **e)** $\sqrt[7]{0}$
f) $\sqrt[17]{1}$ **g)** $\sqrt[4]{10000}$ **h)** $\sqrt[5]{32}$ **i)** $\sqrt[5]{243}$ **j)** $\sqrt[6]{64}$
k) $\sqrt[10]{1024}$ **l)** $\sqrt[3]{0,125}$ **m)** $\sqrt[3]{0,001}$ **n)** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **o)** $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

2.161 Bei den folgenden Aufgaben ist eine der drei Antworten richtig. Versuche durch *Abschätzen im Kopf* die richtige Antwort zu finden:

a) $\sqrt{1000}$ (31,62; 15,62; 43,16) **b)** $\sqrt{200}$ (20,0; 16,0; 14,1)
c) $\sqrt{0,1}$ (0,010; 0,316; 0,033) **d)** $\sqrt{0,10}$ (0,300; 0,033; 0,316)
e) $\sqrt{0,25}$ (0,50; 0,40; 0,20) **f)** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (0,20; 0,50; 0,16)
g) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ (0,088; 0,250; 0,004) **h)** $\sqrt[3]{121}$ (6,02; 3,88; 4,95)
i) $\sqrt[3]{10000}$ (21,5; 50,0; 15,0) **j)** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (0,25; 0,13; 0,50)

2.162 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\sqrt{3^2} + \left(\sqrt{7}\right)^2$ **b)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7^2}$ **c)** $\sqrt{3^2} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
d) $\left(\sqrt{5}\right)^{-2}$ **e)** $\left(2 \cdot \sqrt{y}\right)^2$ **f)** $\left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 2\right)$
g) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **h)** $\sqrt[3]{5^3} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ **i)** $\left(2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^3$

Im Überblick: Potenzen ●

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren wird abkürzend als **Potenz** geschrieben:
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren); a ... Basis (Grundzahl), n ... Exponent (Hochzahl).

Potenzieren geht vor der Punktrechnung (wenn es Klammern nicht anders verlangen).

Definitionen: $a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

Nur **gleichartige Potenzen**, d.h. Potenzen mit gleichen Basen und gleichen Exponenten, lassen sich **durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen**!

Die 5 Potenzgesetze $(m, n \in \mathbb{Z})$:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$;

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Leserichtung auch von rechts nach links!

(Normalisierte) **Gleitkommadarstellung:**

Jede (positive) Zahl kann als Produkt einer Zahl m zwischen 1 und 10 (genauer: $1 \leqslant m < 10$) und einer Zehnerpotenz geschrieben werden, die die *Größenordnung* der Zahl angibt.

Unter der **Quadratwurzel** einer Zahl $a \geqslant 0$ versteht man die mit $\sqrt{a}$ bezeichnete (nichtnegative) Zahl, die quadriert a ergibt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Ebenso: $\sqrt{a^2} = a$ (für $a \geqslant 0$).
Allgemein: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Wurzeln können als Potenzen geschrieben werden: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2.8 Bruchterme

Terme der Form $\frac{Z}{N}$, wobei Z und N selbst wieder Terme sind, heißen **Bruchterme**.

Beispiele: $\frac{3}{4}$, $\frac{7\,r}{9}$, $\frac{3\,a+2}{a-1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{(x-3)\,(y-1)}$, $\frac{\sqrt{x}}{3}$

Enthält N, also der Nennerterm, Variable, so dürfen wegen der Sinnlosigkeit einer Division durch 0 nur solche Einsetzungen für die Variablen gewählt werden, dass stets $N \neq 0$ ist.

Für das Einsetzen von Zahlen für Termvariable kann es noch weitere Einschränkungen geben. Ein Beispiel ist der Bruchterm $\frac{\sqrt{x}}{3}$. Hier kann x nur für Zahlen stehen, die größer oder gleich 0 sind, da aus negativen Zahlen die Wurzel nicht (reell) gezogen werden kann. Da es uns im Folgenden hauptsächlich auf das "Bruchrechnen" ankommt, genügen *rationale* Bruchterme (d.h. also Terme, bei denen ausschließlich die vier Grundrechnungsarten auf die Variablen angewendet werden).

Die ersten Übungen werden zum Inhalt haben, die Einschränkungen beim Einsetzen von Zahlen für die Variablen festzustellen. Die Menge der (reellen) Zahlen, die für die Variable des Termes eingesetzt werden dürfen, heißt **Definitionsmenge D** des Terms.

Bei mehr als *einer* Variablen ist die formale Angabe der Definitionsmenge eines Terms aufwendiger, weshalb wir in diesen Fällen nur angeben, welche Zahlen für die einzelnen Variablen *nicht* eingesetzt werden dürfen.

Beispiel 2.55 : Zulässige Einsetzungen bei Bruchtermen

Ermittle die größtmögliche Definitionsmenge D bzw. die Einsetzungseinschränkungen bei folgenden Bruchtermen:

a) $\frac{3\,a+2}{a-1}$ **b)** $\frac{1}{x}$ **c)** $\frac{y}{(x-3)\,(y+1)}$ **d)** $\frac{1}{x^2+1}$ **e)** $\frac{3}{u-v}$

Lösung

Wir müssen herausfinden, für welche Einsetzungen für die Variable(n) der Nennerterm N gleich 0 wird. Dazu wird N gleich 0 gesetzt und umgeformt, bis diese Einsetzungen erkennbar sind.

Zu **a)** $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ oder kurz: $a \neq 1$.

Zu **b)** $x=0$; $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ oder kurz: $x \neq 0$.

Zu **c)** $(x-3)\cdot(y+1)=0$; nach dem Produkt-Null-Satz (Seite 48) folgt daraus: $x=3$ oder $y=-1$. Wir müssen also für sinnvolle Einsetzungen für x bzw. y verlangen: *sowohl* $x \neq 3$ *als auch* $y \neq -1$.

Zu **d)** $x^2+1=0$; es gibt keine (reelle) Zahl x, die diese Gleichung erfüllt, denn jede Zahl ist nach dem Quadrieren schon mindestens gleich 0; gibt man noch 1 dazu, so ist die Summe mindestens gleich 1! Damit gibt es keine Einschränkungen für x; $D=\mathbb{R}$.

Zu **e)** $u-v=0 \Rightarrow u=v$; bei Gleichheit von u und v ist der Nenner null, also muss $u \neq v$ sein.

Für das Rechnen mit Bruchtermen gelten dieselben Regeln wie bei gewöhnlichen Brüchen. Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Es wird daran erinnert (siehe Seite 46), dass nicht mit 0 erweitert werden darf, da danach der Nenner 0 wäre!

Beispiel 2.56 : Erweitern eines Bruchterms

Erweitere **a)** $\frac{a}{a+1}$ mit $a-1$; **b)** $\frac{-x}{y}$ mit -1; **c)** $\frac{4}{b-2}$ so, dass der Nenner b^2-4 wird.

Lösung

Zu **a)** $\frac{a}{a+1} = \frac{a \cdot (a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a^2 - a}{a^2 - 1}$

Beim Erweitern wie auch beim Kürzen von Bruchtermen kann sich die Definitionsmenge ändern! So ist beim Term $\frac{a}{a+1}$ $a \neq -1$, beim Term $\frac{a^2-a}{a^2-1}$ zusätzlich $a \neq 1$ zu fordern.

Zu **b)** $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$

Rückblickend betrachtet bedeutet dies: Ein Minuszeichen vor einem Bruchstrich kann entweder vor den Zähler oder vor den Nenner geschrieben werden.

Zu **c)** Wegen $b^2 - 4 = (b+2)\,(b-2)$ ist mit $b + 2$ zu erweitern:

$$\frac{4}{b-2} = \frac{4}{b-2} \cdot \frac{b+2}{b+2} = \frac{4 \cdot (b+2)}{b^2 - 4}$$

Beim Kürzen von Bruchtermen ist Vorsicht angebracht:

Hat der Zähler oder der Nenner die Form einer **Summe** (Differenz), so muss diese vor einem eventuellen Kürzen **in Faktoren zerlegt werden**. Nur *gemeinsame* Faktoren des Zählers *und* des Nenners dürfen gekürzt werden.

Beispiel 2.57 : Kürzen eines Bruchterms

Kürze möglichst weitgehend:

a) $\frac{4uv}{8u^2}$ **b)** $\frac{mx - nx}{x^2}$ **c)** $\frac{xy - 3y}{6z - 2xz}$ **d)** $\frac{b^2 - 4b + 4}{b^2 - 4}$ **e)** $\frac{2a+1}{2a}$

Lösung

Zu **a)** $\frac{4uv}{8u^2} = \frac{4u \cdot v}{4u \cdot 2u} = \frac{v}{2u}$

Zu **b)** $\frac{mx - nx}{x^2} = \frac{x(m-n)}{x^2} = \frac{m-n}{x}$

Zu **c)** $\frac{xy - 3y}{6z - 2xz} = \frac{y(x-3)}{2z(3-x)} = \frac{y(-1)(3-x)}{2z(3-x)} = \frac{-y}{2z} = -\frac{y}{2z}$

Im Zweifelsfall sollte eine Zahlenprobe gemacht werden; wir setzen $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$: Anfangsterm: $\frac{2 \cdot 3 - 3 \cdot 3}{6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{-3}{8}$; Ergebnisterm: $-\frac{3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}$; somit Übereinstimmung.

Zu **d)** $\frac{b^2 - 4b + 4}{b^2 - 4} = \frac{(b-2)^2}{(b+2)(b-2)} = \frac{b-2}{b+2}$

Zu **e)** $\frac{2a+1}{2a}$ kann nicht gekürzt werden, da Zähler und Nenner keine gemeinsamen Faktoren besitzen.

Achtung!

$\frac{2a+1}{2a} \neq \frac{\overset{1}{\cancel{2a}} + 1}{\underset{1}{\cancel{2a}}}$; denn $\frac{2a+1}{2a} = \frac{2a}{2a} + \frac{1}{2a} = 1 + \frac{1}{2a}$!

Beispiel 2.58: Addition (Subtraktion) von gleichnamigen Bruchtermen

Bringe auf einen Bruchstrich: **a)** $\frac{3}{2\,x} - \frac{3\,y + 1}{2\,x} + \frac{y}{2\,x}$ **b)** $\frac{2}{u + 3} + \frac{v}{u + 3}$

Lösung

Zu **a)** **Ein Bruchstrich wirkt wie eine Klammer:** Bringt man Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich, so ist darauf zu achten, dass jeder der einzelnen Bruchstriche die Summanden des Zählers wie eine Klammer zusammenfasst. Es sind daher die Regeln des Auflösens von Klammern anzuwenden!

$$\frac{3}{2\,x} - \frac{3\,y + 1}{2\,x} + \frac{y}{2\,x} = \frac{3 - (3\,y + 1) + y}{2\,x} = \frac{3 - 3\,y - 1 + y}{2\,x} = \frac{2 - 2\,y}{2\,x} = \frac{2\,(1 - y)}{2\,x} = \frac{1 - y}{x}\,.$$

Zahlenprobe etwa mit $x = 2$ und $y = 3$.

Zu **b)** $\frac{2}{u + 3} + \frac{v}{u + 3} = \frac{2 + v}{u + 3}$. Zahlenprobe etwa mit $x = 1$ und $y = 1$.

In einer Gleichung kann man die Seiten vertauschen; daher können wir auch umgekehrt schreiben:

$$\frac{2 + v}{u + 3} = \frac{2}{u + 3} + \frac{v}{u + 3}\,.$$

Beispiel 2.59: Addition (Subtraktion) von ungleichnamigen Bruchtermen

Bringe auf einen Bruchstrich:

a) $\frac{2\,m}{15\,a\,b} - \frac{n}{9\,a}$ **b)** $\frac{5}{b - 1} - \frac{6\,b}{b^2 - 1} - \frac{1 - 2\,b}{b + b^2}$ **c)** $\frac{v}{v - 1} - 2$ **d)** $\frac{1}{x - y} - \frac{1}{y - x}$

Lösung

Wir machen die Bruchterme zuerst durch Erweitern *gleichnamig*, d.h. wir bringen sie auf einen gemeinsamen Nenner. Dafür kann das Produkt aller Nenner dienen; rechentechnisch günstiger ist jedoch der Hauptnenner (HN), also das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der einzelnen Nenner. Dazu werden die Nennerterme in Faktoren zerlegt.

Zu **a)** $15ab = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b$; $9a = 3 \cdot 3 \cdot a$.

Für den Hauptnenner schreibt man alle auftretenden Faktoren der Nennerterme (also 5, 3, a, b) so oft an, wie sie am häufigsten in einer der Zerlegungen vorkommen. Da der Faktor 3 in der Zerlegung von $9a$ zweimal vorkommt, wird er zweimal angeschrieben: $HN = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 45ab$. Die beiden Bruchterme werden nun so erweitert, dass sie als Nenner $45ab$ besitzen, wodurch sie gleichnamig werden:

$$\frac{2\,m}{15\,a\,b} \cdot \frac{3}{3} - \frac{n}{9a} \cdot \frac{5b}{5b} = \frac{6\,m - 5\,b\,n}{45\,a\,b}$$

Nimmt man dagegen als gemeinsamen Nenner das Produkt der beiden Nenner, so rechnet man etwas länger:

$$\frac{2\,m}{15\,a\,b} \cdot \frac{9a}{9a} - \frac{n}{9\,a} \cdot \frac{15ab}{15ab} = \frac{18\,a\,m - 15\,a\,b\,n}{15\,a\,b \cdot 9\,a} = \frac{\cancel{3}\,\cancel{a} \cdot (6\,m - 5\,b\,n)}{\underset{5}{\cancel{15}}\,\cancel{a}\,b \cdot 9\,a} = \frac{6\,m - 5\,b\,n}{45\,a\,b}$$

Zu **b)** $b + b^2 = b\cdot(1 + b)$; $b - 1 = b - 1$; $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$;
$HN = b\cdot(b + 1)\cdot(b - 1)$.

$$\frac{5}{b-1}\cdot\frac{b\cdot(b+1)}{b\cdot(b+1)} - \frac{6\,b}{(b+1)\cdot(b-1)}\cdot\frac{b}{b} - \frac{1-2\,b}{b\cdot(b+1)}\cdot\frac{b-1}{b-1} =$$

$$= \frac{(5\,b^2 + 5\,b) - 6\,b^2 - (b - 2\,b^2 - 1 + 2\,b)}{HN} = \frac{5\,b^2 + 5\,b - 6\,b^2 - b + 2\,b^2 + 1 - 2\,b}{HN} =$$

$$= \frac{b^2 + 2\,b + 1}{HN} = \frac{(b+1)^2}{b\,(b+1)(b-1)} = \frac{b+1}{b\,(b-1)}.$$

Will man den Hauptnenner ausmultiplizieren, so sollte dies erst am Ende der Rechnung geschehen, da man vielleicht noch kürzen kann.

Zahlenprobe: $b = 2$:

Anfangsterm: $\frac{5}{1} - \frac{12}{3} - \frac{-3}{6} = \frac{3}{2}$; Ergebnisterm: $\frac{3}{2}$; somit Übereinstimmung.

Zu **c)** Wir erweitern $2 = \frac{2}{1}$ mit $v - 1$:

$$\frac{v}{v-1} - \frac{2}{1}\cdot\frac{v-1}{v-1} = \frac{v - 2(v-1)}{v-1} = \frac{2-v}{v-1}$$

Zu **d)** Erweitern wir (etwa) den zweiten Bruchterm mit – 1, so erhalten wir gleichnamige Bruchterme:

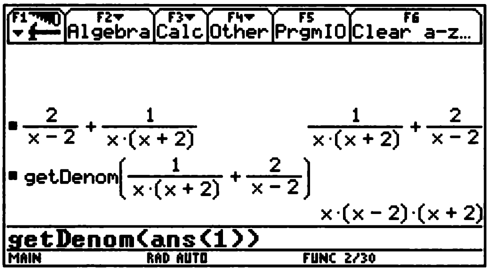
$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{y-x}\cdot\frac{(-1)}{(-1)} = \frac{1}{x-y} - \frac{-1}{x-y} = \frac{1-(-1)}{x-y} = \frac{2}{x-y}$$

Zahlenprobe: $x = 2$, $y = 1$.

Anfangsterm: $\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} = 2$; Ergebnisterm: $\frac{2}{1} = 2$; somit Übereinstimmung.

Voyage 200

Der Voyage 200 kann auch als Lernhilfe beim Bilden des gemeinsamen Nenners eingesetzt werden.



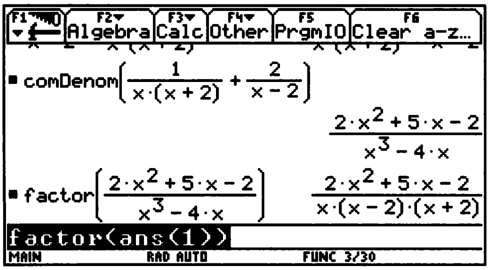
$\blacksquare\ \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x\cdot(x+2)}$ $\quad \frac{1}{x\cdot(x+2)} + \frac{2}{x-2}$

$\blacksquare\ \text{getDenom}\left(\frac{1}{x\cdot(x+2)} + \frac{2}{x-2}\right)$ $\quad x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

getDenom(ans(1))

MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

Zunächst wird der Term eingegeben. Mit 2ND 2 getDenom ENTER 2ND (-)) ENTER erhält man den gemeinsamen Nenner eines Terms. Dabei spielen die Zähler und die Operationszeichen zwischen den einzelnen Termen keine Rolle.



$\blacksquare\ \text{comDenom}\left(\frac{1}{x\cdot(x+2)} + \frac{2}{x-2}\right)$ $\quad \frac{2\cdot x^2 + 5\cdot x - 2}{x^3 - 4\cdot x}$

$\blacksquare\ \text{factor}\left(\frac{2\cdot x^2 + 5\cdot x - 2}{x^3 - 4\cdot x}\right)$ $\quad \frac{2\cdot x^2 + 5\cdot x - 2}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$

factor(ans(1))

MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Mit F2 6 A N S (2)) ENTER werden Bruchterme auf gemeinsamen Bruchstrich gebracht; man erhält einen gekürzten Quotienten von Zähler und Nenner zurück. Ist kein Kürzen möglich, erhält man durch Anwendung von F2 2 2ND (-)) ENTER den Nenner bzw. den Zähler (wenn möglich) in faktorisierter Form.

Statt mehrere Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich zu bringen, kann die Aufgabenstellung auch umgekehrt lauten: Zerlege einen Bruchterm, dessen Zähler eine Summe ist, in eine Summe von Brüchen. Dabei wird einfach die Regel zum Addieren gleichnamiger Brüche $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ von rechts nach links gelesen: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Beispiel 2.60 : Division einer Summe durch einen eingliedrigen Term (ein Monom)

Zerlege die folgenden Bruchterme in eine Summe von "Teilbrüchen":

a) $\frac{x + 2y}{2x}$ **b)** $\frac{5a - b^2 + ab}{ab}$

Lösung

Zu **a)** $\frac{x + 2y}{2x} = \frac{x}{2x} + \frac{2y}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{y}{x}$.

Zu **b)** $\frac{5a - b^2 + ab}{ab} = \frac{5a}{ab} - \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab} = \frac{5}{b} - \frac{b}{a} + 1$.

Beispiel 2.61 : Multiplikation von Bruchtermen

Multipliziere und vereinfache gegebenenfalls:

a) $\left(-\frac{a}{2b}\right) \cdot \frac{2b^2}{a-2}$ **b)** $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \cdot mn$ **c)** $\frac{xy^2 - 4x}{5y} \cdot \frac{5y^2}{2xy + 4x}$

Zur Erinnerung: Kontrolle durch Zahlenprobe!

Lösung

Zu **a)** $\left(-\frac{a}{2b}\right) \cdot \frac{2b^2}{a-2} = -\frac{a \cdot 2b^2}{2b(a-2)} = \frac{ab}{-(a-2)} = \frac{ab}{2-a}$.

Zu **b)** $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \cdot mn = \frac{1}{m} \cdot \frac{mn}{1} - \frac{1}{n} \cdot \frac{mn}{1} = n - m$.

Man kann auch zuerst den Klammerausdruck auf einen Bruchstrich bringen:

$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \cdot mn = \frac{n-m}{mn} \cdot \frac{mn}{1} = n - m$.

Zu **c)** $\frac{xy^2 - 4x}{5y} \cdot \frac{5y^2}{2xy + 4x} = \frac{x(y^2 - 4)}{5y} \cdot \frac{5y^2}{2x(y+2)} = \frac{x(y+2)(y-2)}{5y} \cdot \frac{5y^2}{2x(y+2)} = \frac{y(y-2)}{2}$.

Man könnte natürlich den Zähler des Ergebnisses noch ausmultiplizieren. Aber nicht nur für ein eventuell mögliches Kürzen ist ein Produkt rechentechnisch günstiger als eine Summe. Will man für die Variable(n) Zahlen einsetzen, so kann die Anzahl der Multiplikationen bei einer Faktorenzerlegung einer Summe oft deutlich geringer sein!

Beispiel 2.62 : Einfache Division von Bruchtermen

Dividiere und vereinfache gegebenenfalls:

a) $3x : \frac{m}{n}$ **b)** $\frac{18a^2}{5b} : (12a)$ **c)** $\left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) : (3x)$

Lösung

Durch einen Bruch(term) wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Zu **a)** $3x : \frac{m}{n} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{n}{m} = \frac{3nx}{m}.$

Zu **b)** $\frac{18a^2}{5b} : (12a) = \frac{18a^2}{5b} \cdot \frac{1}{12a} = \frac{18a^2}{5b \cdot 12a} = \frac{3a}{10b}.$

Zu **c)** $\left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) : (3x) = \left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3x^2}{y} \cdot \frac{1}{3x} + \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{x}{y} + \frac{1}{15}$

Auch hier könnte zuerst der Klammerausdruck auf einen Bruchstrich gebracht werden:

$$\left(\frac{3x^2}{y} + \frac{x}{5}\right) : (3x) = \frac{15x^2 + xy}{5y} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{x(15x + y)}{5y \cdot 3x} = \frac{15x + y}{15y}.$$

Zeige die Gleichheit der beiden Ergebnisse!

Beispiel 2.63 : Vereinfachung von Doppelbruchtermen

Vereinfache die folgenden Doppelbrüche:

a) $\frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{2}{y}}$ **b)** $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}$

Lösung

Zu **a)** $\frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{2}{y}} = \frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{2}{y}} = \frac{x+y}{y} : \frac{2}{y} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}.$

Man kann einfacher ab der Form $\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{2}{y}}$ **(nicht vorher!)** die Regel ”Produkt der Außenglieder durch Produkt der Innenglieder” anwenden:

$$\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{2}{y}} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Zu **b)** $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2}.$

Beispiel 2.64 : Erkennen von Termstrukturen

Eine Größe v ist formelmäßig gegeben. Gib eine Anweisungsfolge zum schrittweisen Aufbau folgender Terme an:

a) $v = \frac{x + (2y - 1)^2}{3} - 1$ **b)** $v = \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{x}{z} - 2y\right)}{2x}$

Lösung

Zu **a)** Beispielsweise: $A = 2y - 1$; $B = \frac{x + A^2}{3}$; $v = B - 1$.

Zu **b)** Beispielsweise: $A = \frac{x}{z}$; $B = 3 \cdot (A - 2y)$; $C = 1 + B$; $v = \frac{C}{2x}$.

Polynomdivision

Bei der Division zweier Summen kann man nach dem Verfahren vorgehen, das bei der Division von natürlichen Zahlen verwendet wird. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die beiden Summen Polynome in *einer* Variablen sind.

Zwei Vorbemerkungen:

(1) Dividiert man eine natürliche Zahl n durch eine andere natürliche Zahl m $\neq$ 0, so erhält man den Quotienten q und den Rest r.

Beispiel: $\frac{22}{5} = 4$, Rest 2; man kann auch schreiben: $\frac{22}{5} = 4 + \frac{2}{5}$ oder $22 = 5 \cdot 4 + 2$.

(2) Wir führen nun die Division 5451 : 23 in *ausführlicher* Schreibweise durch.

Dividend Divisor Quotient

$$\begin{array}{rl}
5451 & :\ 23\ =\ 237 \\
\underline{-4600} & \\
851 & \\
\underline{-690} & \\
161 & \\
\underline{-161} & \\
000 & \text{Rest}
\end{array}$$

Zerlegt man den Quotienten 237 in die Summe 200 + 30 + 7, so erkennt man leicht einen gleich ablaufenden Rechenvorgang. Stets wird der Divisor 23 mit einem der Summanden der Summe multipliziert und anschließend das Produkt vom Dividenden 5451 bzw. von den momentanen Resten 851 bzw. 161 abgezogen. Dies wird so lange durchgeführt, bis die Division aufgeht oder ein positiver Rest kleiner als der Divisor übrigbleibt.

Dieses Verfahren wenden wir nun zur Polynomdivision an.

Beispiel 2.65 : Polynomdivision

Dividiere $Z = 2x^3 - 5x^2 - 5x + 8$ durch $N = x - 3$

Lösung

Dividend Divisor Quotient

$$\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & -\ 5x^2 & -\ 5x & +\ 8) & :(x-3) = 2x^2 + x - 2 \\
\cline{1-2}
{}_{-}2x^3 & \mp\ 6x^2 & & & \\
 & x^2 & -\ 5x & +\ 8 & \\
\cline{2-3}
 & {}_{-}x^2 & \mp\ 3x & & \\
 & & -2x & +\ 8 & \\
\cline{3-4}
 & & \mp 2x & \pm\ 6 & \\
 & & & 2 & \text{Rest mit Grad kleiner} \\
 & & & & \text{als Divisorgrad, Abbruch!}
\end{array}$$

Es empfiehlt sich, bei der Division vorzugehen, wie nebenstehend gezeigt wird.

Die Reste $x^2 - 5x + 8$ (Grad 2) sowie $-2x + 8$ (Grad 1) haben Grade, die noch nicht kleiner als 1, der Grad des Divisors $x - 3$, sind: die Division geht weiter. Sie endet mit dem Rest 2, einem Polynom mit dem Grad 0; sein Grad ist kleiner als der Grad des Divisors.

Man kann das Ergebnis (siehe Vorbemerkung (1)) auch in der Form

$\frac{2x^3 - 5x^2 - 5x + 8}{x - 3} = 2x^2 + x - 2 + \frac{2}{x - 3}$ oder

$2x^3 - 5x^2 - 5x + 8 = (x - 3) \cdot (2x^2 + x - 2) + 2$ schreiben.

Die letzte Schreibweise lässt eine einfache Rechenkontrolle der Division zu. Das Produkt aus Quotient und Divisor vermehrt durch den Rest muss gleich dem Dividenden sein.

Hinweis: Man könnte die Division auch schon früher abbrechen, etwa beim Rest $-2x + 8$. Dann würde das Ergebnis lauten: $\frac{2x^3 - 5x^2 - 5x + 8}{x - 3} = 2x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 3}$.

Man führt die Division jedoch weiter, bis der Rest einen kleineren Grad als der Divisor hat. Entsprechend rechnet man auch bei der Division natürlicher Zahlen so lange, bis der Rest kleiner als der Divisor ist.

Die **Polynomdivision** wird also nach folgender Rechenvorschrift ausgeführt:

Schritt 1: Dividend (1. Klammerterm) und Divisor (2. Klammerterm) werden nach fallenden Potenzen geordnet. Fehlt dazwischen eine Potenz, so kann sie (besonders beim Dividenden) mit dem Koeffizienten null angeschrieben werden.

Schritt 2: Das erste Glied des Dividenden wird durch das erste Glied des Divisors dividiert und der Quotient notiert.

Schritt 3: Der Quotient wird mit dem Divisor multipliziert und das Produkt vom Dividenden subtrahiert.

Schritt 4: *Falls* der Rest gleich 0 ist (also die Division aufgeht) oder sein Grad kleiner als der Grad des Divisors ist, wird abgebrochen;
sonst: Der Rest wird als *neuer* Dividend betrachtet; man setzt bei Schritt 2 fort.

Die Summe der notierten (Teil-)Quotienten ist der gesuchte Quotient.

Ein Rechenverfahren wie das eben behandelte wird als ein **Algorithmus** bezeichnet. Darunter versteht man allgemein eine **endliche Folge von Schritten, deren korrekte Abarbeitung eine gestellte Aufgabe löst**.

In der Mathematik gibt es viele Beispiele für Algorithmen, beispielsweise Verfahren zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren oder Dividieren von Zahlen. Liegt ein Algorithmus als Lösungsverfahren eines mathematischen Problems vor, so kann es grundsätzlich auch durch Rechenanlagen gelöst werden. Alle in einer Programmiersprache formulierten Verfahren sind Algorithmen. Auch im täglichen Leben treten oft Verfahren auf, die bei präziser Formulierung Algorithmen sind (Spielregeln, Montageanleitungen, Kochrezepte).

Beispiel 2.66 : Polynomdivision

Vereinfache gegebenenfalls nach Division $\frac{x^4 - 8x^3 + 16x - 4}{2x^2 - 4}$.

Lösung

Wir schreiben zuerst das Zählerpolynom in der Form $x^4 - 8x^3 + 0 \cdot x^2 + 16x - 4$.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \text{Dividend} \qquad\qquad\qquad\quad \text{Divisor} \qquad \text{Quotient} \\
(x^4 - 8x^3 + 0 \cdot x^2 + 16x - 4) : (2x^2 - 4) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1 \\
\underline{-x^4 \qquad\quad \mp 2x^2} \\
\quad - 8x^3 + 2x^2 + 16x - 4 \\
\quad \underline{\mp 8x^3 \qquad\quad \pm 16x \quad} \\
\qquad\qquad + 2x^2 \qquad - 4 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 2x^2 \qquad \mp 4} \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad\;\; 0 \;\; \text{Die Division geht auf.}
\end{array}
$$

Somit: $\frac{x^4 - 8x^3 + 16x - 4}{2x^2 - 4} = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$

Im Überblick: Bruchterme

Terme der Form Z/N, wobei Z und N selbst wieder Terme sind, heißen **Bruchterme**.

Definitionsmenge eines Bruchterms: Da in einem Bruchterm der Nenner durch Einsetzen von Zahlen für die Variable(n) null werden könnte, sind solche Zahlen auszuschließen (die Division durch 0 ist nicht möglich).

Das **Rechnen mit Bruchtermen** (Erweitern, Kürzen, Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren) erfolgt nach denselben Regeln wie das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen.

Eine **Polynomdivision** erfolgt nach dem Algorithmus, der auch beim Dividieren von natürlichen Zahlen angewendet wird.

Aufgaben

2.163 Welche Einschränkungen müssen beim Einsetzen von reellen Zahlen in den folgenden Termen vorgenommen werden?

a) $\frac{3}{u-2}$ **b)** $\frac{2r}{s^2}$ **c)** $\frac{1}{x^2-4}$ **d)** $\frac{p^2}{4p^2-12p+9}$

2.164 Ebenso:

a) $\frac{3}{2(a-b)}$ **b)** $\frac{3}{2a-b}$ **c)** $\frac{2u}{2u-v}$ **d)** $\frac{x+1}{xy}$

e) $\frac{x}{xy}$ **f)** $\frac{2r}{(r+1)(h-1)}$ **g)** $\frac{4}{xy-4}$ **h)** $\frac{ab}{16a^2-4b^2}$

2.165 Erweitere

a) $\frac{2a}{3b}$ mit $2a$ **b)** $\frac{x-y}{-2y}$ mit -1 **c)** $\frac{3b+a}{a-3b}$ mit $a+3b$

2.166 Ergänze geeignet

a) $\frac{4a}{3}=\frac{\quad}{12}$ **b)** $\frac{2x-1}{x}=\frac{\quad}{x^2}$ **c)** $\frac{3a-b}{2b}=\frac{\quad}{2ab^2}$

d) $\frac{1}{x-1}=\frac{\quad}{2x^2-2x}$ **e)** $\frac{u-v}{u+v}=\frac{\quad}{u^2-v^2}$ **f)** $\frac{-2b}{a-2b}=\frac{\quad}{a^2-4b^2}$

g) $1=\frac{\quad}{2a-1}$ **h)** $\frac{1-2x}{3x-1}=\frac{\quad}{1-3x}$ **i)** $\frac{1-3y}{4y-x}=\frac{\quad}{ax-4ay}$

2.167 Kürze so weit wie möglich:

a) $\frac{28uv^2}{42u^2}$ **b)** $\frac{3(m+n)}{m(m+n)}$ **c)** $\frac{5{,}5pq^2}{2{,}2pq}$ **d)** $\frac{4q-4}{3q-3}$

e) $\frac{a-a^2}{a}$ **f)** $\frac{3r+rs}{3r}$ **g)** $\frac{2h^3+3h^2}{4h^2}$ **h)** $\frac{ac-bc}{abc}$

2.168 Ebenso:

a) $\frac{m^2-n^2}{m+n}$ **b)** $\frac{(3p+3)(p-2)}{3p^2-12}$ **c)** $\frac{m-n}{n-m}$ **d)** $\frac{3a^2-12a+12}{a^2-4}$

e) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$ **f)** $\frac{u^2-v^2}{(v-u)^2}$ **g)** $\frac{8r^2+4r}{4r^3-r}$ **h)** $\frac{(3x+3)^2}{9x^2-9}$

Bringe in den Aufgaben 2.169 bis 2.173 auf einen Bruchstrich und vereinfache:

2.169 **a)** $\frac{3}{2}+\frac{u-4}{2}$ **b)** $\frac{2n}{5m}-\frac{n}{5m}$ **c)** $\frac{u-v}{3}-\frac{u+v}{3}$ **d)** $\frac{3k+1}{k}-\frac{2k+1}{k}$

e) $\frac{3+2x}{y}-\frac{x-4}{y}+\frac{2x-7}{y}$ **f)** $\frac{(2h-1)^2}{2a}-\frac{(2h+1)^2}{2a}+\frac{(2h+1)(2h-1)}{2a}$

2.170 **a)** $\frac{4}{3b}-\frac{5}{6b}$ **b)** $\frac{3}{xy}+\frac{5}{x}$ **c)** $\frac{1}{z^2}-\frac{4}{3z}$ **d)** $\frac{2m}{3k^2}+\frac{3}{k}$

e) $\frac{3}{p}-1$ **f)** $2-\frac{a+b}{b}$ **g)** $t-\frac{st-1}{s}$ **h)** $\frac{1}{m^2}+\frac{2}{mn}+\frac{1}{n^2}$

i) $\frac{4}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}$ **j)** $\frac{1}{y}-(1+x)$ **k)** $\frac{1}{a}+b-\frac{x}{2y}$ **l)** $1+\frac{1}{n}-\frac{1+2m}{2m}$

2.171 **a)** $1+\frac{1}{u-v}$ **b)** $\frac{3r}{5r-1}-\frac{3}{5}$ **c)** $a+\frac{1}{a-2}$ **d)** $\frac{1}{2}+\frac{r}{r-s}$

e) $1-\frac{u+v}{u-v}$ **f)** $u+v-\frac{1}{u-v}$ **g)** $\frac{4}{z+2}+1-z$ **h)** $\frac{1}{p+2}-1+p$

2.172 **a)** $\frac{3}{2x+2y}-\frac{1}{x+y}$ **b)** $\frac{3}{m+3}-\frac{2}{m-3}$ **c)** $\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+1}$ **d)** $\frac{a}{a+1}-\frac{2}{a+2}$

e) $\frac{m}{m^2-1}-\frac{1}{m-1}$ **f)** $\frac{u}{1-u}+\frac{u}{u+1}$ **g)** $\frac{s-1}{s+1}-\frac{s}{s^2-1}$ **h)** $\frac{s-1}{s+1}-\frac{s}{1-s^2}$

2.173 **a)** $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2-b^2}$ **b)** $\frac{1}{1+s}+\frac{s-1}{(s+1)^2}-\frac{2s}{1-s^2}$

c) $\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{t}{t^2-1}$ **d)** $\frac{1}{1-a}-\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{1+2a-a^2}{(1-a)^3}$

e) $\frac{2a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}$ **f)** $\frac{4x-2}{x^2-1}-\frac{3}{1+x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{1-x}$

g) $\frac{1}{1-\frac{y}{x}}-\frac{y^2-xy}{y^2-x^2}-1$ **h)** $\frac{3}{u^2+2uv+v^2}+\frac{2v}{u^2-v^2}+\frac{1}{u+v}-\frac{1}{u-v}$

i) $-\frac{3}{1-3u}+\frac{4u}{1-9u^2}-\frac{4u}{9u^2-6u+1}$ **j)** $\frac{4}{x^3+2x^2}+\frac{4}{x^4-4x^2}+\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2-4}$

2.174 Zerlege folgende Bruchterme in eine Summe von Bruchtermen:

a) $\frac{x+y}{x}$ **b)** $\frac{u-v}{uv}$ **c)** $\frac{b+2}{b}$ **d)** $\frac{pq+qr}{pqr}$

e) $\frac{m+n+1}{mn}$ **f)** $\frac{x+2y^2}{xy}$ **g)** $\frac{c^2+2c-1}{2c}$ **h)** $\frac{xy+2xz+yz}{2xyz}$

2.175 Berechne und vereinfache:

a) $\frac{x}{3}\cdot\frac{6a}{x^2}$ **b)** $2a\cdot\frac{b}{-3a^2}$ **c)** $\frac{4u}{3v^2}\cdot 6v\cdot\frac{1}{u}$

d) $\frac{b+3}{b}\cdot(-b)^2$ **e)** $\left(2+\frac{3}{m}\right)\cdot\frac{m}{3}$ **f)** $\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{k}\right)$

g) $mn\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ **h)** $\frac{r+2s}{r}\cdot\frac{r-2s}{r}$ **i)** $a(u-v)\cdot\frac{u^2}{au^2-auv}$

j) $\frac{1-k^2}{1+k^2}\cdot\frac{1+k}{1-k}$ **k)** $\frac{r^2-s^2}{r^2+rs}\cdot\frac{r+s}{r-s}$ **l)** $\frac{a^3-16a}{a^3b^2-ab^2}\cdot\frac{a^2b^2-ab^2}{a^2-4a}$

2.176 Berechne und vereinfache:

a) $\frac{9}{t-1}\cdot\frac{1}{3t+3}\cdot\frac{1-t^2}{-3}$ **b)** $\left(\frac{m}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\cdot\frac{3}{m}\cdot\frac{m^2-1}{3m^3+3m}$

c) $a\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2+b^2}{2a^2}\right)$ **d)** $\left(\frac{m}{m-n}-1\right)\cdot\left(1+\frac{m}{n-m}\right)\cdot\left(m-\frac{m^2+n^2}{2n}\right)$

2.177 Berechne und vereinfache:

a) $\frac{6}{b}:2$ **b)** $3:\frac{6}{k}$ **c)** $3a:\frac{9\,a\,b}{-2}$ **d)** $2\cdot\frac{1}{r}:\frac{3}{4\,r}$

e) $\frac{3\,a}{-2\,b}:\frac{1}{-b}$ **f)** $\frac{3\,a\,b^2}{4}:(3a^2b^2)$ **g)** $\frac{2}{3\,m}:\frac{m+3}{m}$ **h)** $\frac{x}{3(x+y)}:\frac{x}{6\,y}$

2.178 Berechne und vereinfache:

a) $\frac{3}{a+b}:\frac{4\,a}{a+b}$ **b)** $\frac{p-3\,q}{q^2}:\frac{2\,p-6\,q}{q}$ **c)** $\left(a+\frac{1}{b}\right):\left(b+\frac{1}{a}\right)$

d) $\frac{a^2-a\,b}{3\,a^2\,b}:\frac{b^2-a\,b}{2\,a\,b^2}$ **e)** $\frac{u^2-3\,u}{4-u}:\frac{u-4}{15-5\,u}$ **f)** $\frac{m^4-1}{m\,n}:\frac{m^2+1}{2\,m\,n}$

g) $\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}\right):\frac{a^2\,b-b^3}{a^2}$ **h)** $\left(\frac{s}{s^2-t^2}-\frac{1}{s-t}\right):\frac{s}{s+t}$ **i)** $\left(-\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x-y}\right):\frac{x}{x+y}$

2.179 Versuche im Kopf zu berechnen:

a) $1:\frac{1}{3}$ **b)** $2:\frac{1}{2}$ **c)** $a:\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}:2$ **f)** $\frac{1}{2}:3$ **g)** $\frac{1}{2}:?=\frac{1}{4}$ **h)** $\frac{1}{3}:?=\frac{1}{6}$

i) $\frac{x}{2}:?=\frac{x}{6}$ **j)** $?:4=\frac{1}{12}$ **k)** $?:\frac{1}{3}=3$ **l)** $?:\frac{1}{10}=1$

2.180 Vereinfache folgende Doppelbrüche:

a) $\frac{\frac{y}{2}}{\frac{3}{x}}$ **b)** $\frac{\frac{y}{2}}{3}$ **c)** $\frac{y}{\frac{2}{3}}$ **d)** $\frac{\frac{x-1}{4}}{x^2-1}$ **e)** $\frac{\frac{4\,r^2-1}{s}}{\frac{2\,r-1}{s^2}}$

f) $\frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m}+1}$ **g)** $\frac{m-\frac{1}{m}}{m-1}$ **h)** $\frac{\frac{2}{3}\cdot s}{\frac{1}{3}+s}$ **i)** $\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+x}$ **j)** $\frac{\frac{2}{5}\cdot t+\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}+t}$

2.181 Ebenso:

a) $\frac{x-\frac{x+1}{2}}{x^2-1}$ **b)** $\frac{1-\frac{c}{1+c}}{\frac{1}{c}}$ **c)** $\frac{\frac{p}{1+p}-1}{1+\frac{p}{1+p}}$

d) $\frac{\frac{3\,a+6}{a}}{a+4+\frac{4}{a}}$ **e)** $\frac{\frac{3}{u}+\frac{u}{3}}{\frac{3}{u}-\frac{u}{3}}\cdot(9-u^2)$ **f)** $\frac{1}{x+1}+\frac{x}{1+\frac{1}{x}}+1$

g) $1-\frac{\frac{a+b}{2}-b}{a-\frac{a-b}{2}}$ **h)** $\frac{1-\frac{1}{m^2-1}}{1-\frac{m}{m-\frac{1}{m}}}$ **i)** $\frac{\frac{u}{v}-1}{1-\frac{(u+v)^2}{4\,u\,v}}$

j) $\frac{\left(1-\frac{a}{1-\frac{a}{a+1}}\right)\cdot\frac{a}{a-1}}{1-a}$ **k)** $\frac{1}{b}\cdot\frac{\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1+b}}{\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1+b}}$ **l)** $1+\frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}}{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}}$

2.182 Schreibe ohne negative Hochzahlen und vereinfache:

a) $(u^{-1}+v^{-1})^{-1}$ **b)** $(2x^{-1}-1)\cdot(2x^{-1}+1)$ **c)** $\left(\frac{1}{3\,x^{-1}}+1\right)^{-1}$

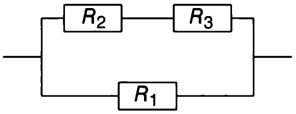
d) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$ **e)** $\left(2a^{-1}-\frac{a}{3}\right)^{-1}$ **f)** $\left(3+\frac{1}{k}\right)^{-1}:k$

g) $\left(m+\frac{2}{n}\right):(2n)^{-1}$ **h)** $\left(2m^{-1}-\frac{m^{-1}}{2}\right)^{-1}$ **i)** $\left(\left(\frac{t}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{2}t^{-1}+2t^{-1}\right)^{-1}$

2.183 Das harmonische Mittel zweier Zahlen x und y beträgt $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Schreibe diesen Term als einfachen Bruch!

Anwendung: Ein Autofahrer fährt vom Ort A zum Ort B mit einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h; auf der Rückreise beträgt seine mittlere Geschwindigkeit noch 60 km/h. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit auf der gesamten Reisestrecke? Anwort: Nicht 70 km/h, sondern das harmonische Mittel von 80 km/h und 60 km/h!

2.184 Der Gesamtwiderstand R des elektrischen Stromkreises in der nebenstehenden Abbildung beträgt $R = (R_1^{-1} + (R_2 + R_3)^{-1})^{-1}$. Vereinfache den Term für R!



2.185 Eine Größe v ist formelmäßig gegeben. Gib ein Beispiel für eine Anweisungsfolge zum schrittweisen Aufbau folgender Terme an (siehe Beispiel 2.64, Seite 83):

a) $v = 1 + \frac{a+b}{2c}$ **b)** $v = 4 - 2\cdot\frac{1-3x}{3y}$ **c)** $v = 2\cdot\left(\frac{3}{y+z}+1\right) - x$

d) $v = 2\cdot\left(\frac{3}{y+z}+1\right) - x$ **e)** $v = x + \frac{1}{y-1}\cdot(2x-1)^2$ **f)** $v = \frac{h-(2+r)^2\cdot\left(2-\frac{h}{t^2}\right)}{1+2h}$

2.186 Führe die Polynomdivision aus:

a) $(6x^2+x-2):(3x+2)$
b) $(18x^2+8x^3-3+5x):(4x+3)$
c) $(6a-6a^2-a^3+2a^4+9):(2a+3)$
d) $(18+13b^2+4b^3-b^5):(3-b)$
e) $(t^4+6t-4-3t^3):(t^2-2)$
f) $(2x-3+2x^2+x^4-2x^3):(3-2x+x^2)$
g) $(s^5-4s^2-3s-4s^4+6s^3):(s^2+3-2s)$
h) $(\frac{1}{2}\cdot x^4+1+2x-\frac{13}{2}\cdot x^2):(\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}+2x)$

2.187 Ebenso:

a) $(3x+4):(x-1)$
b) $(3x+4):(2x+3)$
c) $2a:(2a+1)$
d) $b:(2b+1)$
e) $(3y^4-15y-5y^2-2y^3):(-5+3y)$
f) $(2x^5-7x^4+3x^3-3x^2+9x):(-3x+x^2)$
g) $(8c^4+2+5c):(1+2c)$
h) $(9z^3-1+2z):(1+z+3z^2)$
i) $(d^5+3d+6+8d^2):(2+d)$
j) $(\frac{3}{2}\cdot x-1+2x^3):(x^2+1+\frac{x}{2})$
k) $(h^4+4h^2):(8-4h+2h^2)$
l) $(2x^3+x-4x^4+3):(x^2+\frac{1}{2})$

2.188 Führe aus:

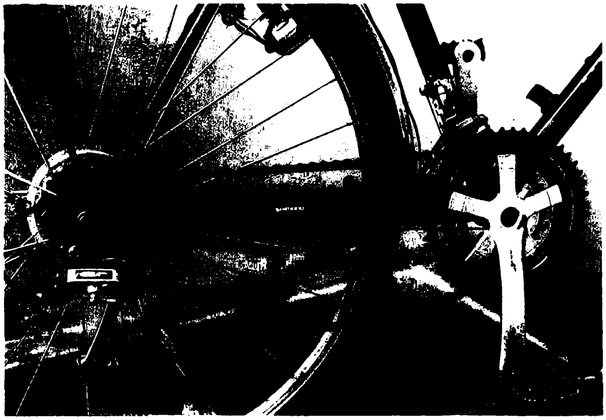
a) $\frac{x^3-1}{x-1}$ **b)** $\frac{x^2-1}{x+1}$ **c)** $\frac{t^3+1}{t+1}$ **d)** $\frac{t^3+1}{t-1}$

e) $\frac{a^4-81}{a-3}$ **f)** $\frac{x^3}{x^2-1}$ **g)** $\frac{k^5+1}{k^2-1}$ **h)** $\frac{9s^3+2s-1}{3s^2+s+1}$

i) $\frac{x^5-6x-5x^2}{x^2-2-x}$ **j)** $\frac{b+b^5-7b^3}{b-3b^2+b^3}$ **k)** $\frac{2t^2+5t^3-t}{t^2+2t-1}$ **l)** $\frac{4s^2+2s^6-1}{s^2+1}$

2.189 Wenn $2x^2-7x+5$ durch ein Polynom dividiert wird, ist der Quotient $2x-1$ und der Rest 2. Wie lautet das Polynom?

2.9 Verhältnisse



Wie viele *verschiedene* Gänge hat ein 21-Gang-Fahrrad?

Bei einem Fahrrad heißt jedes vordere Zahnrad Kettenblatt, ein Zahnrad am Hinterrad heißt Ritzel. Ist K die Zähnezahl eines Kettenblattes und R jene ~~eines~~ Ritzels, so heißt der Quotient aus K und R Übersetzung *ü*: $ü = \frac{K}{R}$.

ü gibt also an, wie oft sich das Hinterrad bei einer Pedalumdrehung dreht. Durch Kombination der Kettenblätter mit den Ritzeln erhält man verschiedene Übersetzungen. Bei einem Fahrrad mit beispielsweise 3 Kettenblättern und 7 Ritzeln gibt es 7 · 3 = 21 Kombinationen, weshalb man von einer 21-Gang-Schaltung spricht.

Beispiel: Ein City-Bike besitzt 3 Kettenblätter mit 28, 38 und 48 Zähnen und 7 Ritzel mit 12, 14, 16, 18, 21, 24 und 28 Zähnen. Welche Übersetzungen *ü* kommen vor?

	12	14	16	18	21	24	28
28	2,33	2	1,75	1,56	1,33 ←	1,17 ←	1
38	3,17	2,71	2,38 ←	2,11 ←	↓ 1,81	1,58	1,36
48	4 ←	3,43 ←	↓ 3	2,67	2,29	2	1,71

Abb. 2.30 Übersetzung bei 21 Gängen

In Abb. 2.30 sind alle 21 möglichen Übersetzungen angeführt. Zwei Übersetzungen sind gleich, einige sind nahezu gleich. Nehmen wir ein Hinterrad von 28 Zoll (1 Zoll = 2,54 cm) an. Ein kleiner Unterschied im Übersetzungsverhältnis von beispielsweise 0,05 würde bedeuten, dass die bei einer Pedalumdrehung zurückgelegten Streckenlängen nur einen Unterschied von 0,05 · π · 28" ≈ 11 cm ausmachen. Sieht man dies als unwesentlich an, so besitzt unser 21-Gang-Fahrrad nur 15 verschiedene Gänge!

Überlege, wie eine mögliche Schaltfolge vom kleinsten zum größten Gang aussehen könnte, wenn man entweder nur vorne am Kettenblatt oder nur hinten am Ritzel schaltet! In der Abb. 2.30 ist eine solche durch Pfeile eingezeichnet.

Um zwei Zahlen (oder Größen) a, b zu vergleichen, kann man ihre Differenz a – b, aber auch ihren Quotienten a/b bilden. Oft ist der Quotient besser geeignet, den "Unterschied" auszudrücken. Man nennt diesen Quotienten, den man a : b oder $\frac{a}{b}$ schreibt, das **Verhältnis von a zu b**.

Da ein Verhältnis ein Bruch ist (wie auch umgekehrt ein Bruch als Verhältnis gelesen werden kann), wird es auch wie ein solcher behandelt.

Beispiel 2.67 : Umformungen von Verhältnissen

a) 12 : 8 = 24 : 16 nach Erweiterung mit 2;
= 3 : 2 nach Kürzen durch 4;
= $\frac{3}{2}$: 1 nach Kürzen durch 8.

b) $\frac{4}{3} : \frac{2}{5} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{20}{6} = 10 : 3 = 3,\dot{3} : 1 = 3,\dot{3}$

Sind a und b Größen mit gleichen Einheiten, so ist das Verhältnis a : b eine ("unbenannte") Zahl. In den technischen Anwendungen gibt es eine große Anzahl derartiger Verhältnisse.

Beispiele: Übersetzungsverhältnis, Maßstab, Wirkungsgrad, Steigung, Reibungszahl, Mischungsverhältnis, relativer Fehler u.v.a. Einige weitere werden in den folgenden Beispielen angesprochen.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Abb. 2.31 Wirkungsgrad η

Beispiel 2.68 : Maßstab

In einer Zeichnung soll eine Strecke der Länge D = 8 m im Maßstab 1:50 gezeichnet werden. Wie groß wird sie auf der Zeichnung abgebildet?

Lösung

Maßstab $\mu = \frac{B}{D} = \frac{\text{Bild}}{\text{Natur}}$,

dabei ist B die Bildgröße, Zeichen- oder Kartengröße und
D die Dinggröße oder wirkliche Größe.

$$\frac{B}{D} = \frac{1}{50} \quad | \cdot D$$

$$B = \frac{D}{50} \Leftrightarrow D = 50 \cdot B$$

Ist also ein Gebäude im Maßstab B : D = 1 : 50 gezeichnet, so heißt dies, dass jede gezeichnete Länge gleich $\frac{1}{50}$ der wirklichen Länge D ist oder diese gleich dem 50fachen der Bildgröße B ist.

In unserem Beispiel ist somit

$B = \frac{8 \text{ m}}{50} = 16 \text{ cm}.$

Der Maßstab 1 : 100 000 einer Landkarte besagt, dass 1 cm auf der Landkarte 100 000 cm = 1 km in der Natur entspricht. Man schreibt auch:

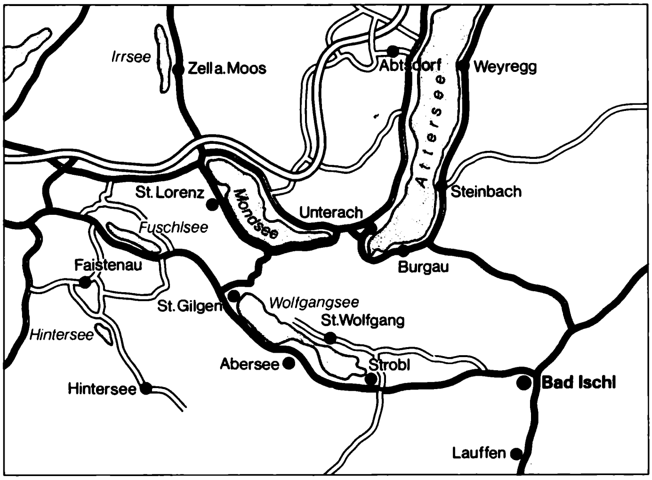


Abb. 2.32 Landkarte im Maßstab 1 : 500 000

1 cm $\hat{=}$ 100 000 cm
($\hat{=}$ ist das Zeichen für "entspricht").

Bei Maßstabangaben sind häufig Zähler- und Nennergröße nicht gleichartig.

Beispiel: $\mu = \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ km/h}}$ oder auch 1 cm $\hat{=}$ 10 km/h.

Beispiel 2.69 : Verhältnis von Flächeninhalten

Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Kreis eingeschrieben. Wie verhalten sich die Flächeninhalte?

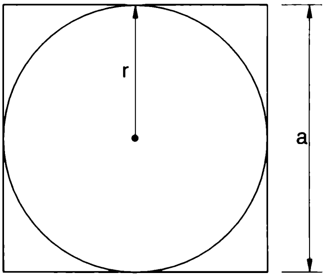


Abb. 2.33 Zu Beispiel 2.69

Lösung

Ist r der Kreisradius, so ist $r = \frac{a}{2}$.

Bezeichnen A_{Quadrat} und A_{Kreis} die Flächeninhalte von Quadrat und eingeschriebenem Kreis, so gilt:

$$A_{\text{Quadrat}} = a^2;$$

$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot a^2;$$

$$\frac{A_{\text{Quadrat}}}{A_{\text{Kreis}}} = \frac{a^2}{\frac{\pi}{4} \cdot a^2} = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27 = 1{,}27 : 1.$$

Prozent, Promille, Parts per Million

Verhältnisse zweier Größen W und G *gleicher* Art werden statt in der Form W : G verbreitet auch als Brüche mit dem Nenner 100, 1000 oder, bei sehr kleinen Verhältnissen, mit dem Nenner 1 000 000 angegeben. In dieser Form geschrieben, kann man sie leicht miteinander vergleichen. Man schreibt dabei kurz:

1 %	für	$\frac{1}{100} = 0{,}01$	(1 Prozent = 1 Hundertstel)
1 ‰	für	$\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$	(1 Promille = 1 Tausendstel)
1 ppm	für	$\frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$	(1 part per million = 1 Millionstel)

Entsprechend schreibt man etwa einen Bruch mit dem Zähler p und dem Nenner 100:

$\frac{p}{100} = p\,\%$ (gelesen: "p Prozent").

Bei Prozentrechnungen (wie auch bei ‰- und ppm-Berechnungen) können Fehler leichter vermieden werden, wenn das Zeichen % durch den Faktor 0,01, das Zeichen ‰ durch 0,001 und ppm durch 0,000 001 ersetzt wird.

Beispiel 2.70 : Schreibweise in %, ‰ oder ppm

a) Schreibe als Bruch und als Dezimalzahl: 16%, 4‰, 24 ppm.

b) Schreibe in Prozent: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, 1,5.

Lösung

Zu **a)** $16\,\% = \frac{16}{100} = 0{,}16$; $4‰ = \frac{4}{1\,000} = 0{,}004$; $24 \text{ ppm} = \frac{24}{1\,000\,000} = 0{,}000\,024$.

Zu **b)** $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$; $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375 = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\,\%$; $1{,}5 = \frac{150}{100} = 150\,\%$.

Genauso wie bei Anwendungsaufgaben Brüche in Formulierungen wie etwa $\frac{3}{8}$ von 60 auftreten, ist in der Prozentrechnung etwa 12% von 50 als $\frac{12}{100}$ von 50 zu verstehen. Hierbei bedeutet das Wort "von" eine Multiplikation (siehe Seite 47). Die Benennung % (wie auch ‰ und ppm) steht also für einen Faktor!

Die Grundaussage der Prozentrechnung lautet:

$$\textbf{p\% von G} = \frac{p}{100} \textbf{ mal G}$$

G heißt Grund*wert* und p Prozentsatz; das Ergebnis wird auch Prozent*wert* W genannt. Damit erhalten wir die **Berechnungsformeln**:

$W = \frac{p}{100} \cdot G$	Man berechnet p % einer Größe G, indem man diese Größe mit $\frac{p}{100}$ multipliziert.
$p = 100 \cdot \frac{W}{G}$	Soll ein Verhältnis $\frac{W}{G}$ in Prozent angegeben werden, so ist es mit 100 zu multiplizieren.

Diese beiden Formeln sind im Grunde eine einzige, da sie durch Umformung auseinander hervorgehen; sie werden nur aus praktischen Gründen in diesen zwei Formen angeführt.

Hinweis: Ist man unsicher, was der Grundwert G ist, so hilft die in solchen Aufgaben stets auftretende Wendung "**% von**". Der Wert, der danach folgt, ist der Grundwert!

Beispiel 2.71 : p % einer Größe G

a) 12 % von 50 (= Grundwert) sind 6, denn $\frac{12}{100} \cdot 50 = 0{,}12 \cdot 50 = 6$.

b) 5 % von € 480 (= Grundwert) sind € 24, denn $\frac{5}{100} \cdot$ € 480 = 0,05 · € 480 = € 24.

c) Lötmaterial ist eine Legierung aus Zinn und Blei. In einer Legierung von 2 kg (= Grundwert) mit 30 % Zinn sind 0,6 kg Zinn enthalten, denn $\frac{30}{100} \cdot 2$ kg = 0,3 · 2 kg = 0,6 kg.

Beachte: Bei Zahlenangaben in %, ‰ und ppm muss stets der Grundwert ($\hat{=}$ 100 %) als Bezugsgröße angegeben werden!

Beispiel 2.72 : Prozentueller Anteil

a) In einem Betrieb ist die Anzahl der Mitarbeiterinnen gleich 33, der Mitarbeiter gleich 87. Wie groß ist der prozentuelle Anteil der Mitarbeiterinnen unter allen Beschäftigten?

b) Der Preis einer Ware wird von € 160 um € 40 auf € 200 erhöht.
Berechne das Verhältnis der Preissteigerung zum *ursprünglichen* Preis sowie zum *neuen* Preis in Prozent.

Lösung

Zu **a)** Anzahl W der Mitarbeiterinnen: 33, Gesamtanzahl G = 120;
Berechnungsformel "Verhältnis W zu G mal 100" für den Prozentsatz p:

$p = 100 \cdot \frac{33}{120} = 27{,}5$.

Der Anteil beträgt 27,5 %. Beachte, dass p nur der Zähler des Bruches $\frac{p}{100} = p\,\%$ ist.

Zweite Lösungsvariante: Verhältnis W zu G, wobei dieser Bruch *nach* seiner Berechnung einfach in Prozent umgeschrieben wird;

$\frac{33}{120} = 0{,}275 = \frac{27{,}5}{100} = 27{,}5\,\%$. (Zur Erinnerung: $\frac{p}{100} = p\,\%$!)

Zu **b)** W = € 40;

Bezug auf den alten Preis (G = € 160): $p = 100 \cdot \frac{€\ 40}{€\ 160} = 25$, also 25% von G;

Bezug auf den neuen Preis (G = € 200): $p = 100 \cdot \frac{€\ 40}{€\ 200} = 20$, also 20% von G.

Die Angabe einer prozentuellen Preissteigerung um 25% oder 20% ohne Angabe des Grundwertes G ist sinnlos! 25% und 20% sind *Faktoren* in einem Produkt, dessen zweiter Faktor stets der Grundwert ist.

Beispiel 2.73 : Promille und ppm

a) Die jährliche Prämie für eine Versicherung beträgt 4‰ der Versicherungssumme. Wie groß ist diese Prämie, wenn die Versicherungssumme € 250000 beträgt?

b) In 2 kg einer chemischen Lösung befinden sich 16 mg einer Substanz. Wie groß ist ihr Masseanteil in der Lösung?

Lösung

Zu **a)** 4‰ von € 250000 sind 0,004 · € 250000 = € 1000.

Zu **b)** $\frac{16\text{ mg}}{2\text{ kg}} = \frac{16 \cdot 10^{-6}\text{ kg}}{2\text{ kg}} = 8 \cdot 10^{-6} = 8\text{ ppm}.$

Beispiel 2.74 : Verschiedene Berechnungen

a) In den USA wird in Restaurants ein Bedienungsgeld von 15% erwartet (die Bedienung ist im Preis nicht inbegriffen). Wie lässt sich das Bedienungsgeld schnell im Kopf berechnen, wenn die Rechnung auf $ 24 lautet?

b) Auf einen Rechnungsbetrag von € 2400 wird ein Preisnachlass von 5% gewährt. Wie hoch ist der ermäßigte Rechnungsbetrag?

c) Ein Autohändler hat beim Verkauf eines Autos € 1920, das sind 8% des Verkaufspreises, verdient. Wie hoch ist der Verkaufspreis?

d) Der Preis eines Fahrrades steigt um 12% gegenüber dem alten Verkaufspreis von € 412,5. Wie lautet der neue Verkaufspreis?

e) Eine Rechnung ist auf € 450 inklusive Umsatzsteuer (Steuersatz 20%) ausgestellt. Wie viel Umsatzsteuer ist darin enthalten?

f) Der Preis von Pumpen wurde um 20% gesenkt. Bald darauf musste der Preis jedoch aus wirtschaftlichen Gründen wieder um 5% erhöht werden. Wie viel Prozent des ursprünglichen Preises beträgt somit die Preissenkung?

Lösung

Zu **a)** 10% – also ein Zehntel – von $ 24 ist $ 2,4. Die restlichen 5% sind die Hälfte von 10%, also $ 1,2; zusammen somit $ 3,6.

Zu **b)** Nachlass = 5% von € 2400 = 0,05 · € 2400 = € 120;
ermäßigter Preis: € 2400 – € 120 = € 2280.

Zweite Lösungsvariante:

Zieht man von 100% den Nachlass von 5% (jeweils von € 2400) ab, so bleiben 95% von € 2400; ermäßigter Preis also 0,95 · € 2400 = € 2280.

Zu **c)** 8% des Verkaufspreises G sind € 1920, also $0{,}08 \cdot G$ = € 1920; daraus G = € 24000.

Zweite Lösungsvariante:

Wenn 8% von G gleich € 1920 sind, dann ist 1% von G gleich $\frac{1}{8} \cdot$ € 1920 = € 240; 100% sind dann € 24000.

Zu **d)** Preisanstieg: 12% von € 412,5 = 0,12 · € 412,5 = € 49,5;
neuer Preis: € 412,5 + € 49,5 = € 462.

Zweite Lösungsvariante:

Neuer Verkaufspreis = 112% von € 412,5 = 1,12·€ 412,5 = € 462.

Zu **e)** Verkaufspreis inklusive Umsatzsteuer, also € 450 = Verkaufspreis G exklusive Umsatzsteuer + Umsatzsteuer:

€ 450 = G + 20% von G = G + 0,2·G = 1,2 G;
daraus $G = \frac{€\ 450}{1{,}2}$ = € 375. Umsatzsteuer = € 450 – € 375 = € 75.

Zu **f)** Die Preisänderungen beziehen sich stets auf den aktuellen Preis.

Ursprünglicher Preis einer Pumpe	x
Preissenkung um 20% von x	$0{,}2 \cdot x$
Neuer Preis	$x - 0{,}2 \cdot x = 0{,}8 \cdot x$
Preissteigerung um 5% von 0,8·x	$0{,}05 \cdot 0{,}8 \cdot x = 0{,}04 \cdot x$
Endpreis	$0{,}8 \cdot x + 0{,}04 \cdot x = 0{,}84 \cdot x$ = 84% von x

Der Endpreis beträgt 84% des ursprünglichen Preises, die prozentuelle Preissenkung somit 16%.

Im Überblick: Verhältnisse

Den Quotienten a : b oder $\frac{a}{b}$ nennt man **Verhältnis von a zu b**. Ein Verhältnis wird wie ein Bruch behandelt.

$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01;\quad 1\,‰ = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001;\quad 1\ \text{ppm} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001.$

Man berechnet p% einer Größe G, indem man diese Größe mit $\frac{p}{100}$ multipliziert:
$W = \frac{p}{100} \cdot G.$
p . . . Prozentsatz; G . . Grundwert; W . . Prozentwert.

Soll ein Verhältnis $\frac{W}{G}$ in Prozent angegeben werden, so ist es mit 100 zu multiplizieren:
$p = 100 \cdot \frac{W}{G}$

Maßstab $\mu = \frac{B}{D} = \frac{\text{Bild}}{\text{Natur}}$

Aufgaben

2.190 Schreibe folgende Verhältnisse in der Form a : 1 oder 1 : a, sodass a > 1 ist:

a) 165 m : 11 m **b)** 237,5 kg : 19 kg **c)** 12 mm : 30 mm
d) 240 g : 3,6 kg **e)** 5 h : 3 min **f)** 10 mm^2 : 7 cm^2
g) 200 cm^2 : 8 dm^2 **h)** 20 cm^3 : 0,15 dm^3 **i)** 600 ml : 0,3 dm^3

2.191 Gib folgende Verhältnisse in der Form a : b mit dem Nenner b = 1 an:

a) 1 dm^2 : 1 cm^2 **b)** 1 m^2 : 1 cm^2 **c)** 1 a : 1 m^2 **d)** 1 ha : 1 a
e) 1 dm^3 : 1 cm^3 **f)** 1 m^3 : 1 cm^3 **g)** 1 dm^3 : 1 *l* **h)** 1 *l* : 10 cm^3
i) 1 m^3 : 1 hl **j)** 1 ms : 1 µs **k)** 1 ms : 1 ns **l)** 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$: 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2.192 In welchem Maßstab ist eine Zeichnung oder Landkarte hergestellt, wenn der Bildgröße folgende Dinggröße entspricht:

a) 1 cm $\widehat{=}$ 2 km **b)** 3 cm $\widehat{=}$ 9 km **c)** 5 mm $\widehat{=}$ 25 cm
d) 12 mm $\widehat{=}$ 24 cm **e)** 10 mm $\widehat{=}$ 1 m **f)** 8 cm $\widehat{=}$ 3,2 m

2.193 Richtig oder falsch? Ein Verhältnis zweier Zahlen bleibt gleich, wenn man

a) zu jeder Zahl dieselbe Zahl addiert; **b)** jede Zahl verdreifacht;
c) jede Zahl durch dieselbe Zahl ($\neq$ 0) dividiert; **d)** jede Zahl quadriert ?

2.194 Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Ein zweites Quadrat besitzt eine doppelt so große Seitenlänge. Wie verhalten sich **a)** ihre Umfänge, **b)** ihre Flächeninhalte?

2.195 Wie verhalten sich **a)** die Umfänge, **b)** die Flächeninhalte zweier gleich breiter Rechtecke, deren Längen sich wie 3 : 4 verhalten?

2.196 Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r. Ein weiterer Kreis besitzt nur einen halb so großen Radius. Wie verhalten sich **a)** ihre Umfänge, **b)** ihre Flächeninhalte?

2.197 Ein größerer Würfel besitzt eine doppelt so große Kantenlänge wie ein kleinerer. Wie verhalten sich **a)** ihre Oberflächen, **b)** ihre Rauminhalte?

2.198 Ein LKW mit einer Gesamtmasse von m = 3 t fährt mit einer Geschwindigkeit von v = 40 km/h. Wie verhalten sich die kinetischen Energien, wenn der LKW
a) seine Masse m durch Zuladung, **b)** seine Geschwindigkeit v verdoppelt?
Hinweis: Kinetische Energie $W = \frac{m\,v^2}{2}$.

2.199 Breite und Länge einer Papierseite im Format A4 sind 210 mm und 297 mm. Zeige, dass sich diese Größen angenähert wie 1 : $\sqrt{2}$ verhalten!

2.200 Schreibe die folgenden Brüche in Prozent, Promille oder ppm:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{1}{20}$ **e)** $\frac{1}{25}$
f) $\frac{1}{100}$ **g)** $\frac{1}{500}$ **h)** $\frac{1}{1000}$ **i)** $\frac{1}{10000}$ **j)** $\frac{1}{500000}$

2.201 Schreibe die folgenden in %, ‰ oder ppm angegebenen Verhältnisse in Bruchform:
a) 1% **b)** 5% **c)** 18% **d)** 75% **e)** 100%
f) 1‰ **g)** 4‰ **h)** 0,8‰ **i)** 1 ppm **j)** 20 ppm

2.202 Wie viel sind:
a) 18% von 100 20 % **b)** 2% von 40 cm 0,8 **c)** 12% von 3 kg
d) 24% von 400 Stück **e)** 3% von € 180 **f)** 80% von 15 kW
g) 120% von 2000 **h)** 3‰ von 200 g **i)** 0,8‰ von 120 g
j) 2,5‰ von 12 g **k)** 4 ppm von 20 g **l)** 24 ppm von 1 g

2.203 Berechne folgende Anteile in Prozent, Promille oder ppm:
a) € 30 von € 150 **b)** 6 kg von 300 kg **c)** 66 V von 75 V
d) 44 kW von 80 kW **e)** 4 von 5 **f)** 5 von 4
g) 300 von 200 **h)** 1 s von 1 h **i)** 3 von 2000 Stück
j) 0,2 mg von 1 g **k)** 50 μm von 1 m **l)** 30 ml von 0,5 m^3

2.204 Der Preis eines Artikels stieg von € 12 auf € 15. Wie groß ist die Preissteigerung bezogen **a)** auf den alten Preis, **b)** auf den neuen Preis?

2.205 Berechne den Grundwert (Nenner des Verhältnisses), wenn
a) 4 kg ≙ 30% **b)** € 4200 ≙ 120% **c)** 24 cm ≙ 300%
d) 12 m^3 ≙ 4% **e)** 4 ml ≙ 2‰ **f)** 3 μg ≙ 8 ppm

2.206 Was gibt die Steigerung von:
a) 280 kg um 3% **b)** 76 dag um 20% **c)** € 3800 um 5%
d) € 500 um 12% **e)** 4 dm^3 um 100% **f)** 4 dm^3 um 200%
g) 200 V um 8‰ **h)** 8000 kWh um 5,5‰

2.207 Zwei Orte mit einem Höhenunterschied von 630 m haben laut Straßenkarte eine Entfernung von 18 km. Berechne die mittlere Straßensteigung zwischen den Orten!
Hinweis: Steigung = Verhältnis von Höhenunterschied zu Horizontalentfernung.

2.208 Wie viel Tonnen 72%iges Eisenerz (d.h. 72% der Eisenerzmasse ist Eisen) werden gebraucht, um 10 t Eisen zu gewinnen?

2.209 Aus einem leck gewordenen ursprünglich mit 60 *l* voll gefüllten Benzintank sind 2,4 *l* Benzin ausgeflossen. Wie viel Prozent beträgt der Verlust?

2.210 Eine 50 m lange Eisenbahnschiene dehnt sich bei Erwärmung um 30°C um 18 mm aus. Berechne die prozentuelle Längenzunahme.

2.211 Ein Eisenstück ($\varrho = 7{,}85 \text{ kg dm}^{-3}$) wird ganz unter Wasser getaucht. Wie groß ist der prozentuelle Gewichtsverlust (Gewichtsverlust = Gewicht der verdrängten Wassermenge)?

2.212 Bei einem Förderband konnte die Laufgeschwindigkeit um 100% erhöht werden. Wie viel beträgt bei sonst gleichen Bedingungen die prozentuelle Zeitersparnis, wenn eine bestimmte Menge transportiert werden soll?

1% = 0,5 ‰

2.213 Ein Betrieb produziert in 20 Arbeitstagen 600 Stück eines Artikels. Um wie viel Prozent muss die tägliche Stückzahl gesteigert werden, damit innerhalb von nur 16 Tagen die gleiche Stückzahl produziert werden kann?

2.214 Die Wochenarbeitszeit wird von 40 auf 37,5 Arbeitsstunden bei vollem Lohnausgleich (d.h. gleich bleibendem Lohn) gesenkt. Welche prozentuelle Lohnerhöhung pro Arbeitsstunde bedeutet dies?

2.215 Schwefelsäure besteht aus Wasserstoff, Sauerstoff und Schwefel nach der chemischen Formel H_2SO_4. Das Massenverhältnis von Sauerstoff zu Wasserstoff beträgt 16 : 1, von Schwefel zu Wasserstoff 32 : 1. Wie viel Prozent der Masse von Schwefelsäure ist Sauerstoff, wie viel ist Schwefel?

2.216 Der Preis einer Ware stieg zuerst um 15%, danach sank er um 15% (jeweils auf den gerade aktuellen Preis bezogen). Wie viel Prozent des ursprünglichen Preises beträgt die Preisänderung?

2.217 Im Jahre 1997 sank der Umsatz eines Betriebes um 3% gegenüber dem Jahr 1996. Im Jahre 1998 stieg der Umsatz im Vergleich zum Vorjahr um 6%. Berechne die Umsatzänderung von 1996 auf 1998 in Prozent verglichen mit dem Umsatz von 1996.

2.218 Die Blutalkoholkonzentration c (Alkoholvolumen durch Blutvolumen) einer Person der Masse p wird oft nach der Formel $A = c \cdot p \cdot r$ berechnet. Dabei bedeuten A die aufgenommene Alkoholmenge (in kg), und r den sogenannten Reduktionsfaktor, der bei Frauen um 0,63, bei Männern um 0,68 liegt. Berechne c für einen 70 kg schweren Mann bei einer aufgenommenen Alkoholmenge von 40 g.

2.219 Bei der Fertigung von Stanzteilen werden zwei Automaten eingesetzt: Automat A hat einen Ausschussanteil von 3%, Automat B einen solchen von 5%. Es wurden $x_A = 20000$ Teile von A und $x_B = 12000$ Teile von B gefertigt.

a) Wie groß ist der Ausschussanteil unter allen gefertigten Stanzteilen?

b) Gib auch die allgemeine Formel für p an, wenn die Anzahlen x_A und x_B nicht bekannt sind. Wie lautet die Formel, wenn $x_A = x_B$?

2.220 Der Stromverbrauch in einem Unternehmen, der im ersten Jahr gleich v ist, steigt im zweiten Jahr um 4%, vom zweiten auf das dritte Jahr um 10% (jeweils auf den Vorjahreswert bezogen). Ist es richtig, dass eine jährliche Zunahme um $\frac{1}{2} \cdot (4\% + 10\%) = 7\%$ gegenüber dem Vorjahreswert eine gleich große Zunahme vom ersten auf das dritte Jahr bewirken würde?

2.221 Bei der Anzahl x der Fahrzeuge auf einem bestimmten Straßenstück wird mit einer jährlichen gleich bleibenden Steigerung von p% (jeweils auf den Vorjahreswert bezogen) gerechnet. Nach wie vielen Jahren hat sich unter dieser Voraussetzung die Fahrzeuganzahl verdoppelt, wenn **a)** p% = 5%, **b)** p% = 10% ist?

2.222 Bei einer Sportveranstaltung gibt es folgende Regelung für den Eintritt: Erwachsene zahlen € 40,–, Schüler zahlen die Hälfte. Für (erwachsene) Vereinsmitglieder sind die Karten um 20% ermäßigt. Es soll nun für ein EDV-Programm eine Formel für die gesamten Einnahmen y aufgestellt werden. Wie lautet sie, wenn e Erwachsene, s Schüler und v Vereinsmitglieder die Veranstaltung besuchen?

3 Numerisches Rechnen

Rechnungen im technischen Bereich sind weitgehend numerisch, wobei in der Regel statt mit exakten Werten mit Näherungswerten gearbeitet wird. Dies macht es notwendig, sich Gedanken über den möglichen Fehler eines Ergebnisses zu machen. Wie genau kann man beispielsweise die Spannung an einem elektrischen Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ berechnen, wenn man R und I misst und daher nur näherungsweise kennt?

Numerisches Rechnen erfolgt überwiegend mit Dezimalzahlen.

3.1 Dezimalzahlen

Beispiel 3.1 : Handrechnen mit Dezimalzahlen

a) 3,128 – 1,497 = ?

$$\begin{array}{r} 3{,}128 \\ \underline{-\,1{,}497} \\ 1{,}631 \end{array}$$

Man addiert oder subtrahiert in gewohnter Weise, indem man die Zahlen so untereinander schreibt, dass Komma über Komma steht.

b) $0{,}24 \cdot 3{,}2 = ?$

$24 \cdot 32 = 768$;

Ergebnis: 0,768

Man multipliziert, ohne auf die Kommastellung zu achten. Danach erhält das Ergebnis (Produkt) so viele Stellen nach dem Komma, wie die Faktoren *zusammen* haben.

c) $0{,}078 \cdot 100 = 7{,}8$.

Multiplikation mit $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, ... verschiebt das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach *rechts*.

d) $1{,}28 : 0{,}4 = 12{,}8 : 4 = 3{,}2$.

Vor der Division durch eine Dezimalzahl wird das Komma im Dividenden (hier 1,28) und im Divisor (hier 0,4) so weit nach rechts verschoben, bis der Divisor kommafrei ist.

Schreibt man die Division als Bruch, so bedeutet dies eine Erweiterung mit einer Zehnerpotenz: $\frac{1,28}{0,4} = \frac{1,28 \cdot 10}{0,4 \cdot 10} = \frac{12,8}{4} = 12{,}8 : 4$.

e) $1{,}2 : 1000 = 0{,}0012$.

Division durch $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, ... verschiebt das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach *links*.

Eine Dezimalzahl wird mit einer der Situation angemessenen Stellenanzahl geschrieben. Beim **Runden** wird die letzte Ziffer so bestimmt, dass die Abweichung von der ungekürzten Dezimalzahl kleinstmöglich ist.

Rundungsregel: Entscheidend ist die Ziffer, die *rechts* neben der Stelle steht, "auf die gerundet wird". Ist diese Ziffer **höchstens gleich 4**, so wird **abgerundet:** die weiter rechts liegenden Ziffern werden einfach weggelassen oder – bei Rundung vor der Einerstelle – durch Nullen ersetzt.

Ist diese Ziffer **mindestens gleich 5**, so wird **aufgerundet**: Es wird 1 an der zu rundenden Stelle addiert.

Beispiel 3.2 : Runden von Dezimalzahlen

a) $8{,}29506 \approx 8$ (auf Einer gerundet)
$\approx 8{,}3$ (auf Zehntel gerundet)
$\approx 8{,}30$ (auf Hundertstel gerundet)
$\approx 8{,}295$ (auf Tausendstel gerundet)
$\approx 8{,}2951$ (auf Zehntausendstel gerundet)
($\approx$ ist das Kurzzeichen für "ungefähr gleich")

b) $7{,}647 \approx 7{,}6$ (auf Zehntel gerundet).

Eine schrittweise Rundung, d.h. zuerst auf Hundertstel und dann auf Zehntel würde ergeben: $7{,}647 \approx 7{,}65 \approx 7{,}7$; dies sollte vermieden werden!

c) Rundet man auf eine Stelle *vor* der Einerstelle, so sind dahinter Nullen anzuschreiben. Es ist mitzuteilen, auf welche Stelle gerundet wurde! Dies kann man vermeiden, wenn man die gerundete Zahl ohne diese Nullen in der Gleitkommadarstellung schreibt:

$2758 \approx 2760$ (auf Zehner gerundet); besser: $2{,}76 \cdot 10^3$
≈ 2800 (auf Hunderter gerundet); besser: $2{,}8 \cdot 10^3$
≈ 3000 (auf Tausender gerundet); besser: $3 \cdot 10^3$

Vorsicht ist auch beim Umwandeln von Größen angebracht. Liegt etwa die Längenangabe 32,8 m als gerundete Zahl vor, so kann sie in der Form 328 dm, aber nicht mehr ohne Rundungsangabe in der Form 3280 cm geschrieben werden, wohl aber wieder in der Form $3{,}28 \cdot 10^3$ cm.

Anmerkung

Das Zeichen "$\approx$" wird im praktischen Rechnen sehr häufig durch das Gleichheitszeichen ersetzt, das nun Gleichheit im Rahmen einer bestimmten Genauigkeit bedeutet. So schreibt man beispielsweise $\pi = 3{,}14$ statt $\pi \approx 3{,}14$.

Beispiel 3.3 : Rundungsintervall

Welche Zahlen x ergeben nach Rundung **a)** 3,7; **b)** 3,70?

Lösung

Zu **a)** Alle Zahlen, die im Intervall [3,65; 3,75[liegen. Der größtmögliche absolute Fehler beträgt also 0,05.

Zu **b)** Alle Zahlen, die im Intervall [3,695; 3,705[liegen. Der größtmögliche absolute Fehler beträgt hier nur noch 0,005, also ein Zehntel jenes von 3,7.

Die gerundete Zahl 3,70 drückt daher eine höhere Genauigkeit aus als die gerundete Zahl 3,7! Umgekehrt darf an eine gerundete Zahl keine Null angefügt werden, da dies eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen würde.

Was sind die "geltenden" Ziffern einer gerundeten Zahl?

In einer Dezimalzahl werden Nullen manchmal gebraucht, um das Dezimalkomma an der richtigen Stelle schreiben zu können. Ein Beispiel dafür sind die drei Nullen in der Zahl 0,0028. Sie werden auch als die "führenden" Nullen dieser Zahl bezeichnet. Entstand 0,0028 durch Rundung, so sagt man, dass diese Zahl 2 **geltende** oder **signifikante** Ziffern besitzt, nämlich 2 und 8. In der gerundeten Zahl 0,00208 ist die Null zwischen den Ziffern 2 und 8 jedoch geltend, so dass diese Zahl drei geltende Ziffern besitzt.

Beispiel 3.4 : Geltende Ziffern

a) Die gerundeten Zahlen 3,401; 42,87; 107,3 und 8237 haben vier geltende Ziffern.

b) Die gerundeten Zahlen 114; 4,08; 0,829 und 0,0203 haben drei geltende Ziffern.

c) Die gerundete Zahl 3,7 besitzt zwei, die gerundete Zahl 3,70 jedoch drei geltende Ziffern.

d) Wird die Zahl 2758 zu 2800 gerundet, so hat diese Zahl nur noch zwei geltende Ziffern; die beiden Nullen dienen dazu, um die Zahl bis zum Komma (braucht hier nicht geschrieben werden), aufzufüllen.

Schreibt man eine gerundete Zahl in der (normierten) Gleitkommadarstellung, so sind ihre geltenden Ziffern gerade die Ziffern vor der Zehnerpotenz.

Beispiel: $0{,}0509 = 5{,}09 \cdot 10^{-2}$ besitzt als gerundete Zahl 3 geltende Ziffern.

Bei technischen Angaben oder Berechnungen reichen in der Regel drei bis höchstens vier geltende Ziffern.
Das Abschreiben von mehr Ziffern aus dem Taschenrechner liefert meist nur "Ziffernschrott"!

Beispiele:

3 geltende Ziffern: Kreiszahl $\pi = 3{,}14$; Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$;
Dichte von Eisen $\varrho = 7{,}85 \cdot 10^3\ \mathrm{kgm}^{-3}$;
spezifischer elektrischer Widerstand von Kupfer $\varrho = 0{,}0178 \cdot 10^{-6}\ \Omega\mathrm{m}$;

4 geltende Ziffern: Dichte der Luft $\varrho = 1{,}293\ \mathrm{kgm}^{-3}$; Elementarladung $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Aufgaben

3.1 Berechne *im Kopf* (die Dezimalzahlen sollen als exakte Werte betrachtet werden):

a) $0{,}3 + 0{,}18$ **b)** $0{,}3 - 0{,}4$ **c)** $10 \cdot 0{,}2$ **d)** $0{,}2 \cdot 0{,}3$ **e)** $7 \cdot 0{,}03$
f) $0{,}02 \cdot 1000$ **g)** $0{,}3 \cdot 0{,}4$ **h)** $0{,}05 \cdot 0{,}5$ **i)** $1 : 0{,}1$ **j)** $3 : 0{,}2$
k) $0{,}4 : 2$ **l)** $1{,}2 : 3$ **m)** $0{,}12 : 3$ **n)** $0{,}8 : 0{,}1$ **o)** $4{,}5 : 0{,}5$
p) $2{,}8 : 0{,}2$ **q)** $4{,}8 : 0{,}4$ **r)** $1 : 0{,}02$ **s)** $0{,}8 : 0{,}4$ **t)** $0{,}1 : 0{,}4$

3.2 Berechne ohne Taschenrechner (die Dezimalzahlen sind exakte Werte):

a) $0{,}2 + 0{,}12 - 0{,}1$ **b)** $0{,}5 - 0{,}62$ **c)** $4{,}2 \cdot 0{,}3$ **d)** $0{,}22 \cdot 0{,}3$
e) $0{,}7 \cdot 0{,}03$ **f)** $0{,}002 \cdot 8{,}3$ **g)** $0{,}02 \cdot 10{,}8$ **h)** $0{,}000018 \cdot 1000$
i) $1{,}23 : 0{,}2$ **j)** $0{,}43 : 0{,}02$ **k)** $0{,}02 : 0{,}4$ **l)** $0{,}0028 : 0{,}0002$
m) $0{,}08 : 5{,}5$ **n)** $4 : 0{,}125$ **o)** $0{,}12 : 0{,}0375$ **p)** $4{,}8 : 0{,}016$

3.3 Berechne ohne Taschenrechner (die Dezimalzahlen sind exakte Werte):

a) $r - 0{,}2r$ **b)** $0{,}4x \cdot 0{,}5$ **c)** $-x + 1{,}1x$
d) $x - 0{,}5 \cdot 0{,}08x$ **e)** $0{,}8a - a + 0{,}2a$ **f)** $0{,}5 \cdot (s - 0{,}8s) - s$
g) $0{,}5 \cdot (0{,}1p + 0{,}08p)$ **h)** $0{,}1k \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) - 0{,}1k$ **i)** $100 \cdot (0{,}002x - 0{,}01x)$

3.4 Runde

a) 432,26 auf Zehntel, **b)** 48,202 auf Hundertstel, **c)** – 0,00826 auf Hundertstel,
d) 4856 auf Zehner, **e)** 82482 auf Hunderter, **f)** 344089 auf Tausender.

3.5 Runde die Zahl $\pi = 3{,}14159265...$ auf **a)** 1, **b)** 2, **c)** 3, **d)** 4 geltende Ziffern.

3.6 Runde die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 299\,792\,458\ \mathrm{ms}^{-1}$ auf **a)** 1, **b)** 2, **c)** 3, **d)** 4 geltende Ziffern und gib das Ergebnis in der Gleitkommadarstellung an.

3.7 Mit Hilfe der Integer-Funktion können positive Zahlen formelmäßig gerundet werden. Was ergibt:

a) $\text{int}\,(5{,}8 + 0{,}5)$; **b)** $\frac{1}{10} \cdot \text{int}\,(10 \cdot 2{,}187 + 0{,}5)$; **c)** $\frac{1}{100} \cdot \text{int}\,(100 \cdot 0{,}1743 + 0{,}5)$

3.8 Gib das Intervall an, aus dem die folgenden Zahlen durch Rundung hervorgehen:

a) 2,3 **b)** 0,12 **c)** $-4{,}2$ **d)** 2 **e)** 2,0
f) 2,00 **g)** 0,110 **h)** $1{,}23 \cdot 10^2$ **i)** $1{,}2 \cdot 10^2$ **j)** $1{,}20 \cdot 10^2$

3.9 Gib an, wie viele geltende Ziffern die folgenden gerundeten Zahlen haben:

a) 4,2 **b)** 34,02 **c)** 0,19 **d)** 0,0019 **e)** 4,20
f) 143 **g)** 0,00104 **h)** $3{,}7 \cdot 10^{-4}$ **i)** $3{,}70 \cdot 10^3$ **j)** $4{,}004 \cdot 10^3$

3.2 Überschlagsrechnung

Zum schnellen Abschätzen eines Rechenergebnisses versucht man, mit "bequemen" Näherungen – besonders auch in *Kopfrechnung* – ein angemessen genaues Ergebnis zu erzielen. Eine überschlagsmäßige Berechnung lenkt den Blick auf die Größenordnung der Zahlen und fördert Zahlengefühl sowie Beweglichkeit beim Rechnen.

Beispiel 3.5 : Überschlagsrechnungen

a) $3{,}12 + 27{,}78 + 4{,}28 \approx 3 + 30 + 4 = 37$

b) $5320 + 1879 - 2812 \approx 5000 + 2000 - 3000 = 4000$

c) $8 \cdot 3{,}8 \approx 8 \cdot 4 = 32$

d) $0{,}27 \cdot 63 \approx 0{,}3 \cdot 60 = 18$

e) $821 \cdot 0{,}77 \approx 800 \cdot \frac{3}{4} = 600$ ($\frac{3}{4}$ von 800)

f) $32 : 190 \approx \frac{30}{200} = \frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0{,}15$

g) $1{,}1 : 0{,}2 \approx 1 : \frac{1}{5} = 1 \cdot \frac{5}{1} = 5$;
oder $1{,}1 : 0{,}2 \approx 1 : 0{,}2 = 10 : 2 = 5$ (Wie oft geht 0,2 in 1?)

h) $0{,}062 : 0{,}00348 = 62 : 3{,}48 \approx 60 : 3 = 20$;
oder $0{,}062 : 0{,}00348 \approx \frac{6 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 2 \cdot 10^{-2-(-3)} = 2 \cdot 10^1 = 20$

i) $\frac{488 \cdot 7}{52} \approx \frac{520 \cdot 7}{52} \approx 10 \cdot 7 = 70$;
hier wurde 488 durch 520 genähert; danach kann gekürzt werden!

j) $\frac{28{,}2 \cdot 3{,}6}{12{,}4 \cdot 83{,}9} \approx \frac{30 \cdot 4}{12 \cdot 90} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10} = 0{,}1$;
hier wurde 83,9 im Hinblick auf ein späteres Kürzen durch 90 genähert.

k) $\frac{0{,}34 \cdot 0{,}064}{0{,}00051} \approx \frac{3 \cdot 10^{-1} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{18}{5} \cdot 10^1 \approx 40$

l) $8{,}9 - \left(\frac{63{,}21}{42{,}95 - 14{,}62}\right)^2 \approx 10 - \left(\frac{60}{40 - 15}\right)^2 = 10 - \left(\frac{60}{25}\right)^2 \approx 10 - 2^2 = 6$

Beispiel 3.6 : Überschlagsrechnungen bei Quadratwurzeln

Man sucht die nächstgelegene Zahl, aus der die Quadratwurzel einfach gezogen werden kann.

a) $\sqrt{18,4} \approx \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{74,2} \approx \sqrt{81} = 9$

c) $\sqrt{0,5} = \sqrt{0,\underline{50}0...} \approx \sqrt{0,49} = 0{,}7$

Beachte, dass bei Radikanden, die kleiner als 1 sind, die Wurzel größer als der Radikand ist!
Merkregel zur Vorgangsweise: Man fasst die ersten *beiden* Ziffern nach dem Komma zu einer Zahl zusammen und versucht daraus eine Abschätzung für die Quadratwurzel.

d) $\sqrt{0,113} = \sqrt{0,\underline{11}3} \approx \sqrt{0,\underline{09}} = 0{,}3$

Beispiel 3.7 : Eine Abschätzung

Schätze ab, wie viel Luftmasse *m* ($\varrho = 1{,}293\ \mathrm{kgm}^{-3}$) sich in einem Raum der Länge 6,0 m, der Breite 4,0 m und der Höhe 2,8 m befindet.

Lösung

$m = \varrho \cdot V = 1{,}293\ \mathrm{kgm}^{-3} \cdot 6\mathrm{m} \cdot 4\mathrm{m} \cdot 2{,}8\mathrm{m} \approx 1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3\ \mathrm{kg} \approx 70\ \mathrm{kg}$; genauer: 86,9 kg.

Aufgaben

3.10 Berechne überschlagsmäßig nach Möglichkeit im Kopf:

a) $83 + 107 + 91$ **b)** $7240 - 308 + 833$ **c)** $0{,}21 + 1{,}83 + 0{,}30$
d) $22 \cdot 58$ **e)** $0{,}2 \cdot 110$ **f)** $0{,}26 \cdot 312$
g) $0{,}81 \cdot 241$ **h)** $0{,}2 \cdot 182 \cdot 8{,}4$ **i)** $8{,}3 \cdot 0{,}41 \cdot 0{,}32$
j) $0{,}02 \cdot 0{,}81 \cdot 126$ **k)** $9{,}54 \cdot 10^3 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-2}$ **l)** $7{,}18 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}4 \cdot 10^2 \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-1}$

3.11 Ebenso:

a) 182 : 45 **b)** 204 : 33 **c)** 112 : 23,9 **d)** 3418 : 660,3 **e)** 2 : 0,1
f) 2,2 : 0,11 **g)** 204 : 0,1 **h)** 4230 : 7821 **i)** 0,38 : 4 **j)** 0,2 : 0,18
k) 0,11 : 0,05 **l)** 0,90 : 0,3 **m)** 0,01 : 0,052 **n)** 0,01 : 0,009 **o)** 34,4 : 0,029

3.12 In den folgenden Aufgaben sind die Ziffern richtig, aber das Komma auf der linken Seite der Gleichung ist falsch gesetzt. Stelle richtig:

a) $3{,}4 + 87 = 121$ **b)** $125 \cdot 0{,}0345 = 4312{,}5$ **c)** $1{,}54 + 7 \cdot 45 = 330{,}4$
d) $4{,}804 : 2 = 240{,}2$ **e)** $2{,}875 : 23 = 12{,}5$ **f)** $34 : 0{,}2 = 1700$
g) $4200 - 52 \cdot 7{,}24 = 435{,}2$ **h)** $82{,}5 \cdot 800 - 22 \cdot 30 = 0$ **i)** $8 : 0{,}008 - 25 = 75$
j) $\sqrt{57,6} = 2{,}4$ **k)** $\sqrt{32,4} = 18$ **l)** $\sqrt{0,729} = 2{,}7$
m) $\sqrt{0,0961} = 3{,}1$ **n)** $\sqrt{0,441} = 0{,}21$ **o)** $\sqrt[3]{27,44} = 1{,}4$

3.13 Berechne überschlagsmäßig (teilweise auch im Kopf möglich, wenn man geschickt nähert, sodass leicht gekürzt werden kann):

a) $\frac{31\cdot 9}{17}$ **b)** $\frac{2{,}4\cdot 9}{20}$ **c)** $\frac{3{,}9\cdot 122}{41}$ **d)** $\frac{0{,}51\cdot 106}{48}$

e) $\frac{42}{6{,}8\cdot 12}$ **f)** $\frac{18}{3{,}17\cdot 2{,}4\cdot 5}$ **g)** $\frac{42\cdot 108}{51\cdot 22}$ **h)** $\frac{33{,}1\cdot 29}{90\cdot 12}$

i) $\frac{48{,}2\cdot 108}{823\cdot 37}$ **j)** $\frac{0{,}3\cdot 76}{0{,}64\cdot 159}$ **k)** $\frac{0{,}2\cdot 0{,}86}{0{,}44\cdot 0{,}9}$ **l)** $\frac{0{,}18\cdot 0{,}59}{0{,}64\cdot 0{,}06}$

3.14 Berechne überschlagsmäßig unter Verwendung der Gleitkommadarstellung:

a) $7200\cdot 0{,}42$ **b)** $0{,}038\cdot 0{,}02$ **c)** $0{,}048\cdot 0{,}0074$

d) $418\cdot 0{,}08\cdot 0{,}54$ **e)** $631\cdot 87\cdot 0{,}014$ **f)** $216\cdot 0{,}00032\cdot 81$

3.15 Ebenso:

a) $817 : 0{,}048$ **b)** $0{,}037 : 0{,}18$ **c)** $0{,}51 : 0{,}0082$ **d)** $0{,}42 : 391$

e) $\frac{0{,}34}{0{,}0062}$ **f)** $\frac{0{,}018}{0{,}00032}$ **g)** $\frac{422\cdot 0{,}71}{3780}$ **h)** $\frac{623\cdot 821}{12780}$

i) $\frac{0{,}0093}{0{,}023\cdot 0{,}81}$ **j)** $\frac{0{,}089\cdot 420}{0{,}62}$ **k)** $\frac{0{,}028\cdot 0{,}002}{928\cdot 0{,}00045}$ **l)** $\frac{0{,}081\cdot 0{,}00622\cdot 468{,}4}{285\cdot 0{,}0032\cdot 0{,}18}$

3.16 Ebenso:

a) $(0{,}029)^2$ **b)** $72\cdot 0{,}0091^2$ **c)** $0{,}03\cdot 0{,}072^3$

d) $\frac{0{,}027\cdot 0{,}06^2}{0{,}0035\cdot 0{,}12}$ **e)** $\frac{780\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}45}{0{,}0218\cdot 0{,}0065\cdot 0{,}027}$ **f)** $\frac{824\cdot 0{,}021^2}{0{,}68^3\cdot 0{,}027}$

3.17 Berechne überschlagsmäßig (prüfe durch Quadrieren des Ergebnisses):

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{22}$ **c)** $\sqrt{40{,}9}$ **d)** $\sqrt{0{,}18}$ **e)** $\sqrt{0{,}1}$ **f)** $\sqrt{0{,}9}$ **g)** $\sqrt{0{,}012}$

3.18 Berechne überschlagsmäßig:

a) $\frac{\sqrt{44}}{29\cdot 12}$ **b)** $\frac{\sqrt{78}}{32\cdot 0{,}35}$ **c)** $\frac{644}{12\cdot\sqrt{29}}$ **d)** $\frac{12{,}3\cdot\sqrt{0{,}53}}{29{,}4}$

e) $\frac{21{,}8\cdot\sqrt{0{,}4}}{12{,}8\cdot 3{,}9}$ **f)** $\frac{48{,}3\cdot\sqrt{0{,}38}}{4{,}18\cdot\sqrt{18{,}3}}$ **g)** $\frac{12{,}5\cdot\sqrt{0{,}06}}{34{,}12\cdot\sqrt{4{,}9}}$ **h)** $\frac{\sqrt{0{,}47}\cdot\sqrt{0{,}17}}{\sqrt{8{,}2}\cdot\sqrt{151{,}2}}$

3.19 Schätze die Masse einer Kugel ($m = \varrho\cdot\frac{\pi}{6}\cdot d^3$)

a) aus Blei (Dichte $\varrho = 11{,}3$ kgdm^{-3}) mit dem Durchmesser d = 40 cm;

b) aus Kork (Dichte $\varrho \approx 0{,}3$ kgdm^{-3}) mit dem Durchmesser d = 1 m ab.

3.20 Schätze ab, wie viel Tonnen Erde (Dichte $\varrho = 1{,}8$ kgdm^{-3}) sich ergeben, wenn eine rechteckige Grube von 122 m Länge und 83 m Breite 30 cm tief ausgehoben wird.

3.21 Schätze die Entfernung des Polarsterns von der Erde ab, wenn sein Licht bis zur Erde 30 Jahre braucht (Lichtgeschwindigkeit: $c = 3{,}00\cdot 10^5$ kms^{-1}).

3.22 Nehmen wir an, dass das Universum kugelförmig mit einem Radius von 15 Milliarden Lichtjahren ist. Schätze ab, wie viele kugelförmige Atome mit einem Radius von 10^{-10} m im Universum Platz finden, wenn die Packung ohne Zwischenraum erfolgen könnte.

3.3 Der Taschenrechner

Einige Hinweise zum Umgang mit dem Taschenrechner:

(1) Bei einfachen Aufgaben kann durch eine Überschlagsrechnung – mit Kopf oder mit der Hand – geprüft werden, ob das angezeigte Ergebnis sinnvoll ist. Bei einer *technischen* Berechnung ist stets darauf zu prüfen, ob das Ergebnis "vernünftig" ist.

(2) Eine Kontrolle kann darin bestehen, dass ein zweites Mal die Rechnung mit dem Taschenrechner in einer anderen Reihenfolge durchgeführt wird.

(3) Zwischenergebnisse können zur Kontrolle gerundet angeschrieben werden, bleiben aber für die Weiterrechnung in voller Genauigkeit im Taschenrechner. Taschenrechner-Konstanten wie die Kreiszahl π werden nicht ziffernmäßig eingetippt, sondern über die entsprechende Taste aufgerufen.

Beispiel 3.8 : Rechnen mit dem Taschenrechner

a) $19{,}28 + 4{,}81 - 8{,}67 = ?$

b) $\frac{2,38 \cdot 4802}{32,3 \cdot 0,412} = ?$ Runde auf 3 geltende Stellen!

c) $0{,}326^4 = ?$ Runde auf 3 geltende Stellen!

d) $8{,}9 - \left(\frac{63,21}{42,95 - 14,62}\right)^2 = ?$ Runde auf Zehntel!

Lösung

Die Tastenfolge wird für die Rechner vom Typ TI-30 (TI-30Xa, TI-30 ecoRS, TI-30X IIB, TI30-X IIS) sowie für den Voyage 200 (TI-89) angegeben.

Zu **a)** Überschlagsrechnung (im Kopf!): 20 + 5 – 10 = 15.

Tastenfolge: 19 · 28 + 4 · 81 − 8 · 67;

Abschluss je nach Rechner = bzw. ENTER bzw. ENTER .

Ergebnis: 15,42.

Zur Kontrolle kann die Reihenfolge geändert werden: 19,28 – 8,67 + 4,81.

Zu **b)** Überschlagsrechnung: $\frac{2 \cdot 5000}{30 \cdot 0,4} \approx \frac{10000}{10} = 1000.$

Tastenfolge: 2 · 38 × 4802 ÷ (32 · 3 × 0 · 412);

Abschluss je nach Rechner = bzw. ENTER bzw. ENTER .

Der Taschenrechner zeigt 858,81... an, was auf 3 geltende Ziffern gerundet (also auf Einer gerundet) 858 ergibt.

Kontrolle etwa in der Form: $\frac{2,38}{32,3} \cdot \frac{4802}{0,412}$

Tastenfolge: 2 · 38 ÷ 32 · 3 × 4802 ÷ 0 · 412.

Zu **c)** Überschlagsrechnung: $0{,}3^4 = 0{,}3^2 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}09 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Tastenfolge TI-30Xa, TI-30 ecoRS: 0 · 326 y^x 4 = .

Andere: 0 · 326 ^ 4; Abschluss ENTER bzw. ENTER .

Gerundetes Ergebnis: 0,0113.

Zur Kontrolle kann in der Form gerechnet werden: $0{,}326^2 \cdot 0{,}326^2$.

Zu **d)** Überschlagsrechnung: siehe Beispiel 3.5 l).

Tastenfolge TI-30-Rechner:

8 · 9 − (63 · 21 ÷ (42 · 95 − 14 · 62)) x^2;

Abschluss: = bzw. ENTER =.

Voyage 200 (TI-89): Wie oben, jedoch ist x^2 durch ^ 2 zu ersetzen.

Abschluss: **ENTER** .

gerundetes Taschenrechnerergebnis: 3,9.

Kann ein Taschenrechner Fehler machen?

Für jeden Taschenrechner gibt es nur eine bestimmte Anzahl von Zahlen, die er "kennt" und verarbeiten kann. Sie heißen **Taschenrechnerzahlen**, allgemein auch Maschinenzahlen.

Denn jede Zahl wird im Taschenrechner mit einer bestimmten gleichen Stellenanzahl abgespeichert. Je nach Taschenrechner sind dies etwa 12 bis 14 Ziffern (angezeigt werden in der Regel etwas weniger). Daher findet beispielsweise die Zahl $\frac{5}{3} = 1{,}\dot{6} = 1{,}666\ldots$, eine Zahl mit unendlich vielen Dezimalstellen, *numerisch* nicht genügend Platz im Taschenrechner. Sie wird durch einen Näherungswert, etwa durch 1,66666666667, ersetzt. Dieser Näherungswert ist die Taschenrechnerzahl von $\frac{5}{3}$. Genau genommen muss fast jede Zahl, jedes Rechenergebnis, im Taschenrechner genähert dargestellt werden.

Rechnet man *symbolisch,* beherrscht der Taschenrechner (wie z.B. der Voyage 200 oder der TI-89) also die Bruchrechnung und andere nicht numerische Rechentechniken, so wird stets exakt gerechnet!

Beispiel 3.9 : Genauigkeit des Taschenrechners

Rechne mit dem Taschenrechner die folgenden oder ähnliche Aufgaben. Je nach Taschenrechnermarke werden sich Ungenauigkeiten ergeben, sodass in einigen Extremfällen eine gewisse Vorsicht angezeigt ist. Stelle dabei die Anzeige so um, dass eine Zahl in ihrer *größtmöglichen* Stellenanzahl sichtbar ist!

Voyage 200 (TI-89): Falls keine Kommazahlen auftreten, ist eine symbolische Berechnung auszuschließen. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man ganze Zahlen (zumindest einmal) als Kommazahlen eingibt; also beispielsweise 7. statt 7 ohne Punkt.

a) $123456789012 + 0{,}4 = 123456789012{,}4$
sowie $123456789012 + 0{,}7 = 123456789012{,}7$

b) $\frac{1}{9} \cdot 9 - 1 = 0$

c) Setze in den folgenden *gleichwertigen* Termen $x = 98765432$ ein:
(1) $x^2 - 98765431 \cdot x - 98765431$; (2) $x \cdot (x - 98765431) - 98765431$.
Das richtige Ergebnis ist 1.

d) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$; überprüfe mit $a = 987654321$ und $b = 987654320$.

e) Setze in den folgenden Termen $x = 665857$ und $y = 470832$:
(1) $x^4 - 4y^4 - 4y^2$; (2) $-4y^2 + x^4 - 4y^4$. Das Ergebnis sollte 1 sein.

Besondere Vorsicht ist bei der Subtraktion zweier fast gleich großer Zahlen angezeigt. Bei umfangreichen Rechnungen kann der Genauigkeitsverlust dadurch so groß werden, dass das Ergebnis unbrauchbar ist ("Subtraktionskatastrophe").

Wie viele Taschenrechnerzahlen gibt es?

Im Taschenrechner werden Zahlen im Gleitkommaformat (siehe Seite 68) dargestellt. Stellen wir uns in Gedanken einen sehr einfachen Taschenrechner vor, der für die Mantisse 3 Stellen und für die Hochzahl 1 Stelle bereitstellt. Dann wird beispielsweise die Zahl 70,4 in der Form

$$\underset{\text{Mantisse}}{\boxed{+\,7,04}} \cdot 10^{\underset{\text{Hochzahl}}{\boxed{+1}}}$$

dargestellt. Jede Taschenrechnerzahl (abgesehen von der Zahl 0) ist von dieser Gestalt. Die kleinste positive Zahl, die unser Taschenrechner kennt, ist daher $1{,}00 \cdot 10^{-9}$, die nächste Zahl ist $1{,}01 \cdot 10^{-9}$ usw. bis $9{,}99 \cdot 10^{+9}$. Wie viele verschiedene Mantissen gibt es beginnend mit 1,00 bis 9,99? Wir können die Situation mit einem dreistelligen Ziffernschloss vergleichen, das die Einstellungen 100 bis 999 zulässt. Dies sind genau 900 Einstellungen. Berücksichtigt man, dass das Vorzeichen auch Minus sein kann, so haben wir noch einmal 900 Möglichkeiten, also letzlich 1800 positive und negative Mantissen. Zu *jeder* dieser Mantissen kann die Hochzahl zwischen –9 bis +9 liegen, was insgesamt 19 verschiedene Hochzahlen ergibt. Die Anzahl der Taschenrechnerzahlen ist somit (zusätzlich noch 1 für die Zahl 0): $19 \cdot 1800 + 1 = 34\,201$.

Unser Taschenrechner kennt daher nur 34 201 Zahlen. Tatsächlich hat die Mantisse mehr als drei Stellen (etwa 12 bis 14) und auch die Hochzahl mehr als eine Stelle (2 bis 3 Stellen), wodurch die Anzahl der Taschenrechnerzahlen natürlich beträchtlich ansteigt. Die grundsätzliche Überlegung ändert sich nicht, auch nicht dadurch, dass die Taschenrechnerzahlen als sogenannte Dualzahlen dargestellt sind.

Jeder Taschenrechner muss daher mit einem gewissen endlichen Vorrat an Taschenrechnerzahlen auskommen. Zwischen zwei Taschenrechnerzahlen liegen immer noch unendlich viele Zahlen, die der Taschenrechner weder anzeigen noch verarbeiten kann. Die Taschenrechnerzahlen liegen allerdings – mit *unterschiedlichen* Abständen – so günstig auf der Zahlengeraden, dass die mit ihnen erzielbare Genauigkeit in den meisten praktischen Berechnungen mehr als ausreichend ist.

Aufgaben

Kontrolliere das Ergebnis durch Nachrechnen in einer andereren Reihenfolge als beim ersten Mal!

3.23 Schätze das Ergebnis durch eine Überschlagsrechnung und berechne:

a) $28{,}4 - 19{,}8 - 2{,}1$ **b)** $-81{,}9 + 108{,}2 - 20{,}5$

c) $46{,}5 - 3{,}6 - 21{,}8 + 3{,}4$ **d)** $0{,}248 - 1{,}004 - 0{,}888 + 2{,}453$

e) $890 + 2{,}4 \cdot 10^3 - 3{,}9 \cdot 10^2$ **f)** $8 \cdot 10^{-3} + 3{,}9 \cdot 10^{-2} + 0{,}201$

3.24 Schätze das Ergebnis durch eine Überschlagsrechnung und runde auf drei geltende Ziffern:

a) $(4{,}82 + 2{,}93) \cdot 37{,}18$ **b)** $25{,}83 - 0{,}802 \cdot (431{,}2 - 88{,}9)$

c) $-0{,}492 \cdot (2{,}36 - 5{,}57) \cdot 1{,}07$ **d)** $(3{,}18 - 0{,}87) \cdot (91{,}8 + 238{,}3)$

e) $4{,}182 - 8{,}71 \cdot (-2{,}8) - 1{,}8 \cdot 9{,}78$ **f)** $0{,}203 \cdot 10^{-1} + 2{,}9 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 0{,}39 \cdot 10^{-2}$

3.25 Schätze das Ergebnis durch eine Überschlagsrechnung und runde auf zwei geltende Ziffern:

a) $\frac{804 \cdot 73}{48}$ **b)** $\frac{204}{392 \cdot 87}$ **c)** $\frac{2,16 \cdot 0,976}{0,78} \cdot 18,4$

d) $\frac{38}{17} \cdot \frac{32 \cdot 47}{39 \cdot 9}$ **e)** $\frac{-5,2}{3,3} \cdot \frac{8,6}{-7,3} \cdot \frac{1,9}{9,3}$ **f)** $\frac{1}{5} \cdot \frac{28444}{0,42 \cdot 81} \cdot \frac{1}{24}$

3.26 Schätze das Ergebnis durch eine Überschlagsrechnung und runde auf drei geltende Ziffern:

a) $\frac{433 + 199}{121}$ **b)** $\frac{48{,}3}{8{,}24 - 2{,}39}$ **c)** $\frac{39{,}4 - 19{,}8}{2{,}42 \cdot 8{,}75}$

d) $\frac{1{,}72 \cdot 0{,}0423}{12{,}4 - 8{,}7}$ **e)** $\frac{0{,}952 - 0{,}208}{43 + 179}$ **f)** $\frac{13{,}4 - 16{,}8}{4{,}11 - 8{,}24}$

g) $\frac{9{,}8 - 12{,}4 + 82{,}7}{1282}$ **h)** $\frac{1{,}78}{8{,}2 - 18{,}4 + 22{,}3}$ **i)** $\frac{182 - 621 + 899}{718 + 851 + 333}$

j) $21{,}64 \cdot 6{,}19 - 3{,}32^2 \cdot 3{,}27$ **k)** $5 \cdot \frac{22}{15} - 19 \cdot \frac{2}{13}$ **l)** $1 - \frac{5}{38 + 439}$

3.27 Runde auf Tausendstel:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ **b)** $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{5}$ **c)** $\frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}$

3.28 Runde auf Hundertstel:

a) $\frac{270}{18 \cdot 34 + 56}$ **b)** $\frac{270 - 19 \cdot (-24)}{18}$ **c)** $\frac{38{,}2 \cdot 14{,}9 - 19{,}7 \cdot 2{,}4}{1{,}8 \cdot 34{,}9 + 4{,}4 \cdot 3{,}9}$

d) $\frac{9{,}8 - 12{,}4 + 82{,}7}{12{,}87 - 0{,}4 \cdot 18{,}2}$ **e)** $\frac{0{,}8^2 \cdot 120}{3\,(14{,}8 - 8{,}9)}$ **f)** $\frac{4{,}2 \cdot 9{,}8 - 12{,}4^2}{2{,}8^3}$

3.29 Runde auf Hundertstel:

a) $\frac{4{,}7}{9} \cdot \left(17 - \frac{8}{3{,}4}\right)$ **b)** $\frac{5{,}4}{2{,}18 - 0{,}94} \cdot \frac{15{,}1 - 8{,}9}{2{,}3}$

c) $\frac{2{,}9 - 0{,}8 \cdot (12{,}5 - 28{,}9)}{12{,}43 - 7 \cdot 0{,}33}$ **d)** $\frac{82{,}04 + (-4) \cdot 0{,}28}{2{,}37 + (19{,}2 - 8{,}7) \cdot 0{,}3}$

3.30 Berechne:

a) 27^2 **b)** $4 \cdot 13^3$ **c)** $2 \cdot 9^4 - 256$

d) $4 \cdot 3^5 + 3 \cdot 4^4$ **e)** $3 \cdot (0{,}8 - 4{,}2)^2$ **f)** $2{,}119 + 0{,}7 \cdot 3{,}9^2 - 4 \cdot 1{,}3^3$

3.31 Runde auf vier geltende Ziffern:

a) $39{,}7 \cdot \sqrt{85{,}3}$ **b)** $84{,}9 - 8{,}7 \cdot \sqrt{5{,}4}$ **c)** $\frac{14{,}7 + 3{,}9 \cdot \sqrt{0{,}8}}{29{,}4}$

d) $\frac{4{,}7^2 \cdot \sqrt{14{,}2} + 9{,}2}{29{,}4}$ **e)** $\frac{7{,}8 \cdot \sqrt{5{,}2} - 3{,}2}{29{,}4 \cdot 3{,}9^2}$ **f)** $\frac{17{,}3 \cdot \sqrt{0{,}54} + 2{,}8}{43{,}9 + 4{,}2^2}$

3.32 Runde auf Hundertstel:

a) $\frac{18{,}2 \cdot 3{,}9^3 - 2{,}3^2 \cdot 3{,}71}{(-5{,}8)^2}$ **b)** $\frac{4{,}6^3 + 0{,}8 \cdot 2{,}9^2 - \frac{1}{0{,}25}}{6{,}22 + 4{,}48 - 1{,}16}$

c) $\frac{3{,}8}{30{,}3}\left(4{,}7^2 - \frac{1{,}7 + 9{,}8}{12{,}2 - 3{,}6}\right)$ **d)** $\frac{(4{,}1 - 2{,}7) \cdot 8{,}3}{\frac{113}{3{,}41 - 1{,}99} - \frac{370}{18{,}2 \cdot 9{,}1}}$

3.4 Der Umgang mit Näherungswerten

Sind Zeitmessungen auf 1/1000 s genau bei Schwimmwettbewerben sinnvoll?

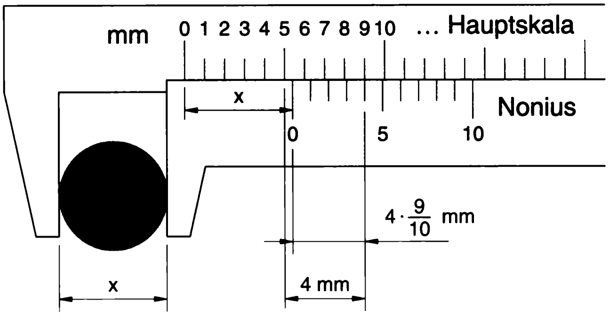
Bei den Olympischen Spielen 1972 in München gewann der Sieger mit einer Zeit von 4 min 31,981 s den Schwimmwettbewerb über 400 m Lagen. Sein Vorsprung vor dem Zweitplatzierten betrug nur 0,002 s. Aus der Durchschnittsgeschwindigkeit der Schwimmer kann man aus diesem Zeitunterschied einen Wegunterschied von knapp 3 mm errechnen. Nachmessungen der Bahn des Zweitplatzierten ergaben allerdings, dass diese um einige Millimeter länger war als die des Siegers.

Nach 1972 ging man übrigens wieder auf eine Genauigkeit von 1/100 s zurück.

Welche der folgenden Zahlenangaben sind (vermutlich) exakte Werte, welche Näherungswerte?

- Raumhöhe eines Zimmers: 280 cm
- Entfernung zweier Orte laut Straßenkarte: 248 km
- Preis für Busfahrt: € 38,–
- Masse eines PKW ohne Beladung: 1080 kg
- Elektrische Spannung einer Taschenlampenbatterie: 4,5 V
- Hausnummer: 58
- Anzahl der Schüler einer bestimmten Klasse: 31

Ergebnisse von *Messungen* sind im Allgemeinen Näherungswerte; je genauer das Messinstrument, desto genauer wird der Messwert ausfallen. So ist die Längenmessung mit einem Lineal auf 1 mm genau, mit einer Schiebelehre auf 1/10 mm oder 1/20 mm. Messwerte können mit Genauigkeitsschranken angegeben sein. Auch gerundete Zahlen sind Näherungswerte.



x = 5 mm + (4 – 3,6) mm = 5,4 mm

Abb. 3.1 Hauptskala mit Nonius

Um auf einer Millimeterskala noch Zehntelmillimeter ablesen zu können, verwendet man eine verschiebbare Nebenskala, den **Nonius** (Abb. 3.1). Auf diesem ist eine Strecke von 9 mm in 10 gleiche Teile geteilt. Nach Ablesen der ganzen Millimeter sucht man jenen Teilstrich der Noniusskala, der sich möglichst genau mit einem Teilstrich der Hauptskala deckt. Dieser Teilstrich gibt dann die zusätzlichen Zehntelmillimeter an.

Sind am Nonius 19 mm in 20 Teile geteilt, kann man auf 1/20 mm genau ablesen.

Ist x_0 ein Näherungswert für den wahren Wert x, so heißt

$x_0 - x$ .... absoluter Fehler ("Istwert – Sollwert")

$|\Delta x| = |x_0 - x|$ ...... Betrag des absoluten Fehlers
(Der griechische Buchstabe **D**elta, Δ, steht für Differenz)

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ .... relativer Fehler (Betrag von " $\frac{\text{Istwert - Sollwert}}{\text{Sollwert}}$ ")

Der relative Fehler gibt das Verhältnis von $|\Delta x|$ bezogen ("relativ") zum Betrag des wahren Wertes $|x|$ an. Er ist dimensionslos und wird häufig in Prozenten angegeben. Da der wahre Wert x oft unbekannt ist, wird bei der Berechnung des relativen Fehlers im Nenner x durch den Näherungswert x_0 ersetzt, was sich im Allgemeinen kaum auswirkt. Bei *Messungen* wird ferner für $|\Delta x|$ in der Regel ein *Höchstwert* angegeben.

Hat man beispielsweise bei der Messung einer Länge mit dem wahren Wert x den Wert $x_0 = 286$ cm abgelesen und ist als maximaler Betrag des absoluten Fehlers $|\Delta x| = 1$ cm bekannt oder geschätzt, so schreibt man häufig

$x = x_0 \pm |\Delta x| = 286 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$ oder $x = (286 \pm 1)$ cm.

Damit drückt man aus, dass der wahre Wert der Länge zwischen 285 cm und 287 cm liegt.

Beispiel 3.10 : Absoluter und relativer Fehler

a) Die Länge x wurde zu (286 ± 1) cm gemessen. Berechne den (maximalen) relativen Fehler.

b) Die gerundeten Zahlen 2,8 und 0,028 besitzen zwei geltende Ziffern; berechne die Höchstwerte ihrer relativen Fehler.

Lösung

Zu **a)** $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| = \frac{1 \text{ cm}}{286 \text{ cm}} = 0{,}0035 = \frac{0,35}{100} = 0{,}35\,\%.$

Man schreibt auch: $x = 286 \cdot (1 \pm 0{,}35\,\%)$ cm.

Zu **b)** $x_1 = 2{,}8 \pm 0{,}05$; $x_2 = 0{,}028 \pm 0{,}0005$; ihre größtmöglichen relativen Fehler sind jedoch gleich: $\frac{0,05}{2,8} = \frac{0,0005}{0,028}$.

Die Genauigkeit einer gerundeten Zahl kann daher auch durch die Anzahl ihrer geltenden Ziffern ausgedrückt werden.

Beispiel 3.11 : Genauigkeit eines Rechenergebnisses, wenn Fehlerschranken gegeben sind

Als Durchmesser eines Kreises ist angegeben: d = 1,50 m ± 0,01 m. Berechne die Kreisfläche A!

Lösung

Ohne Berücksichtigung der Ungenauigkeit der Messung würde man rechnen:

$A = \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}50^2 \text{ m}^2 = 1{,}767 \text{ m}^2.$

Die Fehlerschranke $|\Delta d| = 0{,}01$ m sagt aus, dass der (absolute) Fehler zwischen $d_0 = 1{,}50$ m und dem wahren Kreisdurchmesser d höchstens gleich 0,01 m ist; d liegt also irgendwo zwischen 1,49 m und 1,51 m. Wir berechnen nun den größtmöglichen und den kleinstmöglichen Wert der Kreisfläche:

$A_{max} = \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}51^2 \text{ m}^2 = 1{,}791 \text{ m}^2$; $A_{min} = \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}49^2 \text{ m}^2 = 1{,}744 \text{ m}^2.$

Der Flächeninhalt A wird daher zwischen 1,744 m^2 und 1,791 m^2 liegen. Man schreibt auch: $A = (1{,}77 \pm 0{,}03) \text{ m}^2$.

Beispiel 3.12 : Genauigkeit eines Rechenergebnisses, wenn keine Fehlerschranken gegeben sind

a) Gegeben sind drei Massen: m_1 = 62 kg, m_2 = 15,8 kg, m_3 = 1,25 kg. Berechne ihre Summe!

b) Die Länge a und die Breite b eines Fußballfeldes wurden gemessen: a = 105 m, b = 71 m. Berechne seinen Flächeninhalt!

Lösung

Das Rechnen mit Näherungswerten kann sehr einfach mit der "Methode der Fragezeichen" veranschaulicht werden. "?" steht für eine unbekannte Ziffer.

Zu **a)**

$$\begin{array}{r} 62{,}??\\ 15{,}8?\\ \underline{1{,}25}\\ 79{,}??\end{array}$$

In der Summe können die Ziffern nach dem Komma nicht angegeben werden; sie kann nicht genauer geschrieben werden als der ungenaueste Summand m_1, der (bestenfalls) auf Einer genau ist. Wir müssen daher 62 kg + 15,8 kg + 1,25 kg = 79,05 kg auf die Genauigkeit von m_1 runden. Daher: $m_1 + m_2 + m_3 = 79$ kg.

Zu **b)**

$$\begin{array}{l} \underline{105{,}?\cdot 71{,}?}\\ 735?\\ 105?\\ \underline{????}\\ 74??{,}??\end{array}$$

Im Produkt können die Einer- und die Zehnerziffer nicht angegeben werden, weshalb das Rechenergebnis 105 m · 71 m = 7455 m^2 eine zu hohe Genauigkeit für den Flächeninhalt A ausdrückt; wir runden auf Hunderter: A = 7500 m^2, besser: A = $7{,}5\cdot 10^3$ m^2.

Denkbar ist auch, dass Abweichungen von der exakten Rechteckform auftreten und davon eine weitere Ungenauigkeit kommt!

Für den praktischen Umgang mit Näherungswerten gibt es einige "Faustregeln". Damit versucht man, sich einigermaßen vor übertriebener Genauigkeit zu schützen. Man rechnet zuerst mit dem Taschenrechner und berücksichtigt danach die folgenden Regeln.

Rechnen mit Näherungswerten

Regel 1: **Addition und Subtraktion:** Das Ergebnis wird auf höchstens so viele Stellen gerundet, wie der ungenaueste Näherungswert besitzt.

Regel 2: **Multiplikation und Division:** Das Ergebnis wird auf höchstens so viele geltende Ziffern gerundet, wie der ungenaueste Näherungswert besitzt.

Regel 3: **Wurzelziehen $\sqrt[n]{a}$:** Die Wurzel eines Näherungswertes a ist auf höchstens die Anzahl geltender Ziffern von a zu runden.

Regel 4: Eine **exakte Zahl** ändert die Genauigkeit einer Berechnung nicht.

Genauigkeitsfragen werden in der Praxis auch aus dem Zusammenhang geklärt; es gibt manchmal auch Vereinbarungen darüber.

Beispiel 3.13 : Rechnen mit Näherungswerten

a) m = 5,32 kg + 88,9 dag + 370,4 g = ?

b) Multipliziere die gerundeten Zahlen 8,62 und 0,0042.

c) Berechne das Volumen V eines Kreiskegels mit dem Radius r = 225 mm und der Höhe h = 142 mm nach der Formel $\frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h$.

d) Berechne die Oberfläche eines geraden Kreiskegels nach der Formel $O = \pi r\,(r + s)$, wobei $r = 5{,}43$ dm, $s = 17{,}4$ dm.

e) Berechne die Diagonale eines rechteckigen Raumes der Länge 21,8 m und der Breite 8,46 m: $d = \sqrt{21{,}8^2 + 8{,}46^2}$ m.

Lösung

Zu **a)** Überschlagsrechnung: $m \approx 5$ kg + 1 kg + 0 kg = 6 kg.
5,32 kg + 0,889 kg + 0,3704 kg = 6,5794 kg.

Die Summe 6,5794 kg ist auf Hundertstel (Genauigkeit von 5,32 kg) zu runden: $m = 6{,}58$ kg.

Zu **b)** Überschlagsrechnung: $9 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 36 \cdot 10^{-3} = 3{,}6 \cdot 10^{-2}$;
$8{,}62 \cdot 0{,}0042 = 0{,}036204$;

das Ergebnis ist auf zwei geltende Ziffern (Ziffernanzahl von 0,0042 ohne die Nullen vor der Ziffer 4) zu runden: 0,036.

Zu **c)** Überschlagsrechnung: $\pi \approx 3$, $r \approx 2$ dm; $h \approx 1{,}5$ dm; $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1{,}5 = 6$ dm^3;
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}25^2 \cdot 1{,}42 = 7{,}5280\ldots$ dm^3;

die Zahl 3 in der Volumsformel ist exakt und ändert daher die Genauigkeit nicht; da r und h drei geltende Ziffern haben, ist auch das Ergebnis auf diese Ziffernanzahl zu runden: $V = 7{,}53$ dm^3.

Zu **d)** Überschlagsrechnung: $O \approx 3 \cdot 5 \cdot (5 + 17)$ dm^2 $\approx 20 \cdot 20$ dm^2= 400 dm^2.

Mit dem Taschenrechner erhalten wir 389,4535.... Wie viele Ziffern sollen wir nehmen? Bei der Summe 5,43 + 17,4 können wir wegen 17,4 nur eine Nachkommastelle nehmen, sodass sie drei geltende Ziffern besitzt. Der Faktor 5,43 besitzt ebenfalls drei geltende Ziffern, sodass wir das Produkt (π ändert die Genauigkeit nicht) auf drei geltende Ziffern runden: $O = 389$ dm^2.

Zu **e)** Überschlagsrechnung: $d \approx \sqrt{20^2 + 10^2}$ m $= \sqrt{400 + 100}$ m $\approx \sqrt{400}$ m = 20 m.

Eintippen in den Taschenrechner ergibt 23,3840... . Wir gehen wieder schrittweise vor. $21{,}8^2 = 475$; $8{,}46^2 = 71{,}6$ (jeweils drei geltende Ziffern wie 21,8 bzw. 8,46). Ihre Summe kann daher bis auf Einer genau sein, weshalb sie mit drei geltende Ziffern in Rechnung gesetzt wird. Nach dem Wurzelziehen bleiben drei geltende Ziffern. Daher $d = 23{,}4$ m.

Aufgaben

Wenn nicht anders angegeben, sind alle folgenden Zahlenangaben Näherungswerte.

3.33 Die Länge einer Strecke wurde zu $a = (1683 \pm 2)$ m, die einer anderen Strecke zu $b = (542 \pm 1)$ m bestimmt. Welche Messung ist relativ genauer und damit besser erfolgt?

3.34 Stromstärke I und Spannung U in einem Stromkreis wurden gemessen: $I = (145 \pm 0{,}5)$ mA; $U = 225$ V mit einem absoluten Fehler von $|\Delta U| \leqslant 5$ V. Vergleiche die (maximalen) relativen Fehler.

3.35 Eine automatische Abfüllanlage für Zucker besitzt einen relativen Fehler von höchstens 0,8%. Berechne die Mindest- und Höchstfüllmenge (in g), wenn der Sollwert 1000 g ist.

3.36 Berechne auf eine noch sinnvolle Genauigkeit:

a) $3{,}4 + 0{,}33$ **b)** $4{,}12 - 0{,}003 + 0{,}73$

c) $0{,}8324 - 0{,}247 + 0{,}33$ **d)** $0{,}105 + 2{,}3 \cdot 10^{-3}$

e) $2{,}840 \cdot 10^{3} + 4{,}321 \cdot 10^{2}$ **f)** $4{,}782 \cdot 10^{-2} + 8{,}24 \cdot 10^{-3} - 4{,}28 \cdot 10^{-1}$

3.37 Ebenso:

a) 2,0 cm + 42 mm **b)** 52,4 mm + 42 cm **c)** 5,88 kg + 24,8 dag

d) 12,4 dag + 35,2 g **e)** 88,4 cm^2 + 62 mm^2 **f)** 3,41 dm^3 + 412 cm^3 + 89 ml

3.38 Ebenso:

a) $23 \cdot 4{,}7$ **b)** $0{,}032 \cdot 82 \cdot 0{,}24$ **c)** $5{,}9^{2} \cdot 1{,}17$

d) $4{,}70 \cdot 10^{2} \cdot 0{,}206$ **e)** $5{,}40 \cdot 10^{3} \cdot 0{,}02983$ **f)** $3{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 5{,}94 \cdot 10^{3}$

3.39 Ebenso:

a) $\frac{8{,}7}{3{,}3}$ **b)** $\frac{5{,}811}{2{,}43}$ **c)** $\frac{3275}{0{,}0891}$ **d)** $\frac{4{,}205 \cdot 10^{3}}{0{,}293}$

e) $\frac{3{,}2 \cdot 4{,}5}{3{,}3}$ **f)** $\frac{5{,}2 \cdot 0{,}243}{133}$ **g)** $\frac{0{,}201 \cdot 48{,}3}{292}$ **h)** $\frac{4{,}13 \cdot 10^{3} \cdot 8{,}432}{7{,}5 \cdot 10^{2}}$

3.40 Ebenso:

a) $2{,}14 \cdot 0{,}33 - 0{,}33$ **b)** $4{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}32$ **c)** $3{,}90 \cdot 2{,}142 - 0{,}428$

d) $\frac{3{,}2 + 0{,}88 \cdot 134}{2{,}17}$ **e)** $\frac{59{,}3 \cdot (0{,}038 + 0{,}174)}{2{,}8}$ **f)** $\frac{15{,}31 - 8{,}4}{132{,}4 + 7{,}2}$

g) $\frac{33{,}19 - 0{,}0881 \cdot 134}{4{,}9} + 2{,}93$ **h)** $\frac{18{,}6}{12{,}8} + \frac{2{,}31}{0{,}45}$ **i)** $\frac{7{,}4}{28{,}9} \cdot \left(4{,}27^{2} - \frac{7{,}92}{3{,}40}\right)$

3.41 Ebenso:

a) $\sqrt{3{,}408}$ **b)** $\sqrt{448{,}0 \cdot 0{,}17}$ **c)** $\sqrt{\frac{0{,}2547}{0{,}0307} + 3{,}4^{2}}$ **d)** $\sqrt[3]{8{,}22 \cdot 22{,}92 + 283{,}4}$

3.42 Berechne **a)** das Volumen $V = \frac{\pi}{6} \cdot d^{3}$ (der Nenner 6 ist exakt) und **b)** die Oberfläche $O = \pi \cdot d^{2}$ einer Kugel, wenn der Kugeldurchmesser d = 36 mm ist.

3.43 Ein Eisenwürfel besitzt die Kantenlänge a = 0,48 dm. Berechne seine Masse m (Dichte ϱ = 7,85 kgdm^{-3}).

3.44 Nach Auskunft einer meteorologischen Station fielen während einer Regenperiode 34,8 Liter je Quadratmeter nieder. Wie hoch stünde danach das Wasser, wenn nichts abfließen oder versickern könnte?

3.45 Für eine ziemlich grobe Schätzung der Fläche eines Kreises kann man drei Viertel der Quadratfläche nehmen, dessen Seite gleich dem Kreisdurchmesser ist. Wie groß ist der relative Fehler in Prozent?

3.46 Ein Fußballfeld wird vermessen: Länge a = (108,2 ± 0,1) m, Breite b = (72,3 ± 0,1) m. Wie groß ist bei dieser Angabe der größtmögliche und der kleinstmögliche Wert der Fläche?

3.47 In einem elektrischen Gleichstromkreis wurden gemessen: Strom I = (48,4 ± 0,2) mA, Spannung U = (212 ± 4) V. Berechne den kleinstmöglichen und größtmöglichen Wert für die Leistung $P = U \cdot I$.

3.48 Die Schwingungsdauer eines sogenannten mathematischen Pendels berechnet sich für kleine Schwingungen nach der Formel $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$. Wie groß ist T, wenn die Fadenlänge l = 82 cm und die Erdbeschleunigung g = 9,81 ms^{-2} ist?

3.49 Ein PKW legt eine Strecke von 85 km in 65 min zurück.

a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit, wenn keine Genauigkeitsschranken gegeben sind.

b) Berechne die kleinstmögliche und größtmögliche mittlere Geschwindigkeit, wenn

(1) die Ungenauigkeit in der Längen- und Zeitmessung höchstens
eine halbe Einheit (Ungenauigkeit einer bloßen Rundung),
eine ganze Einheit der angegebenen letzten Ziffer ausmacht;

(2) die Längenmessung auf ± 3% und die Zeitmessung auf ± 1% des angezeigten Wertes genau ist.

3.50 Bei einem PKW wird bei einer Radarkontrolle eine Geschwindigkeit von 62 kmh^{-1} während einer Ortsdurchfahrt festgestellt. Der Autofahrer möchte nun wissen, in welchem Bereich die Tachoanzeige seines PKWs dabei liegen könnte. Er weiß, dass das Radargerät auf ± 2 kmh^{-1} genau anzeigt und dass die Tachometeranzeige die wirkliche Geschwindigkeit auf ± 8% genau anzeigt.

Bemerkung: Tatsächlich darf ein Tachometer eine Geschwindigkeit nicht zu niedrig anzeigen.

Im Überblick: Numerisches Rechnen

Handrechnung mit Dezimalzahlen:
Das *Produkt* von Dezimalzahlen enthält so viele Nachkommastellen, wie die Faktoren zusammen besitzen. Vor der *Division* durch eine Dezimalzahl wird das Komma im Dividend und im Divisor so weit nach rechts verschoben, bis der Divisor kommafrei ist.

Rundungsregel: Ist die Ziffer rechts von der zu rundenden Stelle höchstens gleich 4, wird **abgerundet:** die weiter rechts liegenden Ziffern werden einfach weggelassen oder – bei Rundung vor der Einerstelle – durch Nullen ersetzt. Ist diese Ziffer mindestens gleich 5, wird **aufgerundet:** es wird zusätzlich noch 1 an der zu rundenden Stelle addiert.

Abgesehen von den Nullen, die zur richtigen Kommasetzung nötig sind, heißen die Ziffern einer Zahl **geltend**.

Bei technischen Angaben oder Berechnungen reicht in der Regel eine **Genauigkeit von drei bis höchstens vier geltenden Ziffern**.

Eine **Überschlagsrechnung** gibt eine Vorstellung von der Größenordnung eines Ergebnisses.

Kontrolle eines Taschenrechnerergebnisses: Überschlagsrechnung; Prüfung, ob technisch sinnvoll; Nachrechnen in anderer Reihenfolge.

Absoluter und relativer Fehler eines Näherungswertes:
Betrag des absoluten Fehlers: $|\Delta x| = |x_0 - x|$; relativer Fehler: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$.
x … wahrer Wert; x_0 … Näherungswert; absoluter Fehler: $x_0 - x$;

Rechnen mit Näherungswerten ohne Genauigkeitsschranken:
Addition und Subtraktion: Das Ergebnis wird auf höchstens so viele Stellen gerundet, wie der ungenaueste Näherungswert besitzt.
Multiplikation und Division: Das Ergebnis wird auf höchstens so viele geltende Ziffern gerundet, wie der ungenaueste Näherungswert besitzt.
Die *Wurzel* eines Näherungswertes a ist auf höchstens die Anzahl geltender Ziffern von a zu runden.
Eine *exakte Zahl* ändert die Genauigkeit einer Berechnung nicht.

4 Elementare Geometrie

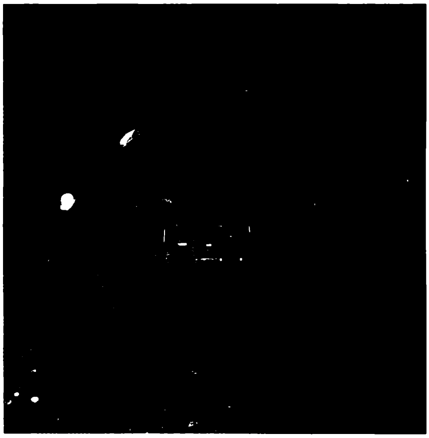


Abb. 4.1

Das Wort "Geometrie" stammt aus dem Griechischen und bedeutet sinngemäß "Erdmessung". Als Begründer der Geometrie gelten die alten Ägypter. Vermessungen von Feldern für die Landwirtschaft (vgl. Abb. 1.1), der Bau der Pyramiden oder astronomische Beobachtungen erforderten geometrische Kenntnisse.

Von den Griechen wurde vor etwa 2500 Jahren die Geometrie zu einer Wissenschaft entwickelt. Im 19. Jahrhundert wurden andere, sogenannte nichteuklidische Geometrien, entwickelt, mit denen neue Probleme (Beispiel: "gekrümmter" Raum als Modell des Weltalls) behandelt werden können. In der Elementargeometrie unterscheidet man die ebene Geometrie (Planimetrie) und die räumliche Geometrie (Stereometrie).

4.1 Einführung

Die Begriffe "**Punkt**", "**Gerade**" und "**Ebene**" werden nicht definiert, d.h. auf einfachere Begriffe zurückgezuführt. Es werden aber grundlegende Sätze, sogenannte **Axiome**, angegeben, die diese Begriffe zueinander in Beziehung setzen. (Ähnlich verhält es sich mit den Figuren des Schachspiels: Es wird nicht gesagt, wie sie aussehen müssen, sondern nur, wie mit ihnen gespielt wird.)

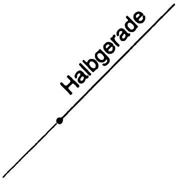


Abb. 4.2 Halbgerade

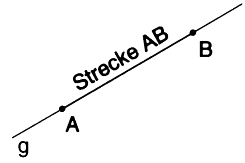


Abb. 4.3 Strecke AB

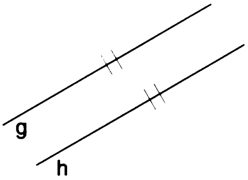


Abb. 4.4 Parallele Geraden

Eine **Halbgerade** (auch **Strahl** genannt) ist ein einseitig begrenztes Geradenstück (Abb. 4.2); sie besitzt einen Anfangspunkt P.

Eine **Strecke** ist ein zweiseitig begrenztes Geradenstück (Abb. 4.3). Sie hat zwei Endpunkte. AB bezeichnet die Strecke mit den Endpunkten A und B, $\overline{AB}$ ihre Länge.
Während eine Strecke eine Menge von Punkten ist, ist die Länge einer Strecke eine (nichtnegative) Zahl oder – im physikalischen Sinn – eine Größe. Strecken, aber auch Längen werden durch Kleinbuchstaben bezeichnet: a, b, ..., p, r.

Zwei Geraden g und h heißen **parallel**, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben (Abb. 4.4) oder zusammenfallen. Man schreibt $g \parallel h$. Sind sie nicht parallel, so haben sie genau einen Punkt, ihren Schnittpunkt, gemeinsam.

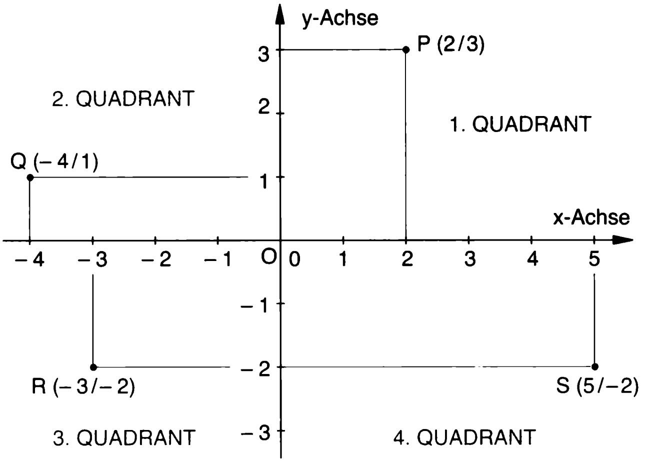
Flächeninhalt

Um flächenhaft ausgedehnte Figuren zu vergleichen, verwendet man den Begriff "Flächeninhalt". Als Einheit des Flächeninhaltes ist das Quadratmeter (m^2) festgelegt. Das Formelzeichen für den Flächeninhalt ist "A".

Ein Quadrat mit der Seite a hat den Flächeninhalt **$A = a^2$**; ein Rechteck mit den Seiten a und b hat den Flächeninhalt **$A = a \cdot b$.**

Das rechtwinklige Koordinatensystem (Abb. 4.5)

Damit kann man die Lage jedes Punktes der Zeichenebene durch zwei Zahlen, gewissermaßen als dessen "Adresse", angeben. Das Koordinatensystem besteht aus einer waagrechten Zahlengerade g_1 und einer Zahlengerade g_2, die g_1 im **Ursprung O** rechtwinklig schneidet. Es ist üblich, die positive Zählrichtung auf g_1 nach rechts, auf g_2 nach oben anzunehmen. Im Allgemeinen wählen wir, wenn es die Aufgabenstellung zulässt, auf beiden Achsen die gleichen Einheitslängen (etwa 1 cm).



Man nennt

g_1 die 1. Koordinatenachse, Abszissenachse, auch x-Achse;

g_2 die 2. Koordinatenachse, Ordinatenachse, auch y-Achse.

P (x_P/y_P):

x_P .... 1. Koordinate, Abszisse oder x-Koordinate von P

y_P .... 2. Koordinate, Ordinate oder y-Koordinate von P

Abb. 4.5 Rechtwinkliges Koordinatensystem

Durch die beiden Koordinatenachsen wird die Ebene in vier Felder, die *vier Quadranten* geteilt. Das Durchzählen der vier Quadranten erfolgt im Gegenuhrzeigersinn.

Anmerkung:

Das rechtwinklige Koordinatensystem geht auf die französischen Mathematiker René DESCARTES (1596 – 1650), lateinischer Name "Cartesius", zurück. Es wird daher, wenn die Einheiten auf den beiden Achsen gleich sind, auch **kartesisches Koordinatensystem** genannt.

Winkel (Abb. 4.6)

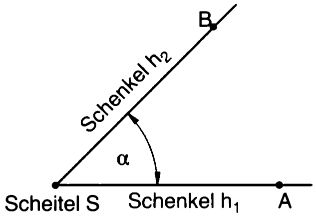


Abb. 4.6 Winkel

Zwei Halbgerade h_1 und h_2 mit gemeinsamem Anfangspunkt S bestimmen einen Winkel. Die beiden Halbgeraden heißen *Schenkel*, S heißt *Scheitel* des Winkels.

Bezeichnungen: ∠ BSA oder ∠ ASB (Scheitel S in der Mitte) oder durch griechische Kleinbuchstaben wie beispielsweise: α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma), δ (Delta), ε (Epsilon), ϱ (Rho), σ (Sigma), ω (Omega), φ (Phi).

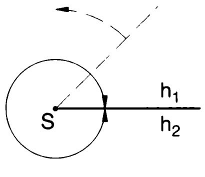


Abb. 4.7 Voller Winkel

Ein Winkel drückt auch einen *Richtungsunterschied* zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden aus. Dabei kann – durch Drehung um S – h_1 in die Lage von h_2 oder umgekehrt gebracht werden. Dreht man h_2, ausgehend von h_1 so lange, bis die beiden Halbgeraden erstmals wieder zusammenfallen, so erhält man den *vollen Winkel* (Abb. 4.7).

Winkelmessung

Die "Größe" eines Winkels kann auf verschiedene Arten angegeben werden. Viel benützt wird das **Gradmaß**: 1 Grad (1°) ist der 90ste Teil des rechten Winkels, der 90° erhält (siehe Abb. 4.8). Der volle Winkel hat dann 360°.
Meist wird dasselbe Zeichen für den Winkel als geometrische Figur und seine Größe verwendet. So bezeichnet α etwa einen bestimmten Winkel, aber auch dessen Größe, z.B.: $\alpha = 62°$.
Als Winkelmesser wird besonders das **Geodreieck** verwendet, mit dem auch zueinander normale oder parallele Geraden gezeichnet werden können.

Einige Bezeichnungen:

$0° < \alpha < 90°$	spitzer Winkel
$\alpha = 90°$	rechter Winkel; Schenkel stehen "normal" aufeinander. Das Zeichen für "rechtwinklig zu" oder "normal auf" ist $\perp$. Ein rechter Winkel wird durch einen in den Winkel gesetzten Punkt bezeichnet (Abb. 4.8).
$90° < \alpha < 180°$	stumpfer Winkel

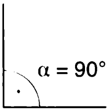


Abb. 4.8 Rechter Winkel

Zwei Winkel, die einander zu 90° ergänzen, heißen *komplementäre* Winkel; ergänzen sie einander zu 180°, so heißen sie *supplementäre* Winkel. So sind $\alpha = 23°$ und $\beta = 67°$ komplementäre Winkel, $\gamma = 70°$ und $\delta = 110°$ supplementäre Winkel.

1 Grad wird in der Regel weiter dezimal geteilt. Eine weitere Teilung ist:

1 Grad = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden.

Ein anderes Winkelmaß wird im Vermessungswesen verwendet; danach wird der rechte Winkel in 100 Teile geteilt. Ein Teil heißt **Gon**, man schreibt: **1 gon** oder kurz 1^g. Der volle Winkel hat dann die Größe 400^g. Mit dem **Bogenmaß**, einem grundsätzlich sehr wichtigen Winkelmaß, werden wir uns bei der Behandlung des Kreises beschäftigen.

Winkelpaare

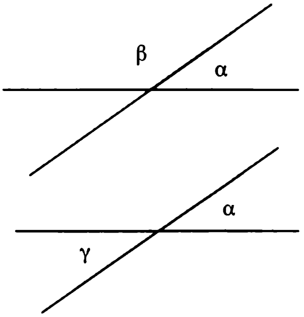


Abb. 4.9 Neben- und Scheitelwinkel

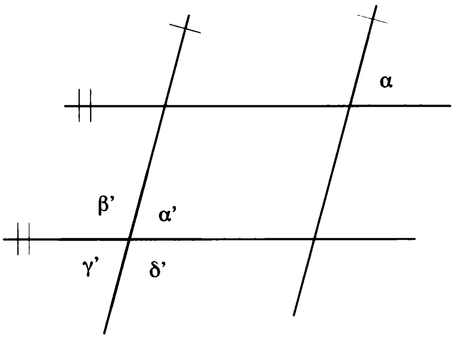


Abb. 4.10 Parallelwinkel

Abb. 4.9: α und β heißen *Nebenwinkel.* Nebenwinkel ergänzen einander auf 180°, sind also supplementär. α und γ heißen *Scheitelwinkel.* Scheitelwinkel sind gleich groß.

Abb. 4.10: Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, nennt man Parallelwinkel. α', β', γ', δ' sind die möglichen Arten von Parallelwinkeln zu α. Man erkennt: Parallelwinkel sind gleich groß oder supplementär.

Beispiel 4.1 : Winkelberechnung

In Abb. 4.11 ist $\beta = 20°$ und $\gamma = 40°$. Berechne den Winkel α!

Lösung

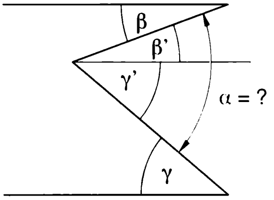


Abb. 4.11

Da $\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$ (Parallelwinkel!), ist $\alpha = \beta + \gamma = 60°$.

Achsensymmetrie (Geradenspiegelung)

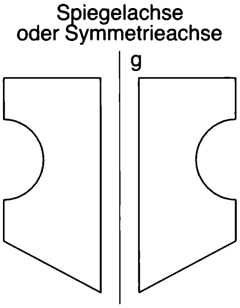


Abb. 4.12 Achsensymmetrische Figur

Symmetrie und **Spiegelung** sind wichtige Begriffe bei geometrischen Figuren. Abb. 4.12 zeigt eine symmetrische Figur. Man erkennt, dass der links von der Geraden g liegende Teil der Figur durch Spiegelung an der Geraden in den rechts liegenden Teil übergeht.

Die Gerade heißt *Symmetrieachse* der Figur oder auch *Spiegelachse.*

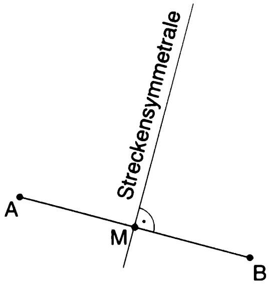


Abb. 4.13 Streckensymmetrale von AB

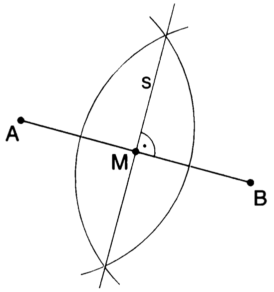


Abb. 4.14 Konstruktion der Streckensymmetralen

Die Symmetrieachse der Strecke (Abb. 4.13) heißt *Streckensymmetrale s* (oder Mittelsenkrechte) von AB. Sie steht normal auf der Strecke AB.
Abb. 4.14 zeigt die Konstruktion der Streckensymmetralen und zugleich des Mittelpunktes (Halbierungspunktes) einer Strecke AB.

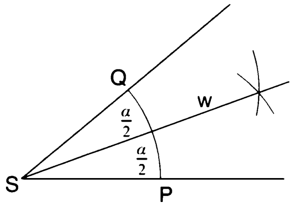


Abb. 4.15 Konstruktion einer Winkelsymmetralen

Die Symmetrieachse eines Winkels heißt *Winkelsymmetrale* (oder Winkelhalbierende, Abb. 4.15).

Konstruktionsgang:

(1) Man schlägt mit dem Mittelpunkt in S einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in P und Q schneidet.

(2) Dann zeichnet man je einen Kreisbogen von gleichem Radius mit dem Mittelpunkt in P bzw. Q; die Gerade durch ihren Schnittpunkt und dem Winkelscheitel S ist die Winkelsymmetrale w.

Es gibt geometrische Figuren, die mehr als eine Symmetrieachse haben. Überlege, dass ein Rechteck zwei, ein gleichseitiges Dreieck drei und ein Quadrat vier Symmetrieachsen besitzt. Ein Kreis besitzt unendlich viele Symmetrieachsen.

Drehung

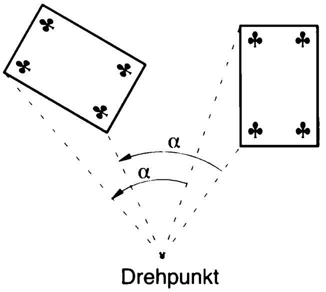


Abb. 4.16 Drehung (im positiven Sinn)

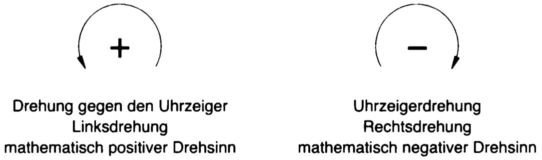


Abb. 4.17 Mathematischer Drehsinn

Eine Drehung (Abb. 4.16) um einen festen Punkt, den Drehpunkt, wird durch die Angabe des *Drehwinkels* beschrieben. Für den mathematischen Drehsinn gibt es die Festlegung nach Abb. 4.17. Der Drehsinn wird dementsprechend durch ein "+" oder "–" vor der Winkelgröße ausgedrückt: Beispiel: $\alpha = +60°$... Linksdrehung um 60°; $\alpha = -60°$... Rechtsdrehung um 60°.

Ein Drehwinkel kann über eine volle Umdrehung hinausgehen. + 370° und + 10° bezeichnen den gleichen geometrischen Winkel, nicht aber den gleichen Drehwinkel.

Halbgerade (Strahl): einseitig begrenztes Geradenstück; **Strecke:** zweiseitig begrenztes Geradenstück;

Parallele Geraden haben keinen Punkt gemeinsam oder fallen zusammen.

Ein **Rechtwinkliges Koordinatensystem** besteht aus einer Zahlengerade g_1 und einer Zahlengerade g_2, die g_1 im *Ursprung O* rechtwinklig schneidet (Seite 116).

Winkel: Zwei Halbgerade ("Schenkel") mit gemeinsamen Anfangspunkt S ("Scheitel");

Winkelmessung: 1 Grad (1°) ist der 90. Teil des rechten Winkels, der 90° besitzt (Gradmaß). α heißt spitzer Winkel, wenn $0° < \alpha < 90°$; stumpfer Winkel, wenn $90° < \alpha < 180°$.

Komplementäre Winkel ergänzen einander zu 90°, **supplementäre** Winkel ergänzen einander zu 180°.

Winkelpaare (Seite 117): Nebenwinkel sind supplementär; Scheitelwinkel sind gleich groß. Parallelwinkel sind gleich groß oder supplementär.

Eine Figur ist **achsensymmetrisch**, wenn es eine Gerade g (eine Achse) gibt, die diese Figur in Bild und Spiegelbild teilt.

Streckensymmetrale: Symmetrieachse einer Strecke; sie steht normal auf der Strecke.
Winkelhalbierende: Symmetrieachse eines Winkels.

Eine **Drehung** um einen festen Punkt ("Drehpunkt") wird durch die Angabe des Drehwinkels beschrieben. Positiver Drehsinn: Linksdrehung, negativer Drehsinn: Rechtsdrehung.

Aufgaben

4.1 Berechne den Querschnitt des Profils (Maße in mm) in **a)** Abb 4.18 und **b)** Abb 4.19.

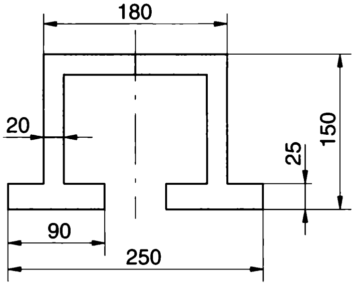


Abb. 4.18

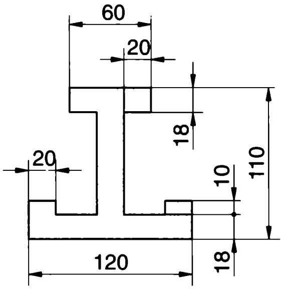


Abb. 4.19

4.2 Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr um:
a) 2 Uhr **b)** 3 Uhr **c)** 17 Uhr **d)** 20.20 Uhr **e)** 9.12 Uhr ?

4.3 Wie groß ist der Winkel, die der große (der kleine) Zeiger in einer Minute überstreicht?

4.4 Berechne die Größe des komplementären und des supplementären Winkels zu:
a) 12° **b)** 34,9° **c)** 45° **d)** 72,4° **e)** 80°

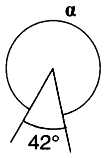
4.5 Rechne in Gon um:
a) 45° **b)** 1° **c)** 60° **d)** 100° **e)** 180° **f)** 270°

4.6 Rechne in Grad um:
a) 50^g **b)** 1^g **c)** 20^g **d)** 100^g **e)** 200^g **f)** 250^g

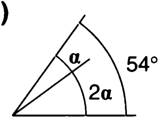
4.7 Zwei Stirnräder haben 32 bzw. 12 Zähne. Um wie viel Grad dreht sich ein Punkt des großen Rades während einer vollen Umdrehung des kleinen Rades weiter?

4.8 Ermittle α in den folgenden Figuren:

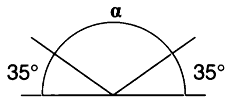
a)



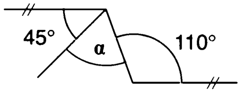
b)



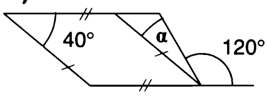
c)



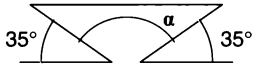
d)



e)

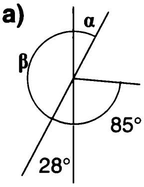


f)

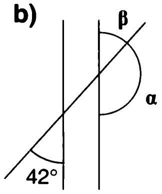


4.9 Ermittle α und β in den folgenden Figuren:

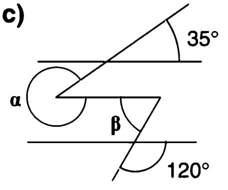
a)



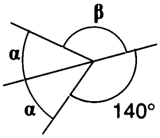
b)



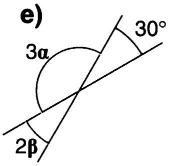
c)



d)



e)



4.10 Untersuche folgende Figuren auf (Achsen-)Symmetrie und gib gegebenenfalls die Symmetrieachsen an:
a) Parallelogramm **b)** Rhombus (Raute) **c)** Deltoid (Drachenviereck) **d)** Ellipsoid

4.2 Das Dreieck

4.2.1 Allgemeines Dreieck

Das Dreieck ist die einfachste geradlinig begrenzte Figur der Ebene. Es ist grundlegend für Viereck und Vieleck und liegt vielen technischen Konstruktionen und Rechnungen zugrunde.

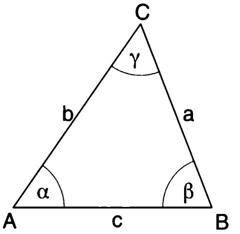


Abb. 4.20 Allgemeines Dreieck

Häufige Bezeichnungen (Abb 4.20)

A, B, C .. Eckpunkte;

a, b, c ... Seiten (a liegt A gegenüber, usw.);

$\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$ ..... (Innen-)Winkel;

Die Kennzeichnung der Eckpunkte wird so gewählt, dass A, B und C im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiver Drehsinn) aufeinander folgen.

ΔABC (lies "Dreieck ABC").

1. Winkelsummensatz

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich 180°.

Beweis:

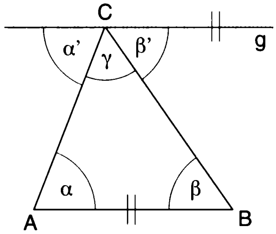


Abb. 4.21 Winkelsumme

Zieht man (Abb. 4.21) durch C eine Gerade g parallel zur Strecke AB, so erkennt man, dass

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (Parallelwinkel).

Aus $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ folgt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Folgerung: Sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, so ist der dritte Winkel bestimmt. Beispielsweise:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Beispiel 4.2 : Winkelberechnung in Dreiecken

a) Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinklig. Sind α und β die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt $\beta = 90° - \alpha$. Zeige dies!

b) Mit Lot und Winkelmesser kann nach Abb. 4.22 der Neigungswinkel einer Ebene gemessen werden (Setzwaage). Zeige, dass φ gleich dem Neigungswinkel α ist.

Lösung

Zu **a)** Sei γ der rechte Winkel, also $\gamma = 90°$. Einsetzen in die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ führt auf $\alpha + \beta = 90°$ oder $\beta = 90° - \alpha$.

Zu **b)** Abb. 4.22. Wegen **a)** ist $\beta = 90° - \alpha$; im Dreieck ADE ist aus dem gleichen Grund $\beta' = 90° - \varphi$. Da $\beta = \beta'$ (Scheitelwinkel), gilt $90° - \alpha = 90° - \varphi$; daraus folgt $\varphi = \alpha$.

Anmerkung: Die Winkel $\angle$ ABC und $\angle$ AED haben die Eigenschaft, dass ihre Schenkel normal aufeinander stehen. Solche Winkel heißen **Normalwinkel**; Normalwinkel sind gleich groß oder supplementär.

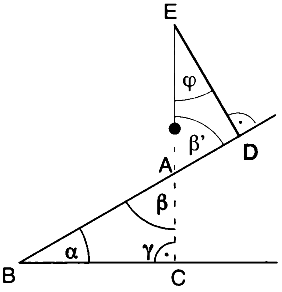
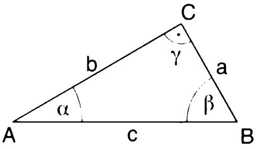
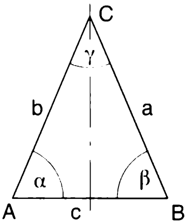
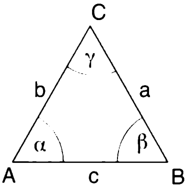


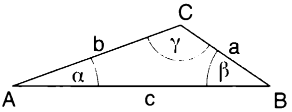
Abb. 4.22 Neigungswinkel α

2. Besondere Dreiecke









Rechtwinkliges Dreieck

Ein Winkel, etwa γ, ist gleich 90°. Dann gilt: $\alpha + \beta = 90°$ (Beispiel 4.2).

Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt *Hypotenuse*. Die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, heißen *Katheten.*

Gleichschenkliges Dreieck

2 Winkel, α und β, sind gleich groß: $\alpha = \beta$. Damit sind auch die diesen beiden Winkeln gegenüber liegenden Seiten a und b gleich groß. Das Dreieck ist (achsen-)symmetrisch.

a und b heißen *Schenkel,* c heißt *Grundseite* oder *Basis.*

Gleichseitiges Dreieck

Alle drei Winkel sind gleich groß: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Dann sind auch die drei Seiten gleich groß: $a = b = c$.

Das Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen (welche?).

Stumpfwinkliges Dreieck

Ein Winkel ist größer als 90°.

3. Seitensymmetralen, Höhen, Schwerlinien und Winkelsymmetralen

Die folgenden Sätze werden ohne Beweis angeführt.

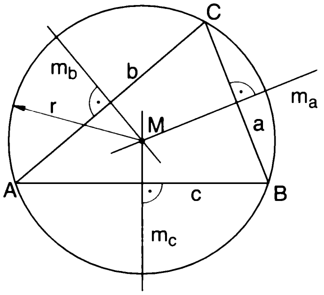


Abb. 4.23 Seitensymmetralen

Die drei Seitensymmetralen m_a, m_b und m_c eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises (Abb. 4.23).

Der Umkreis ist der Kreis, auf dem alle drei Eckpunkte liegen. Sein Radius wird mit r bezeichnet.

Der Umkreismittelpunkt M liegt bei spitzwinkligen Dreiecken innerhalb, bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks. Ist das Dreieck rechtwinklig, so liegt M auf der Hypotenuse (siehe auch Satz von THALES, Seite 131).

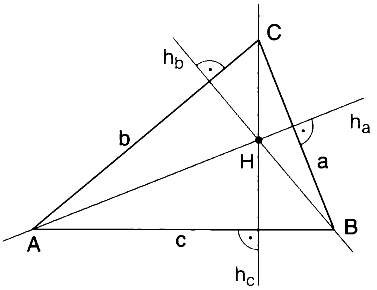


Abb. 4.24 Höhenlinien

Unter einer *Dreieckshöhe* (Abb 4.24) versteht man die Gerade, die durch einen Eckpunkt geht und normal auf der gegenüber liegenden Seite bzw. deren Verlängerung steht.

Bezeichnungen: h_a, h_b, h_c.

Anmerkung: Mit h_a, h_b, h_c werden auch die Abstände der Eckpunkte von den gegenüber liegenden Seiten und die dazugehörigen Strecken bezeichnet, wofür auch wieder der Name "Dreieckshöhe" verwendet wird.

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt.

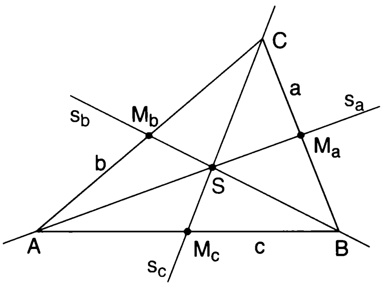


Abb. 4.25 Schwerlinien

Die Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite und den gegenüberliegenden Eckpunkt heißt *Schwerlinie* (Abb. 4.25).

Bezeichnungen: s_a, s_b und s_c.

Anmerkung: Mit s_a, s_b und s_c werden auch die Strecken zwischen Seitenmittelpunkt und gegenüberliegendem Eckpunkt sowie auch deren Längen bezeichnet.

Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Dieser teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1.

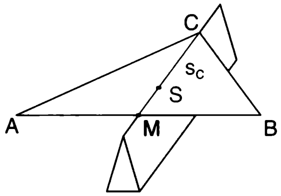


Abb. 4.26 Schwerlinie

Eine längs einer Schwerlinie, in Abb. 4.26 längs s_c, oder im Schwerpunkt gestützte Dreiecksfläche bleibt in waagrechter Lage im Gleichgewicht.

Es gilt: $\overline{SC} = 2 \cdot \overline{SM}$.

In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt auf einer Geraden.

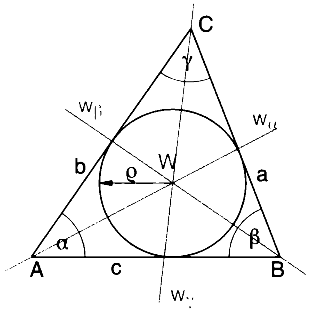


Abb. 4.27 Winkelsymmetralen

Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt W, dem Mittelpunkt des Inkreises (Abb. 4.27). Dessen Radius wird mit ϱ bezeichnet.

Anmerkung: Die als Geraden eingeführten Winkelsymmetralen, die auf ihnen vom Dreieck ausgeschnittenen Strecken sowie auch deren Längen bezeichnet man mit w_α, w_β und w_γ.

Ist die Winkelsumme im Dreieck stets 180° ?

Eine Expedition verlässt ihr Basislager in südlicher Richtung und legt dabei 10 km zurück. Danach legt sie 10 km in westlicher Richtung zurück und macht nun eine Rast. Dabei beobachten die Expeditionsmitglieder einen Bären. Nach ihrem Aufbruch, diesmal in nördlicher Richtung, erreichen sie nach 10 km wieder das Basislager. Welche Farbe hatte der beobachtete Bär?

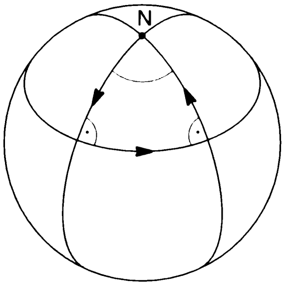


Abb. 4.28 Dreieck auf Kugel

Ein solche Expeditionsroute gibt es, wenn das Basislager am Nordpol der Erdkugel ist (Abb. 4.28). Die Route beschreibt ein Kugeldreieck; es besitzt zwei rechte Winkel und eine Winkelsumme, die größer ist als 180°! Der Bär muss daher wohl ein Eisbär gewesen sein. Die Geometrie auf einer Kugelfläche ist ein Beispiel für eine nichteuklidische Geometrie, bei der wesentliche Unterschiede zur gewohnten ebenen oder euklidischen Geometrie auftreten.

Aufgaben

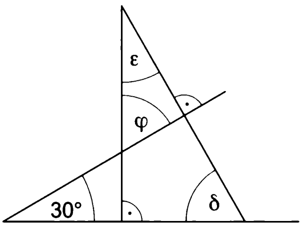
4.11 Wie viele spitze Winkel muss ein Dreieck mindestens besitzen? Wie viele rechte Winkel kann ein Dreieck besitzen?

4.12 In einem Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$. Ermittle α und β, wenn β

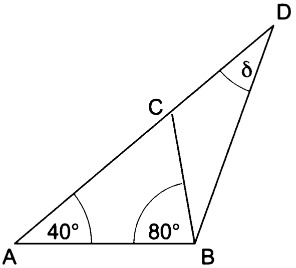
a) gleich groß wie α **b)** um 10° größer als α **c)** doppelt so groß wie α ist.

4.13 Berechne

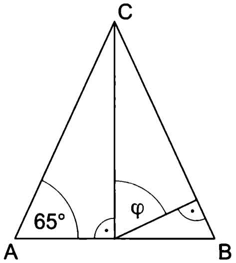
a) ε, φ und δ



b) δ, wenn $\overline{BC} = \overline{CD}$



c) φ, wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$



4.14 Abb. 4.29 zeigt die "Geometrie" eines in der Praxis üblichen Wagenhebers. Hierbei ist $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$. Bewegt sich B in Richtung auf den festen Punkt A, so bewegt sich D senkrecht nach oben (ohne seitliche Verschiebung!). Zeige dies durch den Nachweis, dass der Winkel φ stets 90° ist, gleichgültig wie groß β ist.

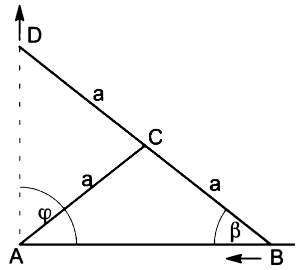


Abb. 4.29

4.2.2 Kongruente Dreiecke

Zwei ebene Figuren heißen **kongruent** oder **deckungsgleich**, wenn sie in allen Bestimmungsstücken (Seiten, Winkel, ...) übereinstimmen. Würde man solche Figuren aus Papier ausschneiden, dann könnten sie so übereinander gelegt werden, dass sie zur Deckung kommen.

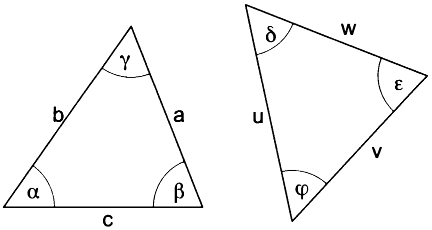


Abb. 4.30 Kongruente Dreiecke?

Sind die Figuren **Dreiecke** (Abb. 4.30), so ist es nicht nötig, *alle* Bestimmungsstücke auf Gleichheit zu prüfen; man braucht nur die Übereinstimmung *dreier* bestimmter unabhängiger Bestimmungsstücke nachzuweisen. Wir beschränken uns dabei auf Seiten und Winkel. Welche dies sind, das sagen die **vier Kongruenzsätze**:

Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie in

1. **drei Seiten** oder
2. **zwei Seiten** und dem von ihnen *eingeschlossenen* **Winkel** oder
3. **zwei Seiten** und dem der *größeren* Seite gegenüber liegenden **Winkel** oder
4. **einer Seite** und **zwei gleichliegenden Winkeln** übereinstimmen.

Stellt man also etwa in Abb. 4.30 fest, dass b = u, c = v und $\alpha = \varphi$ ist, so sind die Dreiecke nach dem zweiten Kongruenzsatz kongruent.

Beispiel 4.3 : Dreieckskonstruktion

Konstruiere ein Dreieck mit a = 6,5 cm, b = 6 cm und $\alpha = 50°$.

Lösung

Gegeben sind also zwei Seiten und ein Winkel; dieser liegt der größeren Seite gegenüber. Nach dem 3. Kongruenzsatz ist das Dreieck mit diesen Angaben eindeutig konstruierbar.

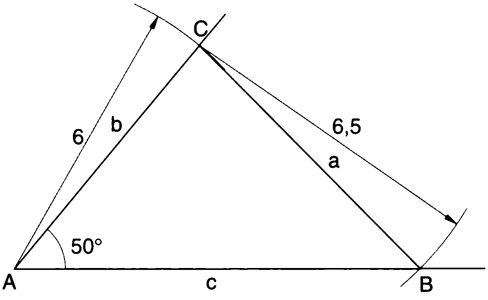


Abb. 4.31 Zum 3. Kongruenzsatz

Abb. 4.31 zeigt die Konstruktion:

(1) Zeichnen eines Winkels der Größe $\alpha = 50°$, sein Scheitel ist der Punkt A.

(2) Auf dem einen Scheitel trägt man b = 6 cm ab und erhält den Punkt C.

(3) Um C wird mit dem Radius a = 6,5 cm ein Kreisbogen gezeichnet, der den anderen Schenkel im Punkt B schneidet.

Beispiel 4.4 : Der Problemfall (gegeben 2 Seiten und jener Winkel, der der kleineren Seite gegenüber liegt)

Konstruiere ein Dreieck mit a = 5 cm, b = 6 cm und $\alpha = 50°$.

Lösung

Die Angaben sind ähnlich wie in Beispiel 4.3; da nun $a < b$, liegt der Winkel α der *kleineren* Seite gegenüber. Darüber gibt es keine Aussage durch einen Kongruenzsatz!

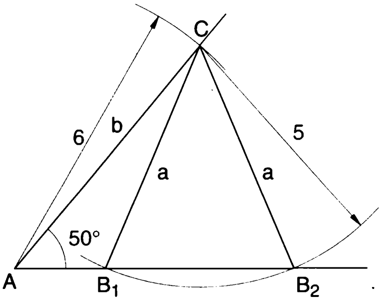


Abb. 4.32 Der Problemfall

Die Konstruktion in Abb. 4.32 zeigt den Grund: Zu diesen Angaben können *zwei* nicht kongruente Dreiecke AB_1C und AB_2C gezeichnet werden. Denn der Kreisbogen mit dem Radius a um C schneidet den einen Schenkel des Winkels α in zwei Punkten B_1 und B_2. Wird a kleiner gemacht, so tritt schließlich der Fall auf, dass es überhaupt keine Lösung mehr gibt!

Der Grund für diese Probleme liegt darin, dass der gegebene Winkel der *kleineren* Seite gegenüber liegt!

Sind die in einem der Kongruenzsätze angeführten drei Bestimmungsstücke gegeben, ist das Dreieck eindeutig konstruierbar. Entsprechend spricht man von den vier Grundaufgaben der Dreieckskonstruktion bzw. der Dreiecksberechnung.

Auch wenn man andere Bestimmungsstücke als Seiten oder Winkel zulässt (etwa Höhen, Schwerlinien, ...), sind für ein allgemeines Dreieck stets **drei unabhängige Bestimmungsstücke** erforderlich, von denen eines eine Länge sein muss.

Aufgaben

4.15 Zwei rechtwinklige Dreiecke stimmen **a)** in einem spitzen Winkel und in einer Kathete, **b)** in der Hypotenuse und einer Kathete, **c)** in den beiden spitzen Winkeln überein. In welchen Fällen besteht Kongruenz?

4.16 Konstruiere, wenn möglich, ein Dreieck mit folgenden Bestimmungsstücken:

a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm
b) $a = 5$ cm, $\alpha = 48°$, $\gamma = 38°$
c) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 70°$
d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 70°$
e) $a = 5$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 70°$
f) $c = 8$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 40°$

4.2.3 Flächeninhalt eines Dreiecks

Wir ergänzen das Dreieck ABC nach Abb. 4.33 zu einem Rechteck ABDE. Eingezeichnet ist auch die Höhe h_c auf die Seite c. Nach den Kongruenzsätzen sind
die Dreiecke AHC und ACE sowie
die Dreiecke BCH und BDC
kongruent. Damit hat das Dreieck ABC den halben Flächeninhalt des Rechtecks, der durch $c \cdot h_c$ gegeben ist.

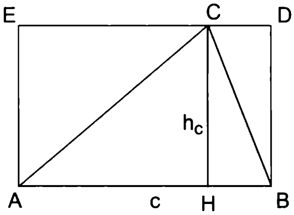


Abb. 4.33 Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt A eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Dreiecksseite und der dazugehörigen Höhe: $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Kürzer kann man schreiben, wenn g eine Dreiecksseite ("Grundseite") und h die Höhe auf g ist:

Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$

Abschließend wird ohne Herleitung eine weitere Flächenformel angegeben, mit der man aus den drei Seiten a, b und c des Dreiecks die Fläche berechnen kann:

Heron'sche Formel[6]: $A = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$

s ist dabei der halbe Umfang des Dreiecks. Eine weitere Flächenformel, die die Dreieckswinkel einbezieht, werden wir in "Ingenieur-Mathematik 2" kennen lernen.

Beispiel 4.5 : Heron'sche Flächenformel

Ein Dreieck hat die Seiten $a = 40{,}5$ cm, $b = 56{,}4$ cm und $c = 62{,}7$ cm. Berechne die Dreiecksfläche sowie die Höhe auf c.

Lösung

$s = \frac{40,5 + 56,4 + 62,7}{2} = 79{,}8$ cm;

$s - a = 39{,}3$ cm; $s - b = 23{,}4$ cm; $s - c = 17{,}1$ cm;

$A = 1120{,}22\ldots \text{ cm}^2 \approx 11{,}2 \text{ dm}^2$

Hierbei wurde das Taschenrechnerergebnis für A entsprechend der Genauigkeit der Dreiecksseiten gerundet. Aus $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = 1120{,}22\ldots \text{ cm}^2$ ergibt sich $h_c = 35{,}7$ cm.

---

[6] HERON VON ALEXANDRIA, griech. Techniker, lebte vermutlich im 1. Jahrhundert n. Chr.

Aufgaben

4.17 Ein Dreieck besitzt einen Flächeninhalt von 24 cm^2 und eine Höhe von 4,0 cm. Wie lang ist die zugehörige Seite?

4.18 Warum haben alle drei Dreiecke der Abb. 4.34 den *gleichen* Flächeninhalt?

4.19 Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Länge der Katheten: 35,0 cm und 48,0 cm. Berechne den Flächeninhalt.

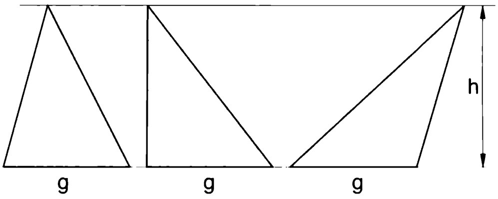


Abb. 4.34 Gleiche Flächeninhalte

4.20 Berechne Flächeninhalt und die drei Höhen der folgenden Dreiecke:

a) a = 4,2 cm; b = 5,0 cm; c = 3,8 cm **b)** a = 17,3 cm; b = 24,5 cm; c = 28,3 cm

4.2.4 Ähnliche Dreiecke und Strahlensätze

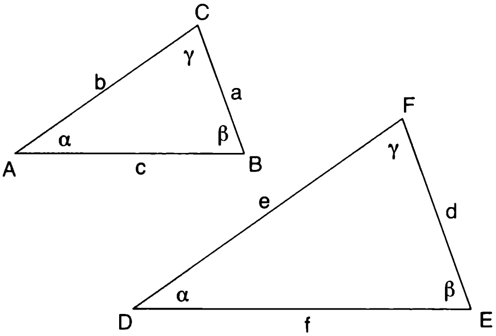


Abb. 4.35 Ähnliche Dreiecke: gleiche Winkel und Seitenverhältnisse a : d = b : e = c : f

Gleichheit der drei Winkel bedeutet im Allgemeinen keine Kongruenz der Dreiecke, wie Abb. 4.35 zeigt. Die beiden Dreiecke haben auf Grund der gleich großen Winkel jedoch die gleiche "Gestalt", auch wenn das eine Dreieck größer als das andere ist.

Wir definieren:

Zwei **Dreiecke** ABC und DEF heißen **ähnlich**, wenn ihre Winkel paarweise gleich sind. Schreibweise: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Der Seite a im Dreieck ABC entspricht die Seite d im Dreieck DEF, da sie beide dem Winkel α gegenüber liegen. Ebenfalls entsprechen einander die Seiten b und e sowie c und f. Ähnliche Dreiecke zeichnen sich dadurch aus, dass die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich sind, was ohne Beweis angeführt wird: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

Ähnliche Dreiecke stimmen im Verhältnis ihrer Seitenlängen überein.

Nachweis der Ähnlichkeit zweier Dreiecke

Es genügt, die Übereinstimmung zweier Winkel zu zeigen, da der dritte damit festgelegt ist. In rechwinkligen Dreiecken genügt dafür bereits die Übereinstimmung eines spitzen Winkels.

Beispiel 4.6 : Ähnliche Dreiecke (1)

Gegeben ist ein Gerüst nach Abb. 4.36. Die beiden Strecken AB und CD sind parallel. Ermittle die Länge $x = \overline{ED}$.

Lösung

Man erkennt leicht:

$\angle$CED = $\angle$AEB (Scheitelwinkel) und $\angle$ECD = $\angle$EBA (Parallelwinkel); somit $\triangle$AEB ~ $\triangle$ECD.

In diesen beiden Dreiecken entsprechen einander AB und CD sowie AE und ED, da sie jeweils gleich großen Winkeln gegenüber liegen. Die Verhältnisse ihrer Längen sind gleich:

$$\frac{x}{2{,}04\ \text{m}} = \frac{4{,}25\ \text{m}}{1{,}93\ \text{m}};$$

daraus: $x = 4{,}25 \cdot \frac{2{,}04}{1{,}93}\ \text{m} = 4{,}49\ \text{m}$.

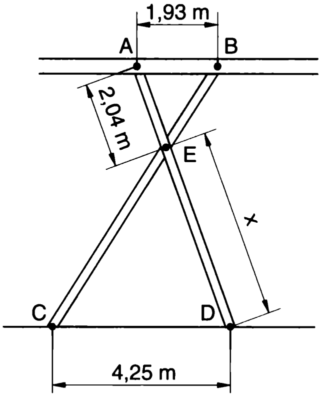


Abb. 4.36 Gerüst

Beispiel 4.7 : Ähnliche Dreiecke (2)

Berechne die Länge x in Abb. 4.37 (Maße in cm).

Lösung

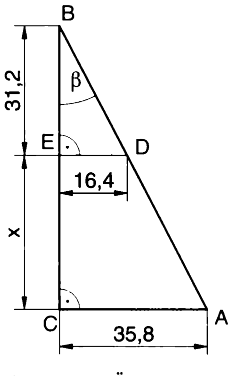


Abb. 4.37 Ähnliche Dreiecke

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke CAB und EDB sind ähnlich, da ihnen der spitze Winkel β gemeinsam angehört. Es entsprechen einander CB und EB als längere Katheten sowie CA und ED als kürzere Katheten; ihre Verhältnisse sind gleich:

$$\frac{\overline{CB}}{31{,}2\ \text{cm}} = \frac{35{,}8\ \text{cm}}{16{,}4\ \text{cm}};$$

daraus $\overline{CB} = 68{,}1$ cm und weiter

$x = \overline{CB} - 31{,}2\ \text{cm} = 36{,}9\ \text{cm}$.

Strahlensätze

Aufgaben wie in Beispiel 4.6 oder 4.7 – **zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden (Strahlen) werden von Parallelen geschnitten** – kommen in der Praxis öfters vor. Wir gehen von Abb. 4.38 aus:

Strahlenabschnitte: $a = \overline{SA}$, $b = \overline{AB}$ sowie $c = \overline{SC}$, $d = \overline{CD} = \overline{AE}$.

Parallelenabschnitte: $e = \overline{AC}$, $f = \overline{BD}$.

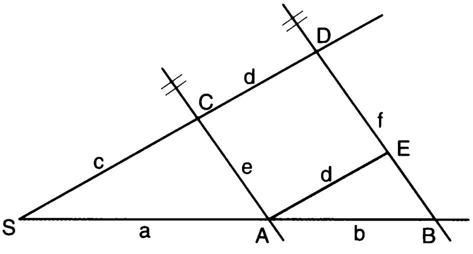


Abb. 4.38 Strahlensätze

Man kann auch etwas allgemeiner zwei einander in S schneidende *Geraden* zulassen. Die beiden Parallelen könnten dann auf verschiedenen Seiten von S liegen.

$\Delta SAC \sim \Delta SBD \Rightarrow$	$a : (a + b) = c : (c + d)$	1. Strahlensatz
$\Delta SAC \sim \Delta ABE \Rightarrow$	$a : b = c : d$	
$\Delta SAC \sim \Delta SBD \Rightarrow$	$e : f = a : (a + b)$	2. Strahlensatz

Wir haben, wie hier üblich, als Divisionszeichen statt des Bruchstriches die Divisionspunkte verwendet. In Worten lauten die beiden Strahlensätze:

> **1. Strahlensatz**: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten (Abb. 4.38), so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die *entsprechenden* Abschnitte auf dem anderen Strahl.
>
> **2. Strahlensatz**: Die zwischen den Strahlen liegenden Parallellenabschnitte verhalten sich wie die *entsprechenden* von S gemessenen Abschnitte eines Strahls.

Die Strahlensätze sind Erklärungsgrundlage vieler praktischer Anwendungen.

Beispiel 4.8 : Teilung einer Strecke

Eine Strecke AB soll im Verhältnis 3 : 5 geteilt werden.

Lösung

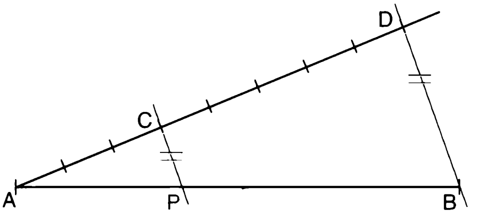


Abb. 4.39 Teilung einer Strecke

Anwendung des 1.Strahlensatzes:

Vom Endpunkt A der Strecke AB zieht man einen beliebigen Hilfsstrahl und trägt auf ihm zuerst 3, dann 5 gleich lange Strecken auf. Man erhält die Punkte C und D. Sodann zeichnet man die Gerade durch B und D und zu dieser Geraden die Parallele durch C. Diese schneidet die Strecke AB im gesuchten Teilungspunkt P.

Zieht man die Parallelen durch *alle* Endpunkte der Teilstrecken von AD, so erhält man eine Teilung der Strecke AB in 8 gleich lange Teilstrecken.

Aufgaben

4.21 Zwei ähnliche Dreiecke haben die Seiten a, b, c bzw. d, e, f. Dabei entsprechen einander a und d, b und e sowie c und f. Ergänze die folgende Tabelle:

a	b	c	d	e	f	a : d	b : e	c : f
8	10	14				2 : 3		
8	12	14			35			
4			3	3	6			

4.22 Zeige rechnerisch (siehe Abb. 4.38, Seite 128), dass aus $a : (a + b) = c : (c + d)$ die Aussage $a : b = c : d$ folgt.

4.23 Ein Leitungsmast wirft einen Schatten von 6,0 m Länge. Wie hoch ist er, wenn daneben eine senkrecht stehende 2 m lange Stange einen Schatten von 1,5 m wirft? Kann diese Methode zur Höhenermittlung auch bei einem gleichmäßig steilen Gelände angewendet werden?

4.24 Die beiden Dreiecke in Abb. 4.40 sind ähnlich. Berechne x und y!

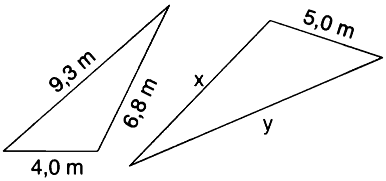


Abb. 4.40

4.25 Eine 170 cm große Person möchte sich in voller Größe in einem vertikal hängenden Spiegel sehen können (Abb. 4.41). Welche Höhe h muss der Spiegel mindestens haben? In welchem Abstand x vom Boden muss der Spiegel dann aufgehängt sein, wenn die Augenhöhe a mit 160 cm angenommen wird?
Hinweis: Das Bild ist "im" Spiegel gleich weit entfernt, wie der Gegenstand vor dem Spiegel und bekanntlich gleich groß wie der Gegenstand. Ziehe "Sehstrahlen" von den Augen zum untersten und obersten Punkt des Spiegelbildes.

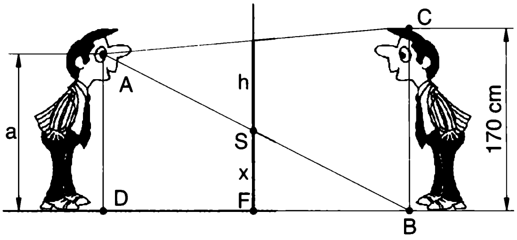


Abb. 4.41

4.26 Bestimme (Abb. 4.42) die Hangabtriebskraft *F* eines Körpers vom Gewicht *G* = 4000 N auf einer schiefen Ebene der Länge *l* = 8,0 m und der Höhe *h* = 3,0 m.

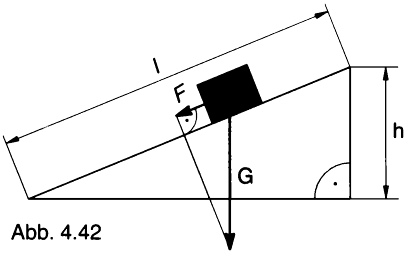


Abb. 4.42

4.27 Ein Messkeil dient zur Messung der lichten Weiten einer Röhre oder Öffnung. Er besitzt einen rechtwinkligen Querschnitt mit Katheten im Verhältnis 1 : 10. Berechne in Abb. 4.43 die lichte Weite x!

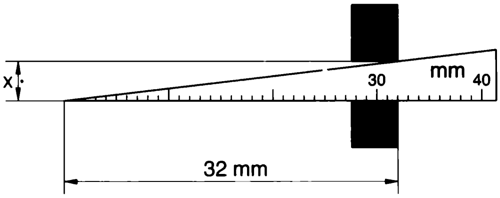


Abb. 4.43

4.28 Eine Strecke von 9 cm ist zu teilen im Verhältnis **a)** 7 : 3 **b)** 2 : 3 **c)** 1 : 1 (d.h. Halbierung) **d)** 1 : 3

4.29 Eine Strecke von 9 cm ist in **a)** 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 gleich lange Strecken zu teilen.

4.30 Abb. 4.44 zeigt eine einfache Graphik ("Nomogramm") zur Umrechnung von Zoll in Zentimeter und umgekehrt (1 Zoll = 2,54 cm). Man braucht dabei nur ein Lineal von S aus anlegen. Berechne den Abstand der Zollstriche x, wenn der Abstand der Teilstriche der Zentimeterskala 1 cm, c = 10 cm und d = 5 cm ist.

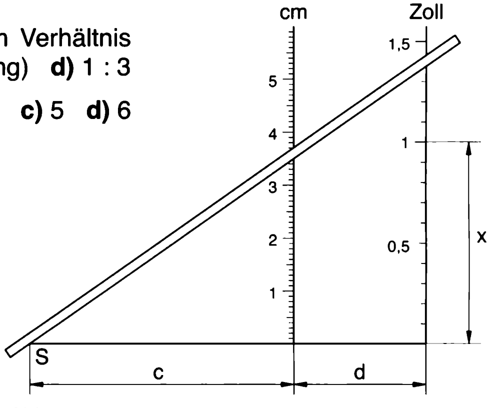


Abb. 4.44

4.31 Im Gelände (Abb. 4.45) soll eine gerade Linie g zwischen 2 Punkten A und B, zwischen denen ein Haus liegt, ausgesteckt werden. Dazu wird eine weitere gerade Linie h am Haus vorbeigeführt. Bestimme die Lage der Punkte C und D auf g durch Berechnung ihrer Normalabstände x und y von h.

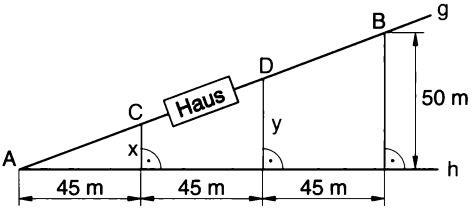


Abb. 4.45

4.2.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck

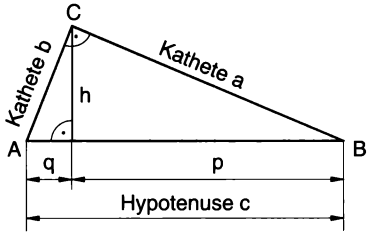


Abb. 4.46 Bezeichnungen

Abb. 4.46:

Katheten: a, b
Hypotenuse: c
Höhe auf c: h
Hypotenusenabschnitte: p und q.

Satz des Thales[7]: Jedes Dreieck im Halbkreis ist rechtwinklig.

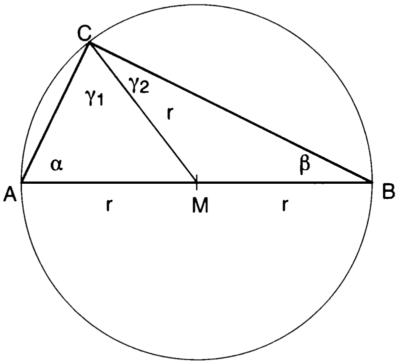


Abb. 4.47 Satz des Thales

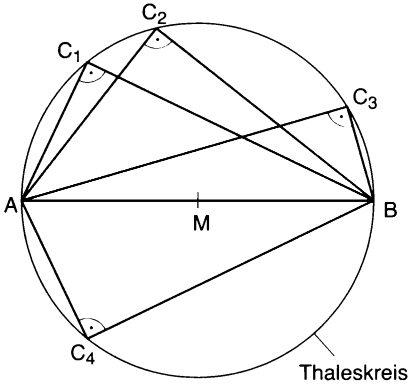


Abb. 4.48 Winkel im Halbkreis

Beweis: Abb. 4.47

Da die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklig sind, gilt $\gamma_1 = \alpha$ und $\gamma_2 = \beta$. Setzen wir dies in die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$ (Winkelsummensatz) ein, so folgt $2 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 = 180°$ oder $\gamma_1 + \gamma_2 = 90°$, was zu zeigen war.

Der Kreis (Abb. 4.48), auf dem alle Punkte $C_1, C_2, \ldots$ liegen, die mit dem Kreisdurchmesser ein rechtwinkliges Dreieck bilden, heißt **Thaleskreis**. Er ist Grundlage vieler geometrischer Konstruktionen.

---

[7] THALES von MILET, griech. Kaufmann und Mathematiker, ca. 624 bis 546 v. Chr.

Satz des Pythagoras[8]: $a^2 + b^2 = c^2$

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

Beweis: Von den mehreren hundert bekannten Beweisen dieses Satzes wird ein besonders einfacher angeführt.

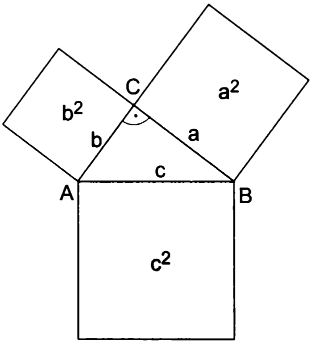


Abb. 4.49 Veranschaulichung des pythagoräischen Lehrsatzes

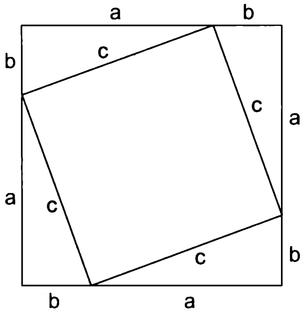


Abb. 4.50 Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes

Der Flächeninhalt des äußeren Quadrates in Abb. 4.50 ist gleich dem Flächeninhalt des inneren Quadrates vermehrt um die Flächeninhalte der vier rechtwinkligen Dreiecke:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a\,b}{2}$$

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = c^2 + 2\,a\,b \quad | - 2\,a\,b$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dieser einfache Satz gehört wegen seiner vielfältigen Anwendungen zu den wichtigsten (Lehr-)Sätzen der Mathematik.

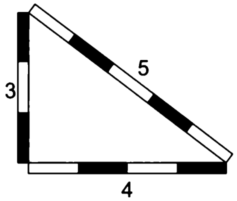


Abb. 4.51 Abstecken eines rechten Winkels

Das wohl bekannteste rechtwinklige Dreieck hat die Seitenlängen 3, 4 und 5. Damit kann man in einfacher Weise einen **rechten Winkel abstecken**. Aus drei Latten mit den Längen 3 m, 4 m und 5 m wird ein rechtwinkliges Dreieck und damit ein rechter Winkel gebildet. Natürlich können die Längen auch ein Vielfaches davon betragen, etwa 60 cm, 80 cm und 100 cm. Bereits vor Lebzeiten des Pythagoras wurden im alten Ägypten bei Vermessungen rechte Winkel nach dieser Methode gebildet.

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Das Quadrat der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$

Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt aus der Hypotenuse mit dem Hypotenusenabschnitt, welcher der Kathete *anliegt*.

Beweis:

Höhensatz: Der Abb 4.52 entnimmt man:
$a^2 = h^2 + p^2$, $b^2 = h^2 + q^2$ sowie $c = p + q$.
Einsetzen in $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt:

$$h^2 + p^2 + h^2 + q^2 = (p + q)^2$$

$$2h^2 + p^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$2h^2 = 2pq$$

$$h^2 = pq$$

Kathetensatz: $a^2 = h^2 + p^2 = p \cdot q + p^2 = p \cdot (p + q) = p \cdot c$

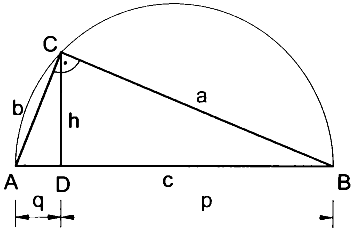


Abb. 4.52 Zum Beweis des Höhensatzes

---

[8] Pythagoras von Samos, griech. Mystiker und Mathematiker, ca. 580 bis 500 v. Chr.

Hinweis: Sind p und q zwei beliebige positive Zahlen, so heißt $\sqrt{p \cdot q}$ das **geometrische Mittel** von p und q. Graphisch kann es damit als die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypothenusenabschnitten p und q veranschaulicht werden.

Beispiel 4.9 : Berechnung von Längen (sowie des Flächeninhaltes) eines rechtwinkligen Dreiecks

Von einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 4.53) ist eine Kathete a = 6,0 cm und die Hypotenuse c = 8,0 cm bekannt. Berechne

a) die Kathete b, **b)** die Hypotenusenabschnitte p und q,
c) die Höhe h, **d)** den Flächeninhalt A.

Lösung

Zu **a)** $a^2 + b^2 = c^2$; daraus $b^2 = c^2 - a^2$ oder $b = \sqrt{c^2 - b^2} = 5{,}3$ cm.

Zu **b)** $a^2 = c \cdot p$; daraus $p = \frac{a^2}{c} = \frac{36\text{ cm}^2}{8{,}0\text{ cm}} = 4{,}5$ cm.
$q = c - p = 3{,}5$ cm.

Zu **c)** $h^2 = p \cdot q$; daraus $h = \sqrt{p \cdot q} = 4{,}0$ cm.

Zu **d)** $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = 16\text{ cm}^2$.

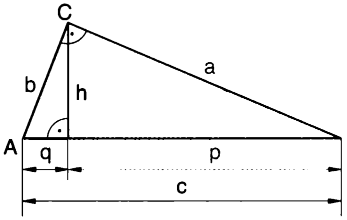


Abb. 4.53

Zwischenergebnisse können – sinnvoll gerundet – angeschrieben werden; wird jedoch mit diesen Werten weitergerechnet, so erfolgt dies in ihrer vollen Taschenrechnergenauigkeit!

Beispiel 4.10 : Diagonale eines Rechtecks (Quadrats)

Berechne allgemein die Länge d der Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten a und b.

Lösung

$d^2 = a^2 + b^2$; daraus $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ist b = a, liegt also ein Quadrat vor, so ist $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

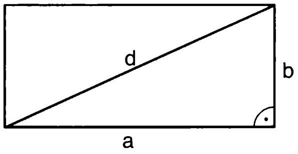


Abb. 4.54

Beispiel 4.11 : Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks

Berechne Höhe h und Fläche A eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a. Rechne zuerst allgemein und danach speziell mit a = 45 mm.

Lösung

$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\,a^2}{4}$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$;

$A = \frac{a\,h}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Speziell: h = 38,97 ... mm ≈ 39 mm
bzw. A = 876,85... mm^2 ≈ 8,8 cm^2.

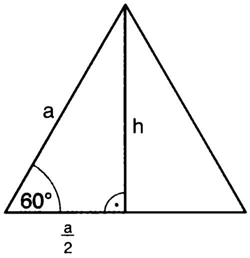


Abb. 4.55

Beispiel 4.12 : Goldener Schnitt

Man spricht von der **Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt**, wenn sich die Länge c der ganzen Strecke zum größeren Teilabschnitt x wie der größere Teilabschnitt x zum kleineren Teilabschnitt c – x verhält; also:

$c : x = x : (c - x)$.

Zeige, dass die Konstruktion in Abb 4.53 die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.

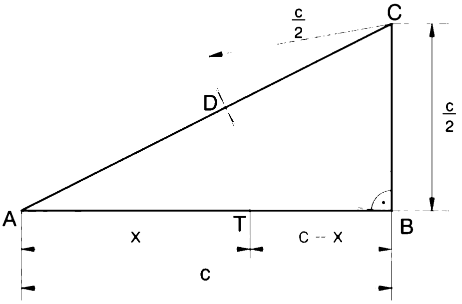


Abb. 4.56 Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt

Konstruktionsgang:

(1) Zeichnen der Strecke AB der Länge c;

(2) Errichten einer Strecke BC der Länge $\frac{c}{2}$ normal zu AB in B;

(3) Zeichnen der Strecke AC;

(4) Kreisbogen mit dem Radius $\frac{c}{2}$ um C; dieser schneidet die Strecke AC in D; $\overline{AD}$ hat die Länge des gesuchten Teilabschnittes x;

(5) Übertragen von AD auf AB ergibt den Teilungspunkt T.

Lösung

Rechtwinkliges Dreieck ABC:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = c^2 + \frac{c^2}{4}$$

$$x^2 + 2 \cdot x \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} = c^2 + \frac{c^2}{4}$$

$$x^2 + cx = c^2 \text{ oder}$$

$$x^2 = c \cdot (c - x).$$

Dividiert man beide Seiten der letzten Gleichung durch $x \cdot (c - x)$, so erhält man: $\frac{x}{c - x} = \frac{c}{x}$, was nach Vertauschung der Seiten gerade die Gleichung $c : x = x : (c - x)$ ergibt. Damit ist $x = \overline{AD}$ der gesuchte längere Teilabschnitt.

Der Goldene Schnitt hat seit der Antike Eingang in Architektur und Kunst gefunden. Die Gliederung eines Bildes oder einer Figur nach dem Goldenen Schnitt wird als besonders harmonisch empfunden.

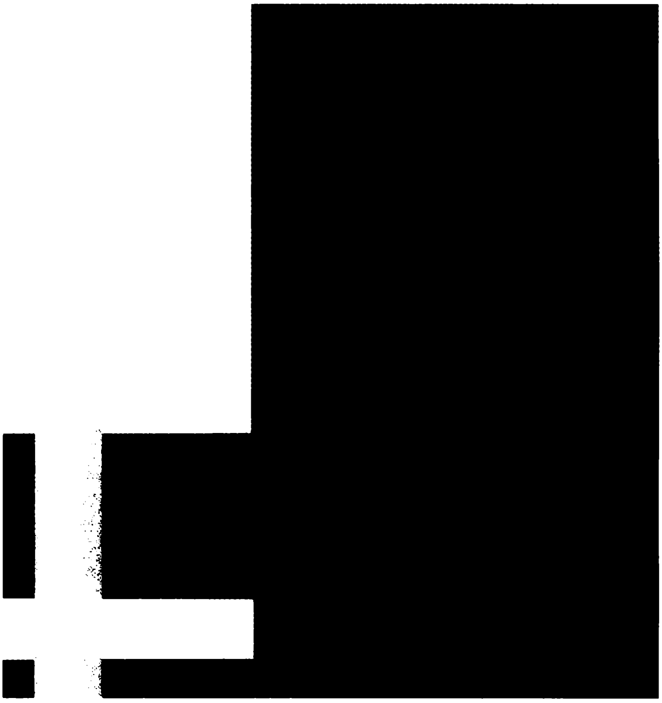


Abb. 4.57 Jo Niemeyer (geb. 1946): Utsjoki. Acryl auf Leinwand auf Holz, 50 x 50 cm. Privatbesitz. Dieses Bild enthält eine große Anzahl Goldener Schnitte – findest du einige?

Beispiel 4.13 : Abstand und Mittelpunkt zweier Punkte im Koordinatensystem

Ermittle **a)** den Abstand und **b)** den Mittelpunkt zweier Punkte P (1/2) und Q (5/5) in einem kartesischen Koordinatensystem. Führe die Rechnung zuerst allgemein.

Lösung

Zu **a)** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

$$d = \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = 5.$$

Der Abstand zweier Punkte ist hier eine Zahl. Daraus entsteht eine Größe im physikalischen Sinn, wenn diese Zahl als Maßzahl zur gewählten Einheit genommen wird. Diese Größe kann eine Länge, aber beispielsweise auch eine Kraft oder eine elektrische Wechselstromgröße sein.

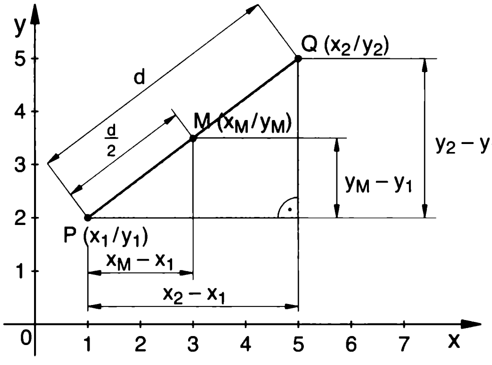


Abb. 4.58

Zu **b)** 1. bzw. 2. Strahlensatz:

$$(x_M - x_1) : (x_2 - x_1) = \frac{d}{2} : d \quad \text{bzw.} \quad (y_M - y_1) : (y_2 - y_1) = \frac{d}{2} : d$$

daraus:

$$x_M - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{2} \text{ oder } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3;$$

$$y_M - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{2} \text{ oder } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 5}{2} = 3{,}5.$$

Beispiel 4.14 : Stapelhöhe bei Rohren

Gleichartige Rohre werden dreilagig nach Abb. 4.59 gelagert. Entwickle eine Formel für die Stapelhöhe H in Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser d.

Lösung

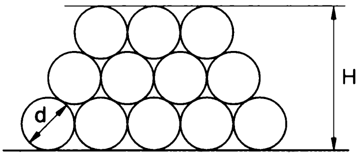


Abb. 4.59

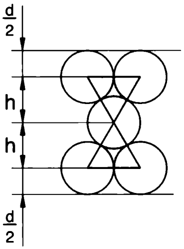


Abb. 4.60

Nach Abb. 4.60 ist $H = \frac{d}{2} + h + h + \frac{d}{2} = d + 2h$, wobei h die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge d ist. Nach Beispiel 4.11 ist schließlich $H = d + d\sqrt{3} = d\,(1 + \sqrt{3})$.

Beispiel 4.15 : Krümmungsradius einer Linse

Eine optische Linse hat den in Abb. 4.61 gegebenen Querschnitt, wobei s = 140 mm, a = 38 mm und b = 15 mm ist. Ermittle den Radius r zuerst allgemein und dann mit den speziell angegebenen Maßen.

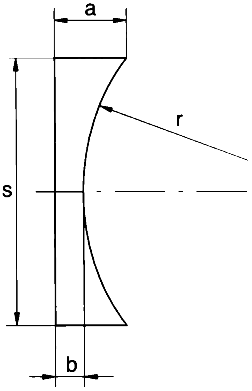


Abb. 4.61

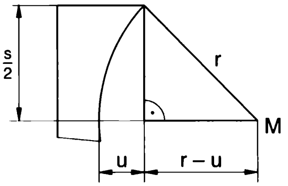


Abb. 4.62

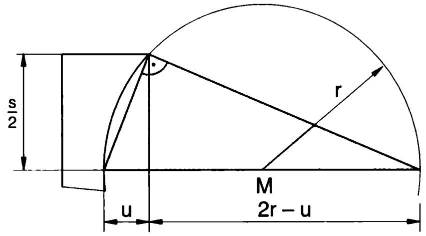


Abb. 4.63

1. Lösungsvariante (mit dem pythagoräischen Lehrsatz nach Abb. 4.62):

Setzen wir abkürzend u = a – b, so ist

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r - u)^2$$

$$r^2 = \frac{s^2}{4} + r^2 - 2\,r\,u + u^2;$$

subtrahiert man auf beiden Seiten r^2 und löst danach nach r auf, so erhält man

$$r = \frac{s^2 + 4u^2}{8u}\,.$$

Daraus ergibt sich speziell r = 118,02... mm ≈ 118 mm.

2. Lösungsvariante (mit dem Höhensatz nach Abb. 4.63):

Das markierte Dreieck ist nach dem Satz von Thales rechtwinklig. Anwendung des Höhensatzes ergibt

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = u \cdot (2\,r - u)$$

Auflösung nach r ergibt das Ergebnis wie vorher.

Einheitenkontrolle: Solange für die auftretenden Variablen nicht Zahlen eingesetzt werden, gibt es bei Aufgaben dieser oder ähnlicher Art eine einfache Möglichkeit, bestimmte Rechenfehler zu erkennen: Es können stets nur Größen *gleicher Einheit* addiert oder subtrahiert werden!

So kommen etwa in diesem Beispiel in der Zeile mit $r^2 = \frac{s^2}{4} + r^2 - 2\,r\,h + h^2$ ausschließlich Größen mit der Einheit "m^2" vor.

Aufgaben

Oft kann durch eine maßstäbliche Zeichnung ein rechnerisch gefundenes Ergebnis im Rahmen der Zeichengenauigkeit kontrolliert werden!

4.32 Von einem allgemeinen Dreieck kennt man zwei Seiten und die Höhe auf die dritte Seite. Berechne seinen Flächeninhalt!

a) a = 5,0 cm; b = 6,0 cm; h_c = 4,0 cm **b)** b = 7,0 cm; c = 9,0 cm; h_a = 6,5 cm

4.33 Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne die fehlenden Bestimmungsstücke! Maße in cm bzw. cm^2, auf eine Nachkommastelle genau.

a	b	c	p	q	h	A
8	9					
8		12				
6			4			
10					8	
10						40
	6				4	

a	b	c	p	q	h	A
	6			2		
		10	8			
		10		3		
			4	3		
			4		5	
				4	5	

4.34 Berechne den Umfang folgender Dreiecke ABC, deren Eckpunkts-Koordinaten gegeben sind:
a) A(0/0), B(4/0), C(1/3) **b)** A(–1/1), B(4/3), C(–1/3) **c)** A(–2/1), B(3/–2), C(0/4)

4.35 Einem gleichseitigen Dreieck der Seite a wird ein Kreis eingeschrieben (Inkreis mit dem Radius ϱ) und ein Kreis umgeschrieben (Umkreis mit dem Radius r). Berechne ihre Radien, wenn a gegeben ist!

Hinweis: Der gemeinsame Mittelpunkt M der beiden Kreise liegt im Schwerpunkt des Dreiecks. Da die Höhen und die Schwerlinien zusammenfallen, teilt M eine Höhe im Verhältnis 2 : 1.

4.36 Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt, dessen Durchmesser 30 cm beträgt, soll

a) ein quadratischer Balken der Seite a,

b) ein rechteckiger Balken mit einem Seitenverhältnis a : b = 5 : 7 (größte Tragfähigkeit) geschnitten werden.

Berechne jeweils die Seite(n).

4.37 Aus einem Blechstück, das die Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c = 12,0 cm besitzt, soll eine möglichst große Kreisscheibe heraus geschnitten werden. Wie groß ist ihr Durchmesser?

4.38 Berechne die Stablängen x und y des Krangerüstes in Abb. 4.64, wenn a = 2,00 m ist.

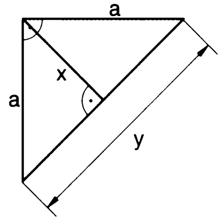


Abb. 4.64

4.39 Von dem in Abb. 4.65 dargestellten Dachbinder ist s = 15,00 m und h = 4,00 m. Berechne a, b und c.

4.40 Berechne die unbekannten Längen des Dachbinders in Abb. 4.66 (Maße in m, zentimetergenau).

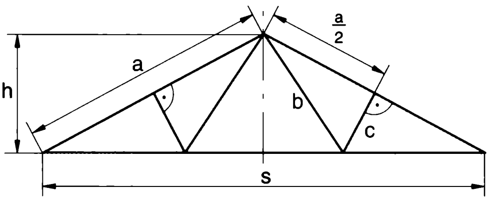


Abb. 4.65

4.41 Berechne die Länge der senkrechten Verbindungen in Abb 4.67 (Maße in m, zentimetergenau).

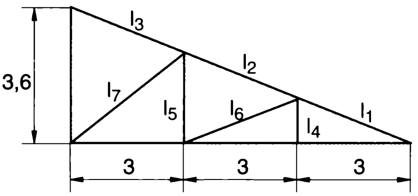


Abb. 4.66

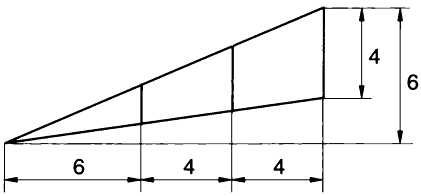


Abb. 4.67

4.42 Eine Welle mit dem Durchmesser d = 100 mm wird gemäß Abb. 4.68 um h = 6 mm abgeflacht. Berechne das Maß x.

4.43 Welche Länge x muss ein Werkstück (Abb. 4.69) mit einem Sägeblatt vom Durchmesser d = 150 mm angeschnitten werden, bis erstmals eine gewünschte Schnitttiefe h = 30 mm erreicht wird? Entwickle zuerst eine Formel für x und rechne danach speziell.

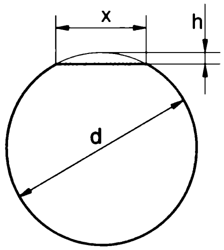


Abb. 4.68

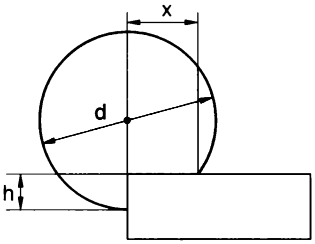


Abb. 4.69

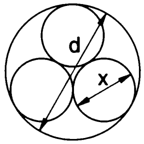


Abb. 4.70

4.44 Ein Rohr (Abb. 4.70) vom Durchmesser d = 100 mm enthält drei Kabelleitungen. Welchen Wert x darf ihr Durchmesser höchstens erreichen? Führe die Rechnung zuerst allgemein!

4.45 Berechne die Höhe H eines zweilagigen Stapels von Rohren mit Durchmesser d = 40,0 cm nach Abb. 4.71. Führe die Rechnung zuerst allgemein. Wie lautet die allgemeine Formel für die Höhe H, wenn der Stapel aus n Lagen besteht?

4.46 Berechne gemäß den Angaben in Abb. 4.72 die Normalkräfte F_N, mit denen ein Keilriemen bei F = 120 N seitlich auf die Keilriemenscheibe drückt?
Hinweis: Ähnliche Dreiecke benützen!

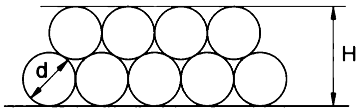


Abb. 4.71

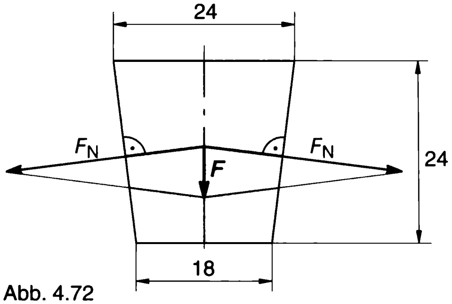


Abb. 4.72

4.47 Ein Garagenschwingtor beruht auf einer Dreiecksmechanik nach Abb. 4.73. Seine Länge $\overline{DE}$ ist 2,20 m, weiters ist $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{BC}$ = 55 cm. C gleitet vertikal, in A und B sind drehbare Verbindungen. Wie hoch über dem Boden liegen D und E, wenn das Garagentor um 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist? Welche Bahnkurve beschreibt der Punkt D?

4.48 Berechne das Maß e und die Fläche des Blechstückes in Abb. 4.74 allgemein und dann für a = 8 mm, b = 138 mm und h = 85 mm.

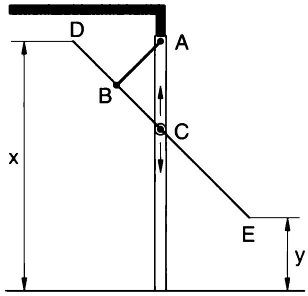


Abb. 4.73

4.49 Drücke in Abb. 4.75 die Größe r durch eine Formel in Abhängigkeit von R aus.

4.50 Drücke den Radius x des gotischen Spitzbogens in Abb. 4.76 formelmäßig in Abhängigkeit von r aus.

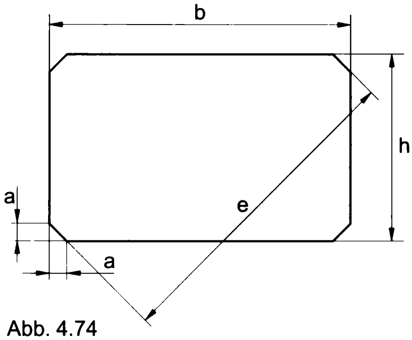


Abb. 4.74

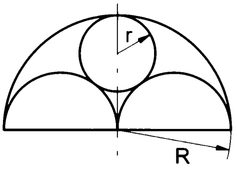


Abb. 4.75

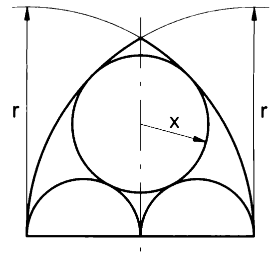


Abb. 4.76

Im Überblick: Das Dreieck

Die Winkelsumme ist gleich 180°.

Rechtwinkliges Dreieck: Ein Winkel ist gleich 90°; die *Summe* der beiden anderen Winkel ist ebenfalls 90°. *Hypotenuse*: Name der Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt. *Kathete*: Name für jede der beiden anderen Seiten, die normal aufeinander stehen.
Gleichschenkliges Dreieck: Zwei Winkel sind gleich groß und daher auch die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.
Gleichseitiges Dreieck: Alle drei Winkel und somit auch die drei Seiten sind gleich groß.
Stumpfwinkliges Dreieck: Ein Winkel ist größer als 90°.

Umkreismittelpunkt: Schnittpunkt der drei Seitensymmetralen;
Höhenschnittpunkt: Schnittpunkt der drei Höhen;
Schwerpunkt: Schnittpunkt der drei Schwerlinien; der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1.
Inkreismittelpunkt: Schnittpunkt der drei Winkelsymmetralen.

Vier Kongruenzsätze: Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie in
1. **drei Seiten** oder
2. **zwei Seiten** und dem von ihnen *eingeschlossenen* **Winkel** oder
3. **zwei Seiten** und dem der *größeren* Seite gegenüberliegenden **Winkel** oder
4. **einer Seite** und **zwei gleichliegenden Winkeln** übereinstimmen.

Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$, g ... Grundseite, h ... Höhe auf g

Heron'sche Formel: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, mit $s = \frac{a+b+c}{2}$

Ähnliche Dreiecke: Einander entsprechende Winkel sind gleich groß und einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis.

1. Strahlensatz: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei parallellen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die *entsprechenden* Abschnitte auf dem anderen Strahl.
2. Strahlensatz: Die zwischen den Strahlen liegenden Parallellenabschnitte verhalten sich wie die *entsprechenden* von S gemessenen Abschnitte eines Strahls.

Satz von Thales: Jedes Dreieck im Halbkreis ist rechtwinklig.

Sätze des rechtwinkligen Dreiecks:
Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$; **Kathetensatz:** $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$

4.3 Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

Die Trigonometrie ("Dreiecksmessung") beschäftigt sich mit der Berechnung von Seiten und Winkeln in einem Dreieck. Darüber hinaus wird sie aber auch in nichtgeometrischen Gebieten vielfältig angewendet. Als Beispiel seien Schwingungsvorgänge in der Mechanik und Elektrotechnik genannt.

Bisher war eine Dreiecksberechnung nur in einzelnen Fällen durch Sätze wie den Lehrsatz von Pythagoras möglich, die zudem auf Seiten beschränkt blieb. In diesem Abschnitt erfolgt die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks unter Einbeziehung von Winkeln. In "Ingenieur-Mathematik 2" folgt die Berechnung des "schiefwinkligen", also allgemeinen Dreiecks.

4.3.1 Kreisfunktionswerte eines spitzen Winkels

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AC_1B_1 und AC_2B_2 in Abb. 4.77 sind ähnlich; daher gilt nach dem 2. Strahlensatz:

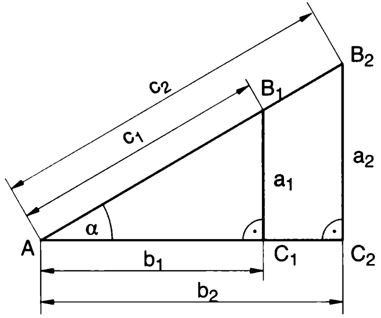


Abb. 4.77 Seitenverhältnisse

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ oder umgeformt: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$.

D. h. in zwei *beliebigen* rechtwinkligen Dreiecken mit dem gleichen Winkel α ist das Verhältnis der Kathete, die α gegenüber liegt, zur Hypotenuse gleich! Dieses Seitenverhältnis hängt nicht von der Größe des rechtwinkligen Dreiecks, sondern nur von α ab. Ebenso überlegt man, dass:

$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ und $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

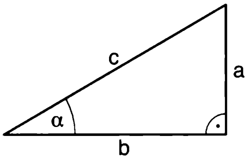


Abb. 4.78 Bezeichnungen

Diese *nur* vom Winkel α abhängenden Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks erhalten besondere Namen. Bezeichnen wir in Abb. 4.78 die dem Winkel α gegenüber liegende Kathete a als **Gegenkathete** zu α, die dem Winkel α anliegende Kathete b als **Ankathete** zu α, so nennt man:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}},$$ "Sinus Alpha"

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$ "Kosinus Alpha"

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}},$$ "Tangens Alpha"

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}},$$ "Kotangens Alpha"

Als Verhältnisse von Längen handelt es sich dabei um Zahlen und nicht um Größen mit einer Einheit. Da es für jeden Winkel α eine eindeutig bestimmte Zahl $\sin\alpha$ gibt, ist dadurch (vorerst für spitze Winkel α) eine Funktion erklärt, die Sinusfunktion. Ähnlich ist es bei den anderen Seitenverhältnissen. Sie werden als **Kreisfunktionen (auch Winkelfunktionen oder trigonometrische Funktionen)** bezeichnet.

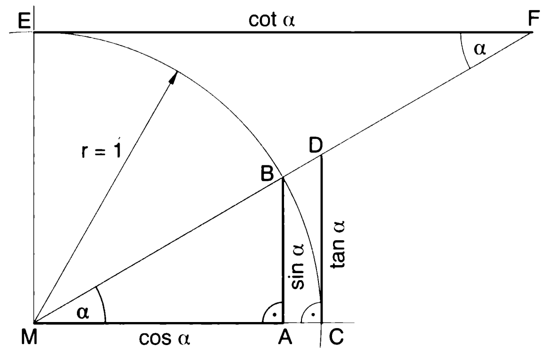


Abb. 4.79 Kreisfunktionswerte für spitze Winkel am Einheitskreis.

Als *Einheitskreis* bezeichnet man einen Kreis mit dem Radius 1 Längeneinheit (1 m, 1 dm oder dgl.). In seinem ersten Viertel (Abb. 4.79) kann man in besonders anschaulicher Weise die Kreisfunktionswerte für einen spitzen Winkel α als Zahlenwerte (in der gewählten Längeneinheit) ablesen:

$\sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$; $\cos\alpha = \frac{\overline{MA}}{1} = \overline{MA}$;

$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD}$; $\cot\alpha = \frac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$.

Es ist hilfreich, sich diese graphische Darstellung der Kreisfunktionswerte gut einzuprägen!

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit könnte man so die Werte der vier Kreisfunktionswerte für einen spitzen Winkel α entnehmen. Weiters erkennt man, dass der Sinus ebenso wie der Kosinus eines (spitzen) Winkels eine Zahl zwischen 0 bis 1, der Tangens und der Kotangens jedoch eine Zahl von 0 bis ∞ sein kann.

Für einige Winkel kann man ihre Werte auch rechnerisch einfach ermitteln:

Beispiel 4.16 : Kreisfunktionswerte für einen besonderen Winkel

Ermittle sin 30°, cos 30°, tan 30° und cot 30°

Lösung

Wir spiegeln das Dreieck ABC an der Kathete b (Abb. 4.80). Dadurch entsteht das gleichseitige Dreieck ADB (alle Winkel sind gleich 60°). Die Länge seiner Seiten ist c.

Im rechtwinkligen Dreieck ACB ist a die Gegenkathete und b die Ankathete zu α, wobei $a = \frac{c}{2}$ ist; b ist die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks: $b = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Beispiel 4.11, Seite 133).

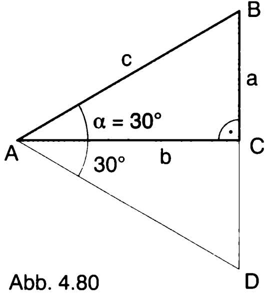


Abb. 4.80

$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$;

$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$;

$\tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$;

Da cot α einfach nur der Kehrwert von tan α ist, ist $\cot\alpha = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

Praktische Berechnung durch den Taschenrechner

Die Berechnung der Kreisfunktionswerte für beliebige Winkel erfordert Kenntnisse, die über die elementare Mathematik hinausgehen. Geeignete Algorithmen sind jedoch in den Taschenrechnern implementiert.

Achtung! Richtiges Winkelmaß im Taschenrechner einstellen!

Gradmaß: Einstellung "DEGREE" / Bogenmaß: Einstellung: "RADIAN". Mit Letzterem werden wir uns in Kürze (Seite 170 ff.) beschäftigen.

Beispiel 4.17 : Der Winkel ist gegeben, der Funktionswert gesucht

Bestätige mit dem Taschenrechner:

a) sin 30° = 0,5; **b)** cos 52° = 0,616; **c)** tan 73,8° = 3,442; **d)** cot 23,9° = 2,257.

Lösung	TI-30Xa, ecoRS	TI-30X IIB, IIS	Voyage 200 (TI-89)
Zu **a)**	30 SIN	SIN 30) ENTER=	SIN 30) ◆ ENTER
Zu **b)**	52 COS	COS 52) ENTER=	COS 52) ◆ ENTER
Zu **c)**	73 · 8 TAN	TAN 73 · 8) ENTER=	TAN 73 · 8) ◆ ENTER
Zu **d)**	1 ÷ (23 · 9 TAN) =	TAN 23 · 9) x^{-1} ENTER=	TAN 23 · 9) 2ND 9 ◆ ENTER

Beispiel 4.18 : Der Funktionswert ist gegeben, der Winkel gesucht

Ermittle mit dem Taschenrechner den (spitzen) Winkel α, wenn:

a) sin α = 0,38; **b)** cos α = 0,86; **c)** tan α = 0,53; **d)** cot α = 2,41.

Lösung	TI-30Xa, ecoRS	TI-30X IIB, IIS	Voyage 200 (TI-89)	Ergebnis
Zu **a)**	0 · 38 [illegible] SIN	[illegible] SIN 0 · 38) ENTER=	2ND SIN 0 · 38) ENTER	22,3°
Zu **b)**	0 · 86 [illegible] COS	[illegible] COS 0 · 86) ENTER=	2ND COS 0 · 86) ENTER	30,7°
Zu **c)**	0 · 53 [illegible] TAN	[illegible] TAN 0 · 53) ENTER=	2ND TAN 0 · 53) ENTER	27,9°
Zu **d)**	(1 ÷ 2 · 41) [illegible] TAN	[illegible] TAN 2 · 41 x^{-1}) ENTER=	2ND TAN 2 · 41 2ND 9) ENTER	22,5°

Es handelt sich hier um einfache sogenannte *goniometrische Gleichungen*, die bei entsprechender Definitionsmenge D mehr als eine Lösung besitzen. Dies als ein Hinweis, dass die Anwendung der trigonometrischen Funktionen über Dreiecksberechnungen hinausgeht. Zur Lösung goniometrischer Gleichungen werden die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen verwendet.

Zwischen den Kreisfunktionen gibt es eine Vielzahl von Beziehungen. Mehr darüber sowie über die Kreisfunktionen selbst in "Ingenieur-Mathematik 2".

Aufgaben

4.51 Ermittle aus Abb. 4.81

a) sin φ **b)** cos δ **c)** tan ε **d)** cot ω **e)** cos ω
f) tan φ **g)** cot δ **h)** sin ε **i)** sin δ **j)** cos ε

4.52 Ergänze, ausgehend aus Abb. 4.81:

a) $\frac{h}{u}$ = tan … **b)** $\frac{h}{m}$ = sin … **c)** $\frac{h}{m}$ = cos … **d)** $\frac{u}{h}$ = cot …
e) $\frac{v}{n}$ = sin … **f)** $\frac{v}{n}$ = cos … **g)** $\frac{h}{v}$ = tan … **h)** $\frac{u}{m}$ = sin …

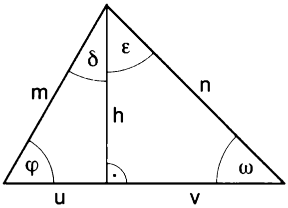


Abb. 4.81

4.53 Zeige, ausgehend von der Erklärung der Kreisfunktionen im rechtwinkligen Dreieck (Abb. 4.82), dass

a) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ **b)** $\sin \alpha = \cos \beta$ **c)** $\cot \alpha = \tan \beta$

d) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ **e)** $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

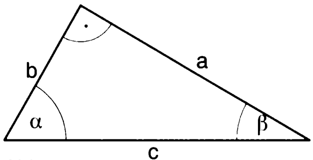


Abb. 4.82

4.54 Skizziere die vier Kreisfunktionswerte für spitze Winkel am Einheitskreis!

4.55 Benütze die Darstellung der Kreisfunktionswerte am Einheitskreis zur Beantwortung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!

a) Ein Sinuswert kann nicht über 1 gehen.

b) Die Sinuswerte nehmen zu, wenn α von 0° bis 90° zunimmt.

c) Ein Tangenswert kann niemals über 1 liegen.

d) Der Kotangens ist 1, wenn α = 45° ist.

e) Ein Kosinuswert kann über 1 liegen.

4.56 Die folgende Tabelle zeigt die vier Kreisfunktionswerte für α = 30°, 45° und 60°. Bestätige die Werte für den Winkel α = 45° und α = 60° mit Hilfe von Abb. 4.83:

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

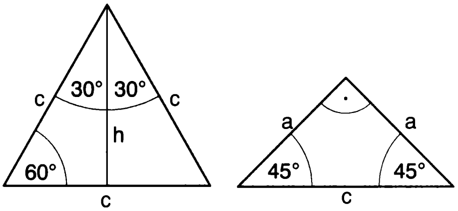


Abb. 4.83

4.57 Berechne mit dem Taschenrechner:

a) sin 33,8° **b)** cos 33,8° **c)** tan 12,4° **d)** cot 12,4°

e) cos 1° **f)** sin 89° **g)** tan 63,3° **h)** cot 72,4°

Kontrolliere durch eine Zeichnung im Einheitskreis.

4.58 Berechne den Winkel α im rechtwinkligen Dreieck, wenn:

a) $\sin \alpha = 0{,}307$ **b)** $\cos \alpha = 0{,}912$ **c)** $\tan \alpha = 0{,}100$ **d)** $\cot \alpha = 0{,}754$

e) $\sin \alpha = 0{,}877$ **f)** $\cos \alpha = 0{,}210$ **g)** $\tan \alpha = 0{,}981$ **h)** $\cot \alpha = 0{,}021$

Kontrolliere durch eine Zeichnung im Einheitskreis!

4.3.2 Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Beispiel 4.19 : Berechnung fehlender Bestimmungsstücke

Vom rechtwinkligen Dreieck in Abb. 4.84 sind die Kathete a = 48,7 cm sowie der ihr gegenüber liegende Winkel α = 34,2° gegeben. Berechne β, b, c, h, p und q.

Lösung

Man kann recht unterschiedlich vorgehen. Teilweise könnten auch der pythagoräische Lehrsatz, der Höhensatz oder der Kathetensatz verwendet werden. Wir machen bevorzugt von den Kreisfunktionen Gebrauch.

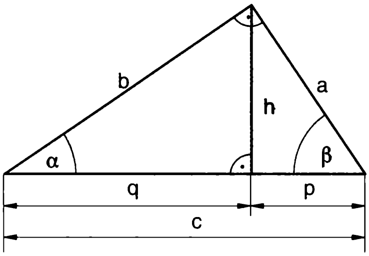


Abb. 4.84

$\beta = 90° - \alpha = 55{,}8°$.

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha} = 71{,}7\text{ cm}$;

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = 86{,}6\text{ cm}$;

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \cdot \sin\alpha = 40{,}3\text{ cm}$;

$\cos\beta = \frac{p}{a} \Leftrightarrow p = a \cdot \cos\beta = 27{,}4\text{ cm}$;

$q = c - p = 59{,}3\text{ cm}$.

Kontrolle durch $c^2 = a^2 + b^2$, $h^2 = p \cdot q$, $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$! Dabei treten bei Verwendung gerundeter Werte erwartungsgemäß kleine Unterschiede auf.

Beispiel 4.20 : Raumdiagonale eines Würfels

Berechne die Länge der Raumdiagonale D eines Würfels mit der Kantenlänge a sowie ihren Neigungswinkel zur Grundfläche.

Lösung

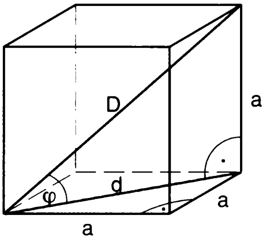


Abb. 4.85

Zweimalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes ergibt:

$d^2 = a^2 + a^2;\ d = a \cdot \sqrt{2}$

$D^2 = d^2 + a^2 = 3\,a^2$

$D = \sqrt{3a^2} = a \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}73 \cdot a;$

$\tan\varphi = \frac{a}{d} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 35{,}3°.$

Beispiel 4.21 : Strecken- und Flächenprojektion

a) Eine Strecke der Länge a wird nach Abb. 4.86 normal *auf eine Gerade g* projiziert ("geworfen"). Der Winkel zwischen a und g ist gleich φ.

b) Eine Fläche vom Inhalt A wird nach Abb. 4.87 normal *auf eine Bildebene* projiziert. Berechne den Inhalt der projizierten Fläche, wenn φ der Neigungswinkel der Fläche zur Bildebene ist.

c) Berechne den Flächeninhalt des in Abb. 4.88 dargestellten Walmdaches, dessen vier Dachflächen gleiche Neigung besitzen. Maße: a = 20,0 m; b = 10,0 m; h = 3,0 m.

Lösung

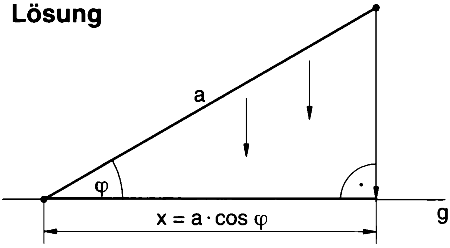


Abb. 4.86 Streckenprojektion

Zu **a)**:

$\cos\varphi = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cdot \cos\varphi$

Die Länge der Strecke ist **mit dem Faktor cos φ zu multiplizieren**. Dieser Sachverhalt kann bei geometrischen Berechnungen öfter vorteilhaft angewendet werden. In Abb. 4.84 ist etwa p die Projektion von a *auf* die Seite c; damit ist p = a · cos β.

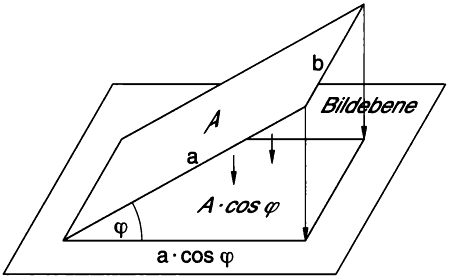


Abb. 4.87 Flächenprojektion

Zu **b)**:

Der Inhalt des projizierten Rechtecks ist gleich $(a \cdot \cos\varphi) \cdot b = a \cdot b \cdot \cos\varphi$. D. h. auch der **Flächeninhalt A ist mit dem Faktor cos φ zu multiplizieren**.

Dies gilt sogar für beliebig gestaltete Flächen, wenn nur der Neigungswinkel φ zur Bildebene stets gleich ist.

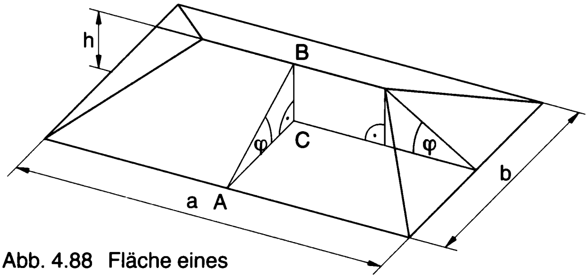


Abb. 4.88 Fläche eines Walmdaches

Zu **c)**:

Berechnung des Neigungswinkels φ aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$\tan\varphi = \frac{h}{\frac{b}{2}} = \frac{3,0}{5,0} = 0,60$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 31,0^\circ$$

Ist A die gesuchte Dachfläche, so gilt:

$A \cdot \cos\varphi = a \cdot b = 200\ \text{m}^2$; daraus:

$$A = \frac{a \cdot b}{\cos\varphi} = 233\ \text{m}^2.$$

Beispiel 4.22 : Steigung einer Rampe, Kräfteberechnung

Ein Wagen mit einem Gewicht von 1,60 kN steht auf einer Rampe (Abb. 4.89).

Berechne die Steigung der Rampe, ihren Steigungswinkel α, die Normalkraft F_N und die Hangabtriebskraft F_H, wenn $h = 9,2$ m und $s = 31,4$ m ist.

Lösung

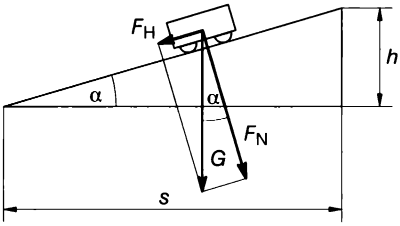


Abb. 4.89

Die Steigung k einer schiefen Ebene (einer Rampe, einer Straße und dgl.) ist definiert als:

$$k = \frac{\text{Höhenunterschied } h}{\text{Horizontalunterschied } s}.$$

somit: $k = \frac{h}{s} = 0,29 = 29 \cdot \frac{1}{100} = 29\,\%$.

$\tan\alpha = \frac{h}{s} = 0,29 \Rightarrow \alpha = 16^\circ$.

$\cos\alpha = \frac{F_N}{G} \Leftrightarrow F_N = G \cdot \cos\alpha = 1,54$ kN.

Erkennt man F_N als Projektion von G auf die Normale zur schiefen Ebene, ist man etwas schneller.

$\sin\alpha = \frac{F_H}{G} \Leftrightarrow F_H = G \cdot \sin\alpha = 0,44$ kN.

Kontrolle durch den pythaogräischen Lehrsatz: $F_H^2 + F_N^2 = G^2$.

Beispiel 4.23 : Vermessungsaufgabe

Es soll nach Abb. 4.90 der horizontale Abstand x zweier Punkte A und B im Gelände bestimmt werden. Dazu wird im Punkt B eine Messlatte der Länge a = 2,00 m senkrecht aufgestellt. In A werden die "Höhenwinkel" zum unteren und oberen Ende der Messlatte gemessen: $\alpha = 15{,}8°$ und $\beta = 14{,}2°$. Berechne x!

Lösung

Wir führen als Hilfsgröße den Höhenunterschied h zwischen A und B ein. Dann gilt:

$\tan\alpha = \frac{a+h}{x}$ und $\tan\beta = \frac{h}{x}$;

aus der zweiten Gleichung wird nun die Hilfsgröße h ausgerechnet, dafür in die erste Gleichung eingesetzt und diese sodann nach x aufgelöst:

$$h = x \cdot \tan\beta;$$

$$\tan\alpha = \frac{a + x \cdot \tan\beta}{x}$$

$$x \cdot \tan\alpha = a + x \cdot \tan\beta$$

$$x(\tan\alpha - \tan\beta) = a$$

$$x = \frac{a}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{2\text{ m}}{\tan 15{,}8° - \tan 14{,}2°} = 66{,}8\text{ m}.$$

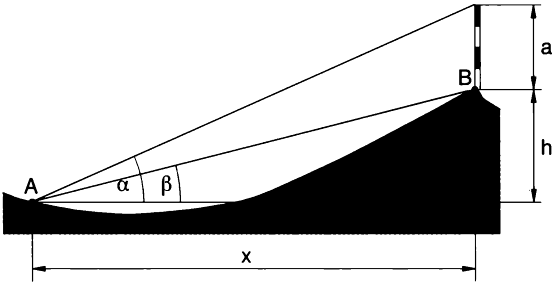


Abb. 4.90 Horizontalabstand x = ?

Aufgaben

4.59 Berechne Höhe, Fläche und Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis 48 cm und dem Basiswinkel $\alpha = 55°$.

4.60 Welchen (spitzen) Winkel schließen die Diagonalen eines Rechtecks mit den Seiten 28 cm und 18 cm ein?

4.61 Eine Straße hat 14% Steigung. Wie groß ist der Steigungswinkel?

4.62 Eine Bahnstrecke hat eine Steigung von 1 : 200. Gib die Steigung in Prozent an! Wie groß ist der Steigungswinkel?

4.63 In großer Entfernung sieht man die beiden Scheinwerfer eines PKW als einen einzigen Lichtfleck. Erst wenn die vom Auge eines Beobachters zu den beiden Scheinwerfern gezogenen Strahlen einen Winkel von etwa einer Bogenminute ($= \frac{1}{60}°$) einschließen, erkennt dieser zwei Scheinwerfer. In welcher Entfernung vom Beobachter tritt dies ein, wenn die Scheinwerfer eines PKW einen Abstand von 1,50 m haben?

4.64 Ein 8 m hoher Fahnenmast wirft auf ebenem Gelände einen Schatten von 12,5 m. Berechne den Höhenwinkel der Sonne (Neigungswinkel der Sonnenstrahlen zur Horizontalen).

4.65 Ein Ballon ist mit einem 300 m langen Seil mit dem Erdboden verbunden. In welcher Höhe befindet sich der Ballon, wenn windbedingt das Seil einen Winkel von 70° mit dem Erdboden bildet?

4.66 Zwei Kräfte $F_1 = 1{,}18$ kN und $F_2 = 2{,}25$ kN stehen normal aufeinander. Berechne ihre Resultierende R und den Winkel zwischen R und F_1.

4.67 Eine Kraft R = 6,30 kN soll in zwei aufeinder normal stehende Richtungen zerlegt werden. Mit der einen Richtung schließt sie einen Winkel von 32° ein. Berechne die Kräfte in den beiden Richtungen!

4.68 Ein Keil (Abb. 4.91) mit dem Winkel α wird durch eine Kraft F = 1,2 kN in ein Holzstück geschlagen. Berechne die für die Spaltung verantwortlichen Kräfte F_N.

a) allgemein, **b)** für α = 25°, **c)** für α = 10°.

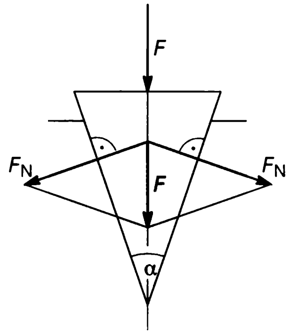


Abb. 4.91

4.69 Welche Größe hat ein Satteldach eines Hauses, das einen rechteckigen Grundriss mit 12,0 m Länge und 9,0 m Breite besitzt, wenn der Neigungswinkel der Dachfläche zur Waagrechten 48° beträgt?

4.70 Abb. 4.92 zeigt den Grundriss eines Walmdaches mit der Dachhöhe h = 6,0 m. Berechne die beiden auftretenden Neigungswinkel der Dachflächen sowie die Größe der gesamten Dachfläche.

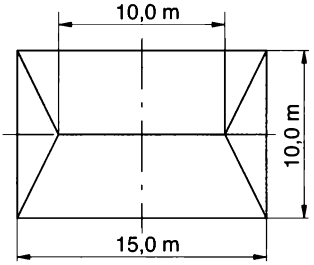


Abb. 4.92

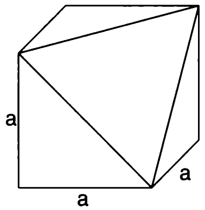


Abb. 4.93

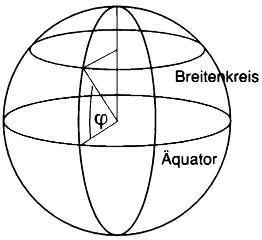


Abb. 4.94

4.71 Von einem Würfel der Kantenlänge a wird nach Abb. 4.93 eine Ecke abgetrennt. Welchen Neigungswinkel besitzt die Schnittfläche zur Grundfläche?

4.72 Auf welcher geographischen Breite φ (Abb. 4.94) würde ein parallel zum Äquator durchgeführte Rundreise um die Erde (also auf einem Breitenkreis) halb so lang wie am Äquator sein?

4.73 Um die Höhe eines Mastens (Abb. 4.95) auf ebenem Gelände zu bestimmen, misst man in einem Punkt A den Höhenwinkel α = 23,4°. Danach bewegt man sich 5,0 m in gerader Linie auf den Masten zu und misst dort (Punkt B) den Höhenwinkel β = 31,8°. Berechne die Masthöhe!

4.74 Abb. 4.96 zeigt den Lichtdurchgang durch eine Glasplatte der Dicke d = 28 mm. Berechne die seitliche Versetzung s des Lichtstrahls, wenn α = 58° und β = 32° ist.

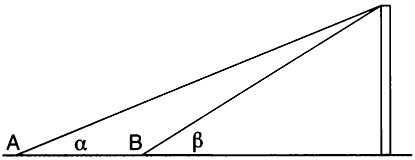


Abb. 4.95

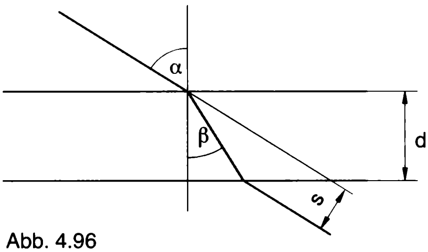


Abb. 4.96

4.4 Geradlinig begrenzte Figuren

4.4.1 Vierecke

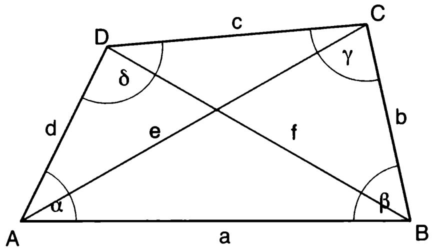


Abb. 4.97 Allgemeines Viereck

Bezeichnungen des allgemeinen Vierecks (Abb. 4.97):

Die Eckpunkte A, B, C und D sowie die Seiten a, b, c, d und die Winkel α, β, γ und δ folgen im Gegenuhrzeigersinn aufeinander.

Die *Diagonalen* e, f verbinden zwei nicht benachbarte Eckpunkte. Wir beschränken uns auf *konvexe* Vierecke; das sind solche, bei denen wie in Abb. 4.97 *beide* Diagonalen im Inneren des Vierecks liegen. Damit sind Vierecke mit einer "einspringenden" Ecke ausgeschlossen.

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ}$ **Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.**

Der Beweis dieser Behauptung folgt sofort, wenn man das Viereck durch Ziehen einer Diagonalen in zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite zerlegt.

Um ein Viereck zeichnen zu können, sind **fünf Bestimmungsstücke** (darunter mindestens eine Länge) nötig.

Denn für jedes Dreieck, in das man ein Viereck durch Ziehen einer Diagonalen zerlegen kann, sind drei Bestimmungsstücke nötig, zusammen also sechs Stücke. Da die beiden Dreiecke aber eine Seite gemeinsam haben, genügen fünf Bestimmungsstücke.

Beispiel 4.24 : Flächeninhalt eines allgemeinen Vierecks

Berechne den Flächeninhalt des allgemeinen Vierecks mit
$a = 5{,}00$ dm; $b = 3{,}00$ dm; $c = 3{,}00$ dm; $d = 4{,}00$ dm; $e = 4{,}50$ dm.

Lösung

Wir wenden die Heronsche Formel auf die Teildreiecke ABC und ACD an:

Dreieck ABC:

$s = \frac{a+b+e}{2} = 6{,}25\text{ dm}; \quad A_1 = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-e)} = 6{,}67\text{ dm}^2.$

Dreieck ACD:

$s = \frac{e+c+d}{2} = 5{,}75\text{ dm}; \quad A_2 = \sqrt{s \cdot (s-e)(s-c)(s-d)} = 5{,}88\text{ dm}^2.$

Viereck ABCD:

$A = A_1 + A_2 = 12{,}5\text{ dm}^2$ (gerundet auf drei geltende Ziffern).

Besondere Vierecke:

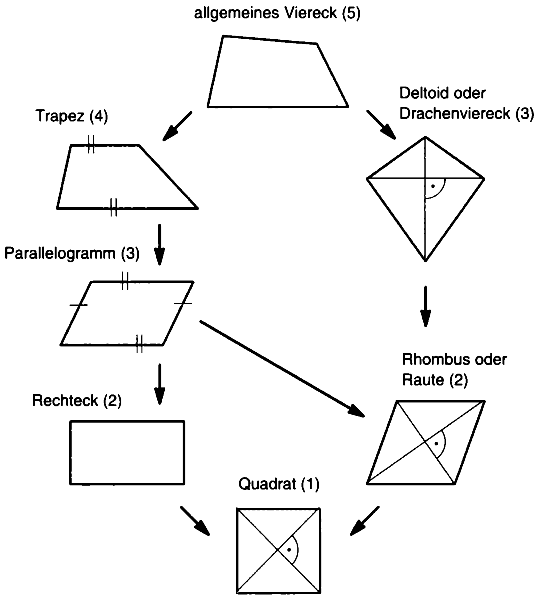


Abb. 4.98 Besondere Vierecke

Abb. 4.98 zeigt eine Übersicht über die Sonderfälle von Vierecken. In Klammern ist die Anzahl der nötigen Bestimmungsstücke angeführt. Alle Eigenschaften eines besonderen Vierecks gelten auch für alle Vierecke darunter, wenn man den Pfeilen folgt!

So sind etwa Rhombus und Rechteck besondere Trapeze! Die Eigenschaft normal aufeinander stehender Diagonalen überträgt sich vom Deltoid auf Rhombus und Quadrat.

Im Folgenden sind kurz kennzeichnende Eigenschaften der besonderen Vierecke angeführt. Zusätzlich ist der Flächeninhalt angegeben; dieser ergibt sich für Trapez, Parallelogramm, Rhombus und Deltoid aus der Zerlegung in zwei Dreiecke.

Trapez	Viereck mit (mindestens) zwei parallelen Seiten, deren Abstand Höhe genannt wird; ist b = d, so heißt das Trapez **gleichschenklig**.	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wenn a und c die Längen der parallelen Seiten sind und h die Trapezhöhe ist.
Parallelogramm	Viereck mit zwei Paaren von parallelen Seiten	$A = a \cdot h_a$ "Grundseite mal Höhe"
Rhombus oder **Raute**	Vier gleich lange Seiten; die Diagonalen stehen normal aufeinander.	$A = \frac{1}{2} e \cdot f$
Rechteck	Vier gleich große Winkel (also ist jeder Winkel ein rechter Winkel)	$A = a \cdot b$
Quadrat	Alle Seiten sind gleich lang und alle Winkel gleich groß.	$A = a^2$
Deltoid oder **Drachenviereck**	Je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang; die Diagonalen stehen normal aufeinander.	$A = \frac{1}{2} e \cdot f$

Beispiel 4.25 : Trapez

Berechne die Höhe h sowie den Flächeninhalt A des Trapezes in Abb. 4.99 mit folgenden Seiten: a = 11,00 dm; b = 4,00 dm; c = 5,00 dm; d = 6,00 dm.

Lösung

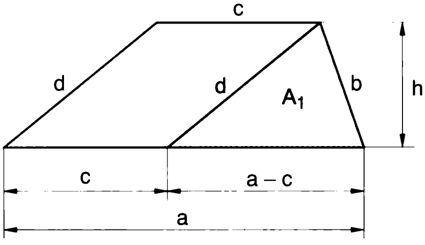


Abb. 4.99

Wir berechnen zuerst mit der Heronschen Flächenformel die Dreiecksfläche A_1; daraus wird die Dreieckshöhe h bestimmt, die auch die Trapezhöhe ist:

$a - c = 6{,}00\,\text{dm}$; $s = \frac{(a-c)+b+d}{2} = 8{,}00\,\text{dm}$;

$A_1 = \sqrt{8 \cdot (8-6)(8-4)(8-6)}\,\text{dm}^2 = 11{,}3\,\text{dm}^2$;

$A_1 = \frac{(a-c)\cdot h}{2} \Leftrightarrow h = \frac{2\cdot A_1}{a-c} = 3{,}77\,\text{dm}.$

Nun kann die Trapezflächenformel verwendet werden: $A = \frac{(a+c)}{2} \cdot h = 30{,}2\,\text{dm}^2$.

Beispiel 4.26 : Parallelogramm

Berechne den Flächeninhalt A sowie die Diagonale e des Parallelogrammes in Abb. 4.100 mit a = 6,00 dm; b = 4,00 dm und α = 55,0°.

Lösung

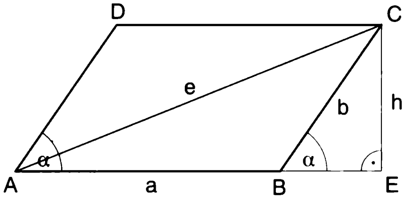


Abb. 4.100

Rechtwinkliges Dreieck BEC:

$\sin\alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \cdot \sin\alpha = 3{,}28\,\text{dm}$;

$A = a \cdot h = 19{,}7\,\text{dm}^2$.

e ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AEC:

$e^2 = \overline{AE}^2 + h^2$; $\overline{AE} = a + \overline{BE}$;

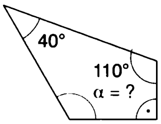
$\cos\alpha = \frac{\overline{BE}}{b} \Leftrightarrow \overline{BE} = b \cdot \cos\alpha = 2{,}29\,\text{dm}$;

$e = 8{,}92\,\text{dm}$.

Aufgaben

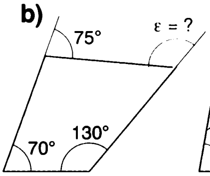
4.75 Berechne den fehlenden Winkel:

a)



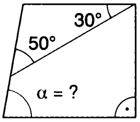
Allgemeines Viereck

b)



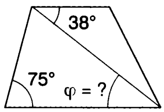
Allgemeines Viereck

c)



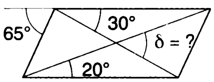
Trapez

d)



Trapez

e)



Parallelogramm

4.76 Gegeben ist ein allgemeines Viereck. Berechne seinen Flächeninhalt:
a = 7,40 cm; b = 4,60 cm; c = 3,50 cm; d = 3,50 cm; δ = 70,0°.

4.77 Gegeben ist ein Trapez. Berechne Flächeninhalt und Höhe (Längen millimetergenau)!

a) a = 9 dm; b = 5 dm; c = 3,2 dm; γ = 120,0°.

b) a = 5,1 dm; c = 7 dm; d = 3,5 dm; β = 90,0°.

c) a = 6 dm; b = 3,5 dm; c = 2,7 dm; d = 4,2 dm.

4.78 Der Querschnitt eines Abwasserkanals ist ein gleichschenkliges Trapez. Die Kanalsohle hat eine Breite von 2,5 m; die beiden Ufer haben einen Abstand von 7,0 m; die Kanaltiefe ist 3,8 m. Wie viel Prozent des gesamten Kanalquerschnittes sind bei einem Wasserstand gleich der halben Kanaltiefe ausgefüllt?

4.79 Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a = 42,0 cm wird durch eine Gerade in zwei Flächen zerlegt. Die Gerade ist eine Parallele zu einer der Dreiecksseiten und geht durch den Schwerpunkt. Berechne den Inhalt des dabei entstehenden gleichschenkligen Trapezes.

4.80 Von einem Deltoid sind die Seiten a = 12,0 cm und b = 21,0 cm sowie der zwischen den kurzen Seiten liegende Winkel α = 100° bekannt. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

4.81 Berechne – sofern nicht gegeben – die Seiten, Diagonalen und den Flächeninhalt des folgenden Parallelogramms (Längen millimetergenau):

a) a = 8 dm; b = 5 dm; f = 6 dm.
b) b = 10 dm; e = 14 dm; ß = 110,0°.
c) a = 9 dm; b = 5 dm; α = 70,0°.
d) a = 12 dm; b = 7 dm; h = 5 dm.

4.82 Die Seitenmittelpunkte eines Rechtecks sind die Eckpunkte eines Vierecks. Berechne dessen Umfang und Flächeninhalt, wenn die Rechteckseiten 8,00 cm und 5,00 cm betragen.

4.83 Die eine Diagonale einer Raute ist gleich lang wie eine Seite a. Berechne Höhe und Flächeninhalt!

4.84 Aus einem rechteckigen Grundstück soll nach Abb. 4.101 ein 93,0 m breiter Streifen für eine Betriebsgründung abgelöst werden. Wie groß ist der prozentuelle Verlust des Grundbesitzers?

4.85 Aus einer rechteckigen Fläche (a = 6 dm und b = 3 dm, millimetergenau) ist eine Raute nach Abb. 4.102 herauszuschneiden. Berechne deren Seite x und den Schnittabfall A.

4.86 Auf welche Höhe verringert sich das Scherengitter der Abb. 4.103, wenn seine Länge auf 5,00 m vergrößert wird?

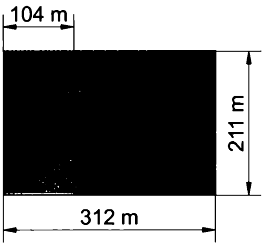


Abb. 4.101

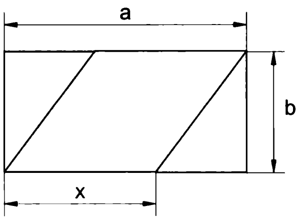


Abb. 4.102

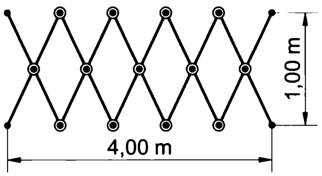


Abb. 4.103

4.87 Der Grundriss eines rechteckigen Hauses mit den Längen 16,0 m und 9,9 m ist inhaltsgleich einem solchen mit quadratischem Grundriss. Wie verhalten sich die Umfänge der beiden Häuser?

4.88 Einem Kreis mit dem Radius r ist ein Quadrat eingeschrieben sowie ein zweites umgeschrieben. Wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

4.4.2 Vielecke

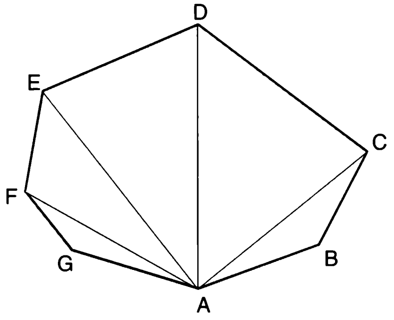


Abb. 4.104 Unregelmäßiges konvexes Polygon

Abb. 4.104 zeigt als Beispiel eines **Vielecks** oder **Polygons** ein unregelmäßiges Siebeneck. Da es keine einspringenden Ecken besitzt, ist es ein *konvexes* Polygon.

Durch Ziehen aller Diagonalen von einem Eckpunkt zerlegt man das Polygon in Dreiecke; in unserem Fall sind es fünf Dreiecke. In einem konvexen Polygon mit n Ecken sind es n – 2 Dreiecke. In jedem Dreieck ist die Winkelsumme 180°, daher gilt allgemein: Die Winkelsumme in einem (konvexen) n-Eck beträgt $(n - 2) \cdot 180°$.

In der Praxis treten häufig auch nichtkonvexe Vielecke auf.

Der Flächeninhalt eines allgemeinen Vielecks kann durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke oder Trapeze ermittelt werden.

Beispiel 4.27 : Flächeninhalt eines Polygons

Berechne die Fläche des in Abb. 4.105 dargestellten Blechstücks (Maße in mm).

Lösung

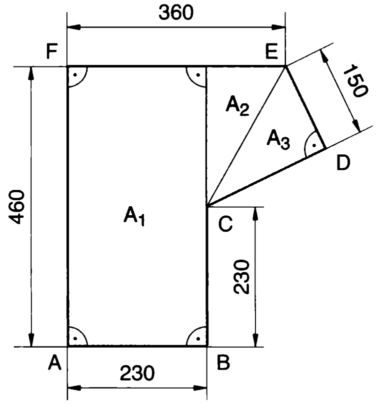


Abb. 4.105

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = 230\text{ mm} \cdot 460\text{ mm} = 10{,}6\text{ dm}^2.$

$A_2 = \frac{130\text{ mm} \cdot 230\text{ mm}}{2} = 1{,}50\text{ dm}^2.$

$A_3 = \frac{1}{2}\,\overline{CD} \cdot 150\text{ mm}\;;$

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{EC}^2 - (150\text{ mm})^2};$

$\overline{EC}^2 = (130\text{ mm})^2 + (230\text{ mm})^2;\ \overline{EC} = 264\text{ mm};$
damit:

$\overline{CD} = 217\text{ mm}$ und $A_3 = 1{,}63\text{ dm}^2.$

Schließlich: $A = 13{,}7\text{ dm}^2.$

Anmerkungen:

(1) Zur Berechnung des Flächeninhaltes sind auch andere Vorgangsweisen möglich.

(2) Die Zwischenergebnisse wurden zur Kontrolle angeschrieben. Gerechnet wird immer mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit; das Endergebnis wird sinnvoll gerundet.

(3) Eine schnelle Rechenkontrolle kann darin bestehen, daß man um das Polygon ein Rechteck mit den Seiten 460 mm und 360 mm legt. Sein Flächeninhalt gibt einen Richtwert für die verlangte Fläche!

Beispiel 4.28 : Flächeninhalt eines Polygons

Berechne den Querschnitt der in Abb. 4.106 gezeichneten "Schwalbenschwanzführung" (Maße in mm, auf Zehntel genau).

Lösung

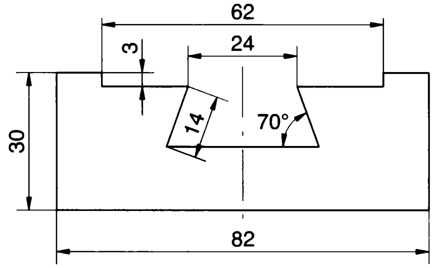


Abb. 4.106

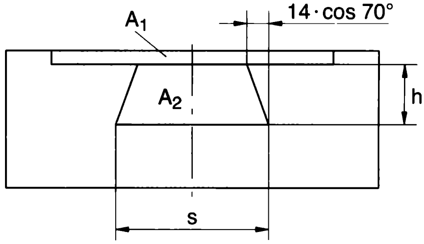


Abb. 4.107

Hier rechnet man leichter, wenn man die gesuchte Fläche als Restfläche betrachtet; man zieht nach Abb. 4.107 von einer Rechtecksfläche $A_{Rechteck}$ die Flächen A_1 und A_2 ab:

$A_{Rechteck} = 82\ \text{mm} \cdot 30\ \text{mm} = 24{,}6\ \text{cm}^2$;
$A_1 = 3\ \text{mm} \cdot 62\ \text{mm} = 186\ \text{mm}^2 = 1{,}86\ \text{cm}^2$;

Berechnung von A_2 (Fläche eines gleichschenkligen Trapezes):
Grundlinie $s = 24\ \text{mm} + 2 \cdot 14\ \text{mm} \cdot \cos 70° = 33{,}6\ \text{mm}$; Höhe $h = 14\ \text{mm} \cdot \sin 70° = 13{,}2\ \text{mm}$.

$A_2 = \frac{24\ \text{mm} + s}{2} \cdot h = 3{,}79\ \text{cm}^2$.

Somit: $A = A_{Rechteck} - A_1 - A_2 = 19{,}0\ \text{cm}^2$.

Regelmäßige Vielecke

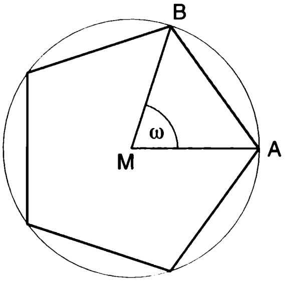


Abb. 4.108

Ein Vieleck heißt **regelmäßig**, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind. Jedem regelmäßigen Vieleck kann ein Umkreis und ein Inkreis eingeschrieben werden.

Verbindet man (Abb. 4.108) zwei benachbarte Eckpunkte A und B mit dem Mittelpunkt M (des Um- oder Inkreises), so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, das sogenannte **Bestimmungsdreieck** MAB des regelmäßigen Vielecks. Der Mittelpunktswinkel ω beträgt den n-ten Teil von 360°, wobei n die Eckenanzahl des regelmäßigen Vielecks ist.

Beispiel 4.29 : Regelmäßiges Fünfeck (Pentagon)

Einem Kreis mit dem Radius r = 12,0 cm ist ein regelmäßiges Fünfeck einzuschreiben. Berechne seine Seite s sowie sein Fläche. Führe die Rechnung zuerst allgemein.

Lösung

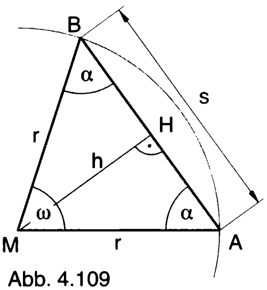


Abb. 4.109

In Abb. 4.109 ist das Bestimmungsdreieck MAB eines regelmäßigen Fünfecks aus Abb. 4.108 gezeichnet. Es gilt:

$\omega = \frac{360°}{5} = 72°$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck MAH entnimmt man:

$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{s}{2r} \quad \Leftrightarrow \quad s = 2\,r \cdot \sin\frac{\omega}{2}$

$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{h}{r} \quad \Leftrightarrow \quad h = r \cdot \cos\frac{\omega}{2}$

$A = 5 \cdot \frac{s\,h}{2} = 5\,r^2 \cdot \sin\frac{\omega}{2} \cdot \cos\frac{\omega}{2} = 342\ \text{cm}^2$.

Fraktale

Üblicherweise sagt man, dass ein Punkt die Dimension 0, eine Linie die Dimension 1, eine Ebene die Dimension 2 hat und dass wir im dreidimensionalen Raum leben. Es gibt aber auch geometrische Gebilde, denen man eine Dimension geben kann, die nicht ganzzahlig ist. Sie besitzen gewissermaßen eine "gebrochene" Dimension. Solche geometrische Gebilde werden deshalb **Fraktale** genannt (fractus, lat., gebrochen). Das folgende Beispiel zeigt, wie man schrittweise eine geometrische Figur erhält, dessen Rand ein Fraktal ist: der Rand ist so stark zerknittert, dass er "zwischen" Linie und Fläche liegt!

1. Schritt: Die Ausgangsfigur ist ein gleichseitiges Dreieck nach Abb. 4.110.
2. Schritt: Teile jede Strecke der Abb. 4.110 in drei gleich lange Teilstrecken und ersetze das mittlere Stück durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundseite. Man erhält die Figur in Abb. 4.111.
3. Schritt: Wieder wird jede Strecke der Abb. 4.111 in drei gleich lange Teilstrecken geteilt und durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Grundseite ersetzt. Man erhält die Figur in Abb. 4.112.

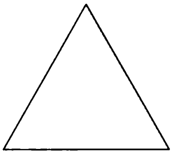


Abb. 4.110

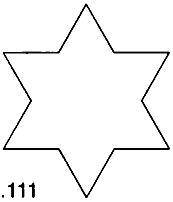


Abb. 4.111

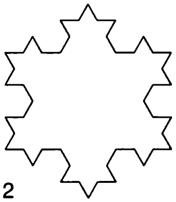


Abb. 4.112

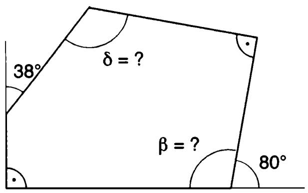
Auf diese Weise fährt man unbegrenzt fort. Die Randlinie wird dabei immer zerknitterter; im Grenzfall hat der Rand die fraktale Dimension 1,26, was ohne Begründung angegeben wird. Die so entstandene Figur wird Kochsche[10] Schneeflocke genannt.

Wenn die Seite des gleichseitigen Dreiecks in Abb. 4.110 gleich 1 m wäre, so ist sein Umfang 3 m. Der Umfang der Figur in Abb. 4.111 ist $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)$ m (überlege dies!) und jener in Abb. 4.112 ist $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$ m $\approx$ 5,33 m. Mit fortschreitender Zerknitterung steigt der Umfang, wie man überlegen kann, über alle Grenzen; wollte man versuchen, die Kochsche Schneeflocke entlang ihres Randes zu umgehen, so würde man "ewig" unterwegs sein; ihr Umfang ist unendlich (obwohl ihr Flächeninhalt dies offenbar nicht ist)! Fraktale stehen in einem engen Zusammenhang mit der sogenannten Chaostheorie, einem aktuellen Gebiet in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

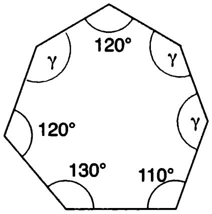
Aufgaben

4.89 Berechne die gesuchten Winkel:

a)

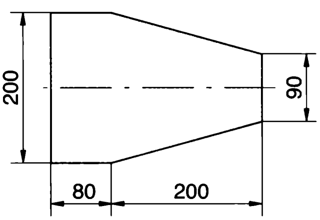


b) $\gamma = ?$

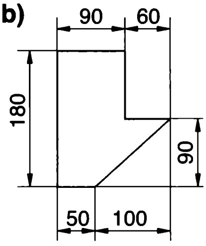


4.90 Ermittle den Inhalt folgender Flächen (Maße in mm):

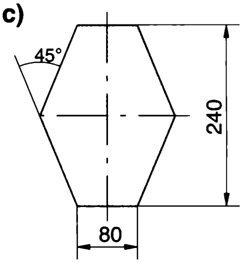
a)



b)



c)

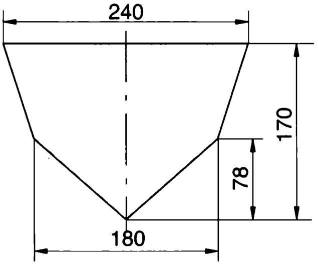


---

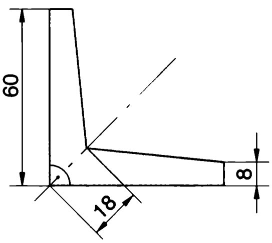
[10] Helge von KOCH, schwedischer Mathematiker, 1870 – 1924

4.91 Ebenso:

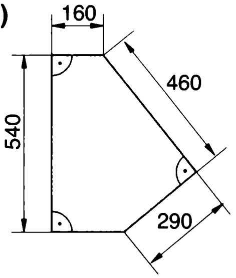
a)



b)

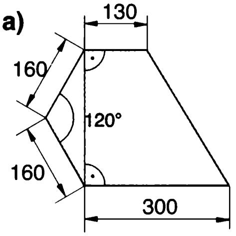


c)

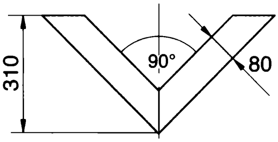


4.92 Ebenso:

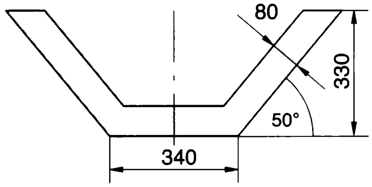
a)



b)

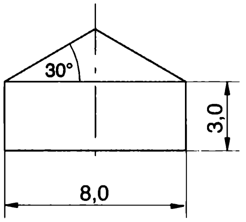


c)

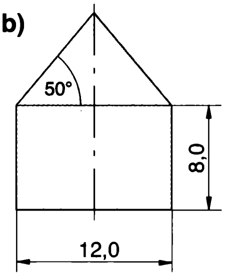


4.93 Ermittle den Flächeninhalt der folgenden Wandflächen (Maße in m):

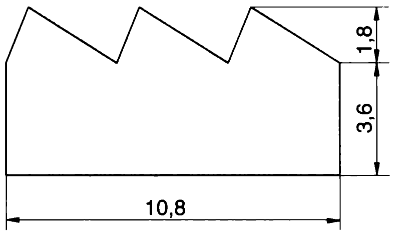
a)



b)



c)



4.94 Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Eckenmaß e (= Umkreisdurchmesser) und der Schlüsselweite s (= Inkreisdurchmesser) einer

a) Vierkantmutter (Abb. 4.113), **b)** Sechskantmutter (Abb. 4.114)?

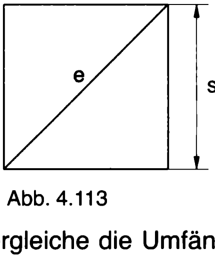


Abb. 4.113

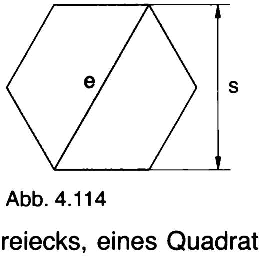


Abb. 4.114

4.95 Vergleiche die Umfänge eines gleichseitigen Dreiecks, eines Quadrates und eines regelmäßigen Sechsecks, die alle den gleichen Flächeninhalt 60,0 cm^2 haben.

4.96 Eine quadratische Fläche der Seite a = 32,0 cm wird durch Abschrägen der Ecken in ein regelmäßiges Achteck übergeführt. Wie viel Prozent der ursprünglichen Fläche fällt weg?

4.97 Eine Maueröffnung für ein Fenster hat die Form eines regelmäßigen Sechsecks der Seitenlänge 82 cm. Für den Fensterrahmen werden 8,0 cm benötigt. Wie groß ist der verbleibende Inhalt der lichten Öffnung?

4.98 Ein Zierblech hat die Form eines regelmäßigen Zwölfecks mit dem Flächeninhalt 432 cm^2. Berechne seine Seite.

4.99 Einem Kreis mit dem Radius r = 12,0 cm wird ein regelmäßiges Achteck ein- und umgeschrieben. Berechne deren Flächeninhalte.

Im Überblick: Geradlinig begrenzte Figuren ●

Viereck: Fünf Bestimmungsstücke, davon mindestens eine Länge; die Winkelsumme ist 360°.

Besondere Vierecke: siehe Seite 149.

Vieleck (Polygon): Die Winkelsumme ist (n – 2) · 180°, wenn n die Eckenanzahl des (konvexen) Vielecks ist.

4.5 Kreis und Kreisteile

4.5.1 Allgemeines

Ein **Kreis** ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben. M heißt **Mittelpunkt**, r **Radius** des Kreises.
Die Verbindungsstrecke (Abb. 4.115) zweier Kreispunkte A und B heißt **Sehne**. Jede Sehne durch den Kreismittelpunkt heißt **Durchmesser**. Ein Durchmesser ist doppelt so lang wie der Radius: d = 2r.

Anmerkung: Die Wörter "Sehne", "Radius" und "Durchmesser" sowie deren Bezeichnungen s, r und d werden sowohl für die Strecken als auch deren Längen verwendet.

Durch die Randpunkte A und B zerfällt der Kreis in zwei **Kreisbögen**. In Abb. 4.115 ist der kürzere dieser beiden Bögen angeführt.

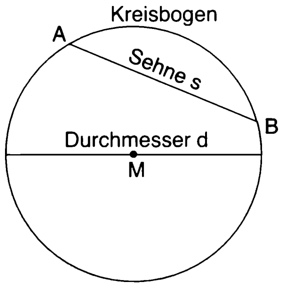


Abb. 4.115 Bezeichnungen

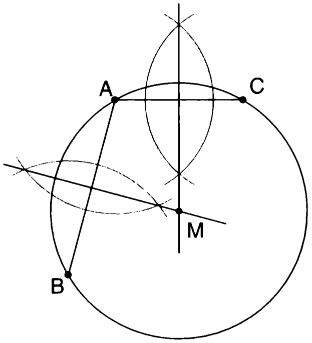


Abb. 4.116 Kreis durch 3 Punkte

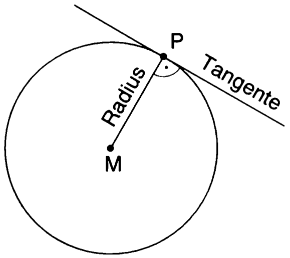


Abb. 4.117 Tangente und Radius

Der Kreismittelpunkt liegt auf der Streckensymmetralen einer beliebigen Sehne. Ein Kreis ist durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte festgelegt. Soll aus drei solchen Punkten A, B und C der Kreismittelpunkt konstruiert werden (Abb. 4.116), so zeichnet man für zwei Sehnen, etwa AB und AC, die Streckensymmetralen, die einander im Kreismittelpunkt schneiden. Der Kreis ist der Umkreis des durch A, B und C gebildeten Dreiecks.
Tangente und Radius zum Tangentenberührpunkt P **stehen normal aufeinander** (Abb. 4.117).

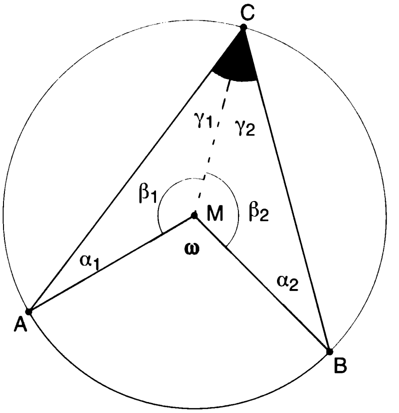


Abb. 4.118 Peripheriewinkelsatz

Wir betrachten den Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ (Abb. 4.118).

$\omega = \angle AMB$ Zentri- oder Mittelpunktswinkel über $\overset{\frown}{AB}$

$\gamma = \angle ACB$ Peripherie- oder Randwinkel über $\overset{\frown}{AB}$

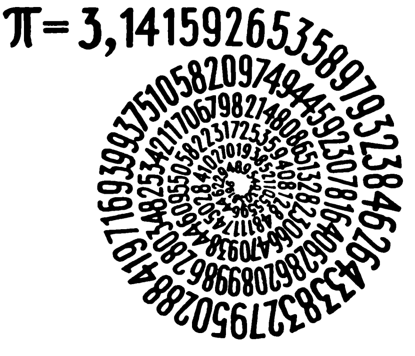
Zu jedem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ gibt es unbegrenzt viele Peripheriewinkel. Über ihre Größe gibt es eine bemerkenswerte Aussage:

> **Peripheriewinkelsatz:**
> Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß; und zwar halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

Beweis: Wir zeigen, dass ein *beliebig* gezeichneter Peripheriewinkel $\gamma = \angle ACB$ gleich dem halben Zentriwinkel ω ist. Da die Dreiecke AMC und BCM gleichschenklig sind, gilt: $\alpha_1 = \gamma_1$ und $\alpha_2 = \gamma_2$. Aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke folgt: $\beta_1 = 180° - 2 \cdot \gamma_1$ und $\beta_2 = 180° - 2 \cdot \gamma_2$. Nun ist $\beta_1 + \beta_2 + \omega = 360°$; setzen wir hier für β_1 und β_2 ein, so erhalten wir schließlich $\omega = 2 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 = 2 \cdot \gamma$ oder $\gamma = \frac{\omega}{2}$.

Eine besondere Situation tritt auf, wenn der Kreisbogen gleich dem halben Kreisumfang ist. Dann ist $\omega = 180°$ und $\gamma = 90°$; der Peripheriewinkelsatz wird zum Satz von Thales!

4.5.2 Berechnungen am Kreis



Die Länge des Kreisumfanges U sowie den Kreisflächeninhalt A kann man durch die Umfänge bzw. Flächeninhalte eines ein- und umgeschriebenen Sechseckes, Zwölfeckes, usw. beliebig genau eingrenzen. Dabei zeigt sich, dass für jeden Kreis das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser $\frac{U}{d}$ gleich ist. Dieses Verhältnis wird **Kreiszahl π** genannt.

Für technische Berechnungen genügt im Allgemeinen: **$\pi = 3{,}14$.**

Weiters zeigt sich, dass $A = \frac{U}{2} \cdot r$ ist. Somit:

> **Kreisumfang** $U = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$; **Kreisflächeninhalt** $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$.

Quadratur des Kreises:

Es kann gezeigt werden, dass die Kreiszahl π eine irrationale Zahl ist, also eine Angabe ihres Wertes durch eine Dezimalzahl immer nur eine Näherung ist. Sie lässt sich nicht einmal durch noch so umfangreiche Wurzelausdrücke darstellen; dies bedeutet aber, dass es unmöglich ist, eine Strecke mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, die exakt gleich dem Kreisumfang ist, oder auch ein Quadrat mit *diesen* beiden Hilfsmitteln zu zeichnen, das gleichen Flächeninhalt wie ein gegebener Kreis besitzt. Diese letztere Aufgabe wird als "Quadratur des Kreises" bezeichnet. Im übertragenen Sinn steht die Wendung "Quadratur des Kreises" für ein unlösbares Problem.

Die Kreiszahl π gilt als eine der wichtigsten Zahlen der Mathematik. Der Erste, der sich systematisch mit ihr beschäftigte, war Archimedes[11].

Beispiel 4.30 : Kreisumfang und Kreisfläche

Zwei Wasserrohre mit den (Innen-)Durchmessern d = 10,0 cm sollen durch ein einziges Rohr ersetzt werden, das die gleiche Wassermenge führen kann.

a) Berechne dessen Durchmesser D!

b) Wie verhält sich die Summe der Umfänge der kleineren Rohre zum Umfang des neuen Rohres? Wie viel Prozent beträgt die Materialersparnis?

Lösung

Zu **a)**

$$\frac{\pi}{4} \cdot d^2 + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

$$2d^2 = D^2$$

$$D = d\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ cm.}$$

Zu **b)**

$$(\pi d + \pi d) : \pi D = 2\pi d : (\pi \cdot d\sqrt{2}) = 2 : \sqrt{2}$$

Die prozentuelle Ersparnis beträgt 29,3%.

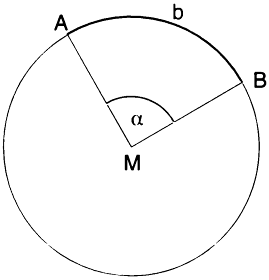


Abb. 4.119 Kreisbogen

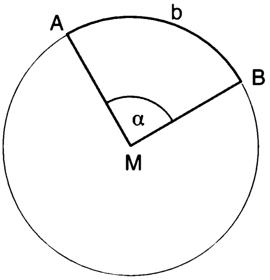


Abb. 4.120 Kreissektor

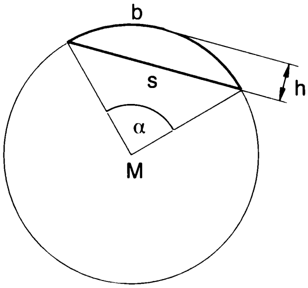


Abb. 4.121 Kreissegment oder Kreisabschnitt

Kreisbogenlänge b:

$b : 2\pi r = \alpha : 360°$;

$$\boxed{b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}}$$

Kreissektorfläche A_S:

$A_S : \pi r^2 = \alpha : 360°$
$= b : 2\pi r$;

$$\boxed{A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}}$$

$$\boxed{A_S = \frac{1}{2} br}$$

Kreissegmentfläche A_{Segm}:

s .. Sehne
h .. Bogen- od. Pfeilhöhe

$$A_{Segm} = A_S - A_{Dreieck}$$

$$\boxed{A_{Segm} = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s\,(r - h)}{2}}$$

Merkregel für den Flächeninhalt eines Kreissektors $A = \frac{1}{2}$ br:

Diese Formel hat die Gestalt der Flächenformel eines Dreiecks, wenn man b als "Grundseite" und r als darauf normal stehende "Höhe" im "Dreieck" AMB der Abb. 4.120 betrachtet.

Setze in der Formel für die Kreisbogenlänge und für die Kreissektorfläche speziell α = 360°; was ergeben die Formeln?

---

[11] Archimedes von Syrakus, ca. 287 – 212 v. Chr., sehr vielseitiger griechischer Wissenschaftler, der u. a. auch das Hebelprinzip und das Prinzip des Auftriebs entdeckte.

Beispiel 4.31 : Kreisbogen, Kreissektor und -segment

Von einem Kreissegment (Abb. 4.122) sind die Sehnenlänge s = 600 mm und die Bogenhöhe h = 120 mm gegeben (Maße millimetergenau). Berechne **a)** den Radius des zugehörigen Kreises, **b)** die Bogenlänge b sowie **c)** den Inhalt des Segmentes.

Lösung

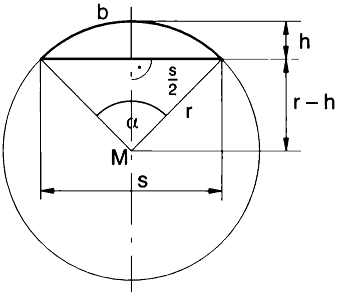


Abb. 4.122

Zu **a)** Aus dem rechtwinkligen Dreieck der Abb. 4.122 entnimmt man zuerst:

$$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$r^2 = r^2 - 2\,r\,h + h^2 + \frac{s^2}{4}$$

$$2\,r\,h = h^2 + \frac{s^2}{4};$$

Daraus: $r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} = 435$ mm.

Zu **b)** Aus demselben rechtwinkligen Dreieck entnimmt man weiters:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} = 0{,}690;$$

daraus $\frac{\alpha}{2} = 43{,}6°$ oder $\alpha = 87{,}2°$. Nun kann die Bogenlänge b bestimmt werden:

$$b = 2\pi\,r \cdot \frac{\alpha}{360°} = 662 \text{ mm.}$$

Zu **c)** Flächeninhalt des Sektors:

$$A_S = \frac{1}{2}\,b\,r = 14{,}4 \text{ dm}^2.$$

Flächeninhalt des Segmentes:

$$A_{Seg} = A_S - \frac{s\,(r - h)}{2} = 4{,}95 \text{ dm}^2.$$

Kreisring:

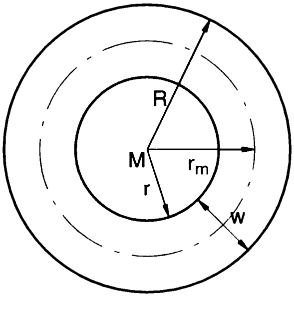


Abb. 4.123 Kreisring

Darunter (Abb. 4.123) versteht man das Flächenstück zwischen zwei Kreisen mit gleichem Mittelpunkt ("konzentrische" Kreise). Der Flächeninhalt des Kreisrings ist die Differenz zweier Kreisflächeninhalte:

$$\boxed{A_R = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(R + r)\;(R - r)} \text{ oder } \boxed{A_R = 2\,\pi\,r_m \cdot w}$$

Letzeres erkennt man, wenn man $r_m = \frac{R + r}{2}$ setzt, wobei r_m der "mittlere" Radius und w die Ringbreite ist. Der Inhalt ist damit gleich dem mittleren Umfang $2\,\pi\,r_m$ mal der Ringbreite w.

Beispiel 4.32 : Kreisring

Berechne die Querschnittsfläche eines Betonrohres nach Abb. 4.124, wenn der Innendurchmesser d = 80,0 cm und die Ringbreite $w = \frac{r}{4}$ ist.

Lösung

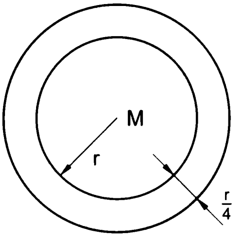


Abb. 4.124 Rohrquerschnitt

Mit dem mittleren Radius $r_m = \frac{d}{2} + \frac{d}{16} = \frac{9\,d}{16}$ und der Ringbreite $w = \frac{d}{8}$ gilt für die Querschnittsfläche A_R:

$$A_R = 2\,\pi \cdot \frac{9\,d}{16} \cdot \frac{d}{8} = \frac{9\,\pi}{64} \cdot d^2 = 28{,}3\ \text{dm}^2.$$

Beispiel 4.33 : Gibt es außer dem Kreis noch andere Figuren gleicher Breite?

Schlägt man gemäß Abb. 4.125 um jeden Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks der gegebenen Seite a = 10,0 cm einen Kreisbogen mit diesem Radius, so entsteht ein Bogendreieck. Es ist eine Figur gleicher Breite, ein "Gleichdick". Berechne seinen **a)** Flächeninhalt und **b)** Umfang.

Lösung

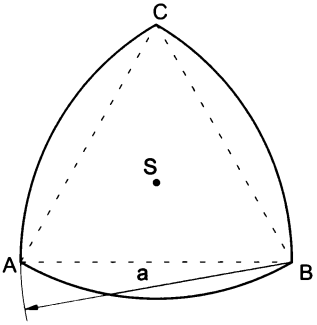


Abb. 4.125 Bogendreieck

Zu **a)** Ist A_1 der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks und A_2 der Inhalt eines Segmentes, so ist der gesuchte Flächeninhalt $A = A_1 + 3 \cdot A_2$.

$$A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 43{,}3\ \text{cm}^2;$$

$$A_2 = \frac{60^\circ}{360^\circ}\,\pi\,a^2 - A_1 = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 9{,}1\ \text{cm}^2;$$

$$A = A_1 + 3\,A_2 = \frac{a^2}{2} \cdot (\pi - \sqrt{3}) = 70{,}5\ \text{cm}^2.$$

Zu **b)** Sei b die Länge einer der drei kongruenten Sechstelkreisbögen (Bögen mit Zentriwinkel $\alpha = 60^\circ$):

$$b = \frac{1}{6} \cdot 2\pi a = \frac{\pi\,a}{3};$$

$$U = 3\,b = \pi\,a = 31{,}4\ \text{cm}.$$

Das Bogendreieck und ein gleich "breiter" Kreis besitzen somit gleichen Umfang.

Will man also feststellen, ob eine Scheibe kreisrund ist, ist die Prüfung mit der Schiebelehre nicht ausreichend.

Scheiben dieser Form lassen sich allerdings nicht gut als Räder benützen. Bei einer Drehung um ihren Schwerpunkt S (siehe Abb. 4.125) würde sich ein Fahrzeug auf und ab bewegen. Es gibt allerdings interessante technische Anwendungen, die auf dem Bogendreieck beruhen. So kann ein Bohrsatz, der diese Form hat, quadratische Löcher bohren. Das Bogendreieck wird übrigens nach dem deutschen Ingenieur Franz REULEAUX (1829 – 1905) auch Reuleaux–Dreieck genannt.

Aufgaben

4.100 Der Durchmesser einer Riemenscheibe, die 720 Umdrehungen in der Minute ausführt, beträgt 60,0 cm. Wie viel Meter legt ein Punkt am Umfang in 1 Sekunde zurück?

4.101 Welchen Weg legt ein Punkt des Äquators in 1 Sekunde zurück (Erdradius r = 6370 km)?

4.102 Ein PKW wendet, wobei die Außenräder einen Halbkreisbogen vom Radius 10,2 m befahren. Die Spurweite des Fahrzeugs beträgt 2,6 m; der äußere Reifendurchmesser ist 0,66 m. Wie oft drehen sich die Innen- und Außenräder?

4.103 Der Radius eines Kreises wird verdoppelt. Wie ändert sich sein Umfang und sein Flächeninhalt?

4.104 Der Durchmesser einer Scheibe wird von 40,0 cm auf 30,0 cm verringert. Um wie viel Prozent des Ausgangswertes ändern sich Umfang und Flächeninhalt?

4.105 Um die gesamte Erdkugel wird längs des Äquators am Boden ein Seil gelegt. Danach wird das Seil um 1 m verlängert. Wie weit steht es nun vom Boden ab, wenn stets gleicher Abstand angenommen wird? Wie groß ist dieser Abstand, wenn man dies an einer Kugel mit dem Radius 1 m ausführen würde?

4.106 Glattes Blech der Länge 10 m wird zu Wellblech verarbeitet, das aus abwechselnd nach oben und unten gekrümmten Halbkreisbögen besteht. Welche Länge besitzt das Wellblech, wenn die Anzahl der Halbkreisbögen gleich **a)** 50 **b)** 80 ist.

4.107 Eine Welle vom Durchmesser 150 mm erhält eine Bohrung vom Durchmesser 50 mm. Um wie viel Prozent vermindert sich der Querschnitt?

4.108 Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das inhaltsgleich einem Kreis mit dem Durchmesser d ist?

4.109 Nach Albrecht Dürer (deutscher Maler, 1471 – 1528) ist ein Kreis jenem Quadrat inhaltsgleich, dessen Diagonale gleich fünf Viertel des Kreisdurchmessers ist. Wie groß ist der prozentuelle Fehler?

4.110 Rohre mit gleichem Durchmesser d = 100 mm (Angabe millimetergenau) werden geschichtet. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche **a)** in Abb. 4.126, **b)** in Abb. 4.127.

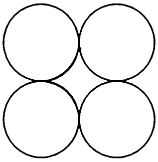


Abb. 4.126

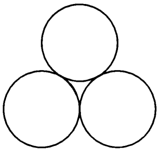


Abb. 4.127

4.111 Einem Blechstück werden die Ecken kreisförmig (Kreisradius r = 24 mm) abgerundet. Berechne den Verlust in Prozenten, wenn das Blechstück (Maße millimetergenau)

a) rechteckig mit den Seiten 400 mm und 240 mm ist,

b) die Form eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite 400 mm hat?

4.112 Eine Seemeile ist vereinbart als die Bogenlänge, die zu einer Minute eines Meridiankreises (Radius gleich dem Erdradius 6370 km) gehört. Welche Länge hat sie?

4.113 Der Scheinwerfer eines Leuchtturms (Abb. 4.128) befindet sich in h = 40 m Höhe. Bis zu welcher Entfernung e ist sein Licht von der Meeresoberfläche aus sichtbar? Die Erde wird als Kugel mit dem Radius r = 6370 km angenommen.

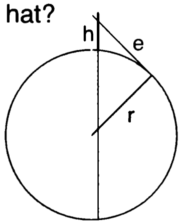


Abb. 4.128

4.114 Beim Lesen (Abb. 4.129) wird im Allgemeinen ein Abstand r von etwa 25 cm ("deutliche Sehweite") der Augen vom Text bevorzugt. Der Sehwinkel γ muss dabei einen Mindestwert haben, der rund 1 Winkelminute ist. Wie weit müssen zwei Punkte A und B auseinander liegen, damit sie noch getrennt gesehen werden können? Setze in guter Näherung $\overline{AB} = \overset{\frown}{AB}$.

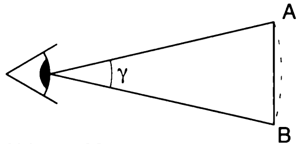


Abb. 4.129

4.115 Berechne die Länge des Riemens des Riemenantriebs

a) in Abb. 4.130, **b)** in Abb. 4.131, **c)** in Abb. 4.132, **d)** in Abb. 4.133.

Die Abmessungen sind in Zentimeter angegeben. Beachte, dass Riemen und Scheibenradius im Berührpunkt *normal* aufeinander stehen (siehe Abb. 4.117, Seite 156).

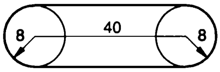


Abb. 4.130

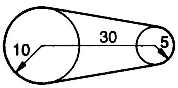


Abb. 4.131

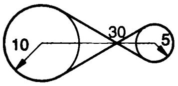


Abb. 4.132

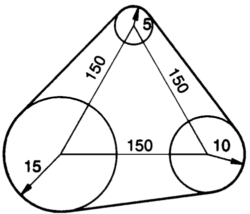


Abb. 4.133

4.116 Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r = 24,0 cm. Berechne die zum Zentriwinkel α gehörige Bogenlänge sowie die Inhalte des Kreissektors und des Kreissegmentes, wenn **a)** $\alpha = 90°$, **b)** $\alpha = 60°$, **c)** $\alpha = 70°$ ist.

4.117 Ein waagrechter Stahlstab (Abb. 4.134) kann sich durch Erwärmung nur nach einer Seite ausdehnen. An dieser Seite liegt er auf einer Rolle mit dem Durchmesser d = 8,0 cm auf. Die Rolle ist mit einem Zeiger der Länge R = 22,0 cm verbunden. Wie groß ist der Kreisbogen, den die Zeigerspitze bei einer Verlängerung der Strecke AB um 1 mm beschreibt?

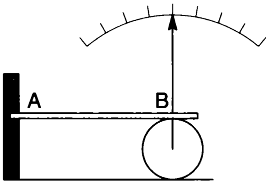


Abb. 4.134

4.118 Aus einem rechteckigen Blechstück wird (Abb. 4.135) ein Kreissegment herausgeschnitten. Berechne den Radius des zugehörigen Kreises sowie die Länge des Bogens (Maße in Zentimeter).

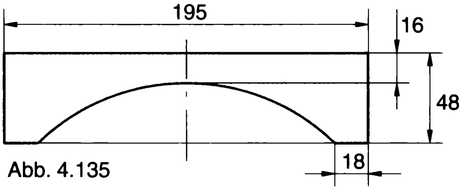


Abb. 4.135

4.119 Einem Quadrat mit der Seite a ist je ein Kreis ein- und umgeschrieben. Berechne den Inhalt des dadurch gebildeten Kreisrings.

4.120 Die Wanddicke eines Rohres ist 15 mm, sein Außendurchmesser ist 92 mm. Berechne den Ringquerschnitt.

4.121 Welchen inneren Radius muss ein Kreisring mit dem äußeren Radius R = 12 cm haben, damit die Ringfläche inhaltsgleich der inneren Kreisfläche ist?

4.122 Wie groß ist der Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel), wenn die Kreisbogenlänge gleich dem Kreisradius ist?

4.123 Ein gerades Straßenstück (Abb. 4.136) soll eine Richtungsänderung von $\alpha = 70°$ erfahren. Der Übergang soll in einem Kreisbogen vom Radius r = 250 m erfolgen. Berechne dessen Länge!

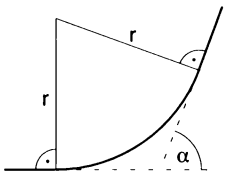


Abb. 4.136

4.124 Eine Straße ändert auf einem Kreisbogen der Länge 435 m und dem Radius 319 m ihre Richtung. Berechne den Richtungsunterschied.

4.125 Zwei Kanten eines Blechstückes (Abb. 4.137) bilden einen Winkel α. Gib eine Formel für den durch kreisförmige Abrundung (Radius r) wegfallende Fläche in Abhängigkeit von α und r an!

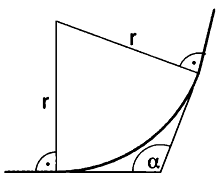


Abb. 4.137

4.126 Berechne die Querschnittsfläche des in Abb. 4.138 dargestellten Brückenpfeilers (Maße in Zentimeter).

4.127 Berechne den Querschnitt der in Beispiel 4.15, Seite 136, angegebenen Linse.

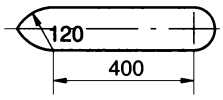


Abb. 4.138

4.128 Der Querschnitt eines Doppel-T-Ankers ist nach Abb. 4.139 gegeben, wobei die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrates sind. Berechne den Querschnitt des Ankers (Maße in mm).

4.129 Berechne Umfang und Inhalt des Bleches in Abb. 4.140 (Längenmaße in mm).

4.130 Ein Rohr (Abb. 4.141) mit dem Außendurchmesser 42,0 mm und der Wandstärke 4,0 mm erhält normal zur Rohrachse ein Bohrung vom Durchmesser d = 8,0 mm. Berechne die verbleibende Querschnittsfläche.

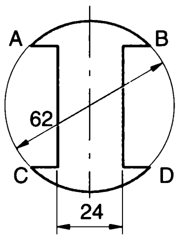


Abb. 4.139

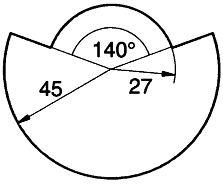


Abb. 4.140

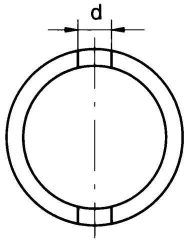


Abb. 4.141

4.5.3 Winkelmessung im Bogenmaß

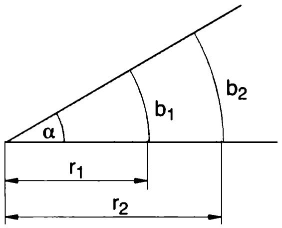


Abb. 4.142 Bogenmaß eines Winkels

Wie "groß" ein Winkel ist, kann man außer in Grad (oder möglicherweise in Gon) auch noch anders angeben. Schlägt man nämlich um den Scheitel des Winkels in Abb. 4.142 Kreisbögen b_1 und b_2 mit den Radien r_1 und r_2, so folgt nach der allgemeinen Formel $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ (siehe Seite 158):

$$\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha.$$

Der Quotient "Bogen durch Radius" = $\frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$ ist für jeden Kreisradius gleich groß. Er kann damit zur Winkelmessung verwendet werden. Man nennt diese Zahl **Bogenmaß** des Winkels α.

Für das Bogenmaß eines Winkels α schreibt man gelegentlich auch arc α (gesprochen: "Arkus Alpha"). Entsprechend schreibt man auch α° für den im Gradmaß gemessenen Winkel α.

Bogenmaß eines Winkels: $\frac{\textbf{Bogen } b}{\textbf{Radius } r}$

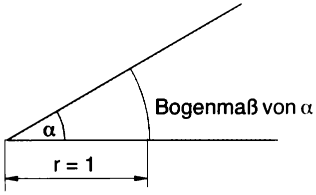


Abb. 4.143 Bogenmaß im Einheitskreis

Das Bogenmaß $\frac{b}{r}$ ist als Verhältnis zweier Längen eine dimensionslose Größe. Man kann ihr als Benennung das Wort **Radiant** als Einheit (abgekürzt **rad**) hinzufügen, um auf die Winkelmessung hinzuweisen.

Ist der Kreisradius gleich 1 Längeneinheit, der Kreis also ein Einheitskreis, so ist das Bogenmaß von α gleich (dem Zahlenwert von) b. *Man kann also α im Bogenmaß unmittelbar als Bogenlänge im Einheitskreis ablesen!*

Für den Vollwinkel, im Gradmaß gleich 360°, ist das Bogenmaß gleich 2π; denn dies ist der Zahlenwert des Umfanges des Einheitskreises. Daher: $360° = 2\pi$ oder $360° = 2\pi$ rad.

Daraus auch $\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$.

Diese Gleichung ermöglicht die schnelle Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt.

Umrechnung vom **Gradmaß ins Bogenmaß**:

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}}$$

$$\boxed{\alpha° \cdot \frac{\pi}{180°} = \alpha \text{ rad}}$$

In Worten: **Grad mal $\frac{\pi}{180°}$ = rad.**

Umrechnung vom **Bogenmaß ins Gradmaß**:

$$\boxed{1 \text{ rad} = 1 = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°}$$

$$\boxed{\alpha \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi} = \alpha°}$$

In Worten: **rad mal $\frac{180°}{\pi}$ = Grad.**

Die Umrechnungsfaktoren sind somit $\frac{\pi}{180°}$ bzw. $\frac{180°}{\pi}$.

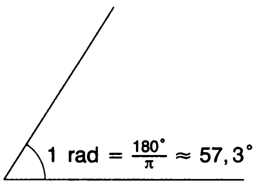


Abb. 4.144 Der Winkel 1 rad

Ein Winkel der Größe 1 rad (Winkel mit $b/r = 1$, d.h. $b = r$) ist somit im Gradmaß etwas kleiner als 60° und damit wesentlich größer als ein solcher von 1°. Es ist günstig, sich einen Winkel der Größe 1 rad optisch einzuprägen.

Häufig unterbleibt die Schreibung des Einheitenzeichens rad. Umgekehrt heißt dies, dass das Gradzeichen ° nicht "vergessen" werden darf! Die Einheit "Radiant" ist eine (zusätzliche) SI-Einheit, während die Einheit "Grad" eine zwar zulässige, aber SI-fremde Einheit ist.

Bisher standen α, β usw. stets für den Winkel im Gradmaß. Drehwinkel in der Physik werden in der Regel im Bogenmaß angegeben; in der "höheren" Mathematik wird das Bogenmaß verwendet, da es zu einfacheren Formeln führt.

Beispiel 4.34 : Bogenmaß und Gradmaß

a) $\alpha = 10°$; $\varphi = 45°$; rechne ins Bogenmaß um!

b) $\alpha = 2$ rad; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\varphi = 10$; rechne ins Gradmaß um!

c) $\sin 18° = ?$ $\sin \frac{\pi}{5} = ?$

Lösung

Zu **a)**

$\alpha = 10° \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}175 \text{ rad} = 0{,}175$

$\varphi = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$

Zu **b)**

$\alpha = 2 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi} = 114{,}6°$

$\beta = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 60°$

$\varphi = 10 \cdot \frac{180°}{\pi} = 573{,}0°$

Zu **c)**

$\sin 18° = 0{,}309$

$\sin \frac{\pi}{5} = 0{,}588$

Winkelmaß "RADIANT" im Taschenrechner einstellen!

Begründe die oft gebrauchten Gleichheiten:

Winkel in Grad	0°	30°	45°	90°	180°	360°
Winkel in Radiant	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Aufgaben

4.131 Rechne ins Bogenmaß um:

a) 1,0° **b)** 15,9° **c)** 60° **d)** 300° **e)** 1080° **f)** −100°

4.132 Rechne folgende im Bogenmaß gegebenene Winkelgrößen ins Gradmaß um:

a) $\frac{\pi}{10}$ **b)** $-\frac{\pi}{8}$ **c)** $\frac{3}{2}\pi$ **d)** 3 rad **e)** −4

4.133 Gib im Bogenmaß die Summe der Innenwinkel eines **a)** Dreiecks, **b)** Vierecks, **c)** Fünfecks an.

4.134 Wie lauten die Formeln für die Kreisbogenlänge sowie den Flächeninhalt eines Kreissektors, wenn der Zentriwinkel α im Bogenmaß gegeben ist?

4.135 Eine mit gleich bleibender Umdrehunszahl rotierende Scheibe macht 4 Umdrehungen in 5 s. Berechne den in 1 s zurückgelegten Drehwinkel φ (im Bogenmaß).

4.136 Ermittle die Kreisfunktionswerte folgender im Bogenmaß gegebener Winkel:

a) cos 1,2 **b)** tan 0,8 **c)** sin 0,2 **d)** cot 0,5

e) $\sin\frac{\pi}{5}$ **f)** $\cos\frac{3\pi}{8}$ **g)** $\tan\frac{1{,}3\pi}{8}$ **h)** $\sin\left(\frac{3\pi}{8} - 0{,}4\right)$

Im Überblick: Kreis und Kreisteile ●

Kreis: Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M (= Mittelpunkt) den gleichen Abstand r (= Radius) haben.

Sehne s: Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte.

Durchmesser d: Jede Sehne durch den Kreismittelpunkt; $d = 2r$.

Kreistangente: Steht normal auf dem Kreisradius im Tangentenberührpunkt.

Peripheriewinkelsatz: Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises sind gleich groß; und zwar halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

Kreisumfang $U = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$; Kreiszahl $\pi = 3{,}1415927... \approx 3{,}14$;

Kreisflächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$

Kreisbogenlänge: $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$ (α: Zentri- oder Mittelpunktswinkel);

Kreissektorfläche: $A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}\,br$

Kreissegmentfläche: $A_{Segm} = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s\,(r-h)}{2}$ (s: Sehne, h: Bogen- oder Pfeilhöhe);

Kreisringfläche: $A_R = \pi\,(R^2 - r^2) = 2\,\pi\, r_m \cdot w$ (r_m: mittlerer Radius, w: Ringbreite).

Bogenmaß: $\frac{b}{r}$; $180^\circ = \pi$ (rad); 1 rad = 57,3°;

Umrechnungsfaktoren vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt: $\frac{\pi}{180^\circ}$ bzw. $\frac{180^\circ}{\pi}$.

5 Funktionen

5.1 Grundbegriffe

Beispiel 5.1 : Grundbegriffe

Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 kmh^{-1}. Welchen Fahrweg s legt es innerhalb einer bestimmten Zeit t zurück?
Wie können wir die Abhängigkeit des Fahrweges s von der Fahrzeit t darstellen?

Lösung

Wir überlegen wie der Fahrweg s bei gleichbleibender Geschwindigkeit von der Fahrzeit t abhängt. Verdoppelt man die Zeit, so verdoppelt sich auch die zurückgelegte Wegstrecke, verdreifacht sich die Zeit, so verdreifacht sich auch der Weg.

1. Tabelle (Wertetabelle):

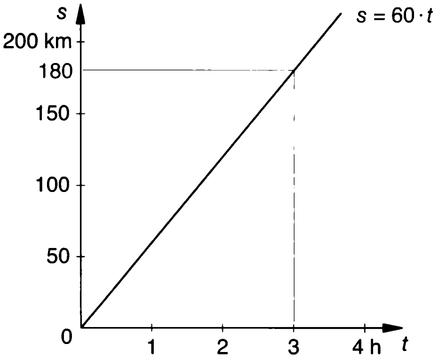
Zeit (*h*)	Weg (km)
1	60
2	120
3	180
4	240

2. Formel (Gleichung):

$s = 60 \cdot t$

$t = 1$ h: $s = 60$ km
$t = 2$ h: $s = 120$ km
$t = 3$ h: $s = 180$ km
$t = 4$ h: $s = 240$ km

3. Graphische Darstellung im Koordinatensystem:



Daraus können wir zu jedem Zeitpunkt den zurückgelegten Weg ablesen. Für beispielsweise $t = 3$ h liest man als Fahrweg $s = 180$ km ab.

Abb. 5.1 Graphische Darstellung

Alle drei Darstellungen bringen zum Ausdruck, dass zu jeder Fahrzeit t ein eindeutig bestimmter Fahrweg s gehört.

Durch $s = 60 \cdot t$ kommt eine Abhängigkeit des Weges s von der dafür benötigten Zeit t zum Ausdruck.

In technischen Anwendungen wie auch im täglichen Leben gibt es zahlreiche Abhängigkeiten, besser Zuordnungen, zwischen zwei (oder auch mehreren) Größen:

- Preis einer Ware in Abhängigkeit von der gekauften Menge,
- Bremsweg eines PKWs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit,
- Abhängigkeit des Kreisumfanges vom Radius des Kreises,
- Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung in einem elektrischen Stromkreis,
- Zuordnung eines angemeldeten PKWs zu einem polizeilichen Kennzeichen,
- Staatsbürgerschaft, die einer Person zugeordnet ist.

So gehört zu einer bestimmten Menge einer Ware genau ein Preis, ebenso gehört zu einem bestimmten Kreisradius genau ein Umfang oder zu jedem PKW genau ein polizeiliches Kennzeichen. Solche **eindeutige Zuordnungen nennt man Funktionen**.

Dagegen kann eine Person durchaus mehrere Staatsbürgerschaften besitzen. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit eines PKWs gibt es ebenfalls nicht mehr einen ganz bestimmten zugehörigen Bremsweg, dieser "streut" in einem gewissen Bereich; Gleiches gilt für den Zusammenhang zwischen der Körpergröße und dem Körpergewicht. Diese Zuordnungen stellen keine Funktionen dar, weil sie nicht eindeutig sind. Oft versucht man in solchen Fällen, näherungsweise eine Funktion zu bilden, indem man eine "Faustformel " aufstellt, etwa zwischen der Körpergröße und dem Körpergewicht.

In der Regel interessiert man sich im Beispiel 5.1 nicht für alle denkbaren Fahrzeiten. So haben wir die Fahrzeiten t in der Wertetabelle und in der graphischen Darstellung nur bis $t = 4$ h und nicht darüber angegeben. Der interessierende Fahrzeitenbereich ist die **Definitionsmenge D** der vorliegenden Funktion. Falls uns etwa die Fahrwege s für die Fahrzeiten t (in Stunden) zwischen 0 und 4 interessieren (diese Werte eingeschlossen), so ist D = [0, 4]. Die dann möglichen Fahrwege s (in km) bilden die **Wertemenge W** (oder Bildmenge) dieser Funktion, also W = [0, 240].

Die Kenntnis der Wertemenge W ist beispielsweise von Bedeutung, wenn man eine Funktion graphisch darstellen möchte.

Damit können wir allgemein festhalten:

> Bei einer Funktion wird jedem Element aus der Definitionsmenge **genau ein** Element aus der Wertemenge zugeordnet.

Als Namen von Funktionen werden meist kleine lateinische Buchstaben verwendet: f, g, ... Um die durch eine Funktion hergestellte Zuordnung auszudrücken, benützt man auch die Schreibweise: $f\colon D \to W$ oder $f\colon x \mapsto y$.

Man sagt auch, dass y von x abhängig ist. Daher bezeichnet man x als **unabhängige Variable** und y als **abhängige Variable**. Die Abhängigkeit wird oft durch eine **Formel**, die **Funktionsgleichung y = f (x)**, angegeben.

Die unabhängige Variable x wird als **Argument** oder **Stelle** und die abhängige Variable y als **Funktionswert** an der Stelle x bezeichnet.

x	unabhängige Variable, Argument, Stelle
y	abhängige Variable, Funktionswert

Definitionsmenge: Menge der Elemente, die die unabhängige Variable annehmen kann.

Wertemenge (oder Bildmenge): Menge der Elemente, die die abhängige Variable annimmt.

Für uns werden diese Mengen stets Zahlenmengen sein. Solche Funktionen heißen **reelle Funktionen**.

Anmerkungen:

(1) Zur Angabe einer Funktion f verwendet man oft eine der folgenden vereinfachten Sprech- oder Schreibweisen: "Funktion f: y = f (x)" oder "Funktion y = f (x)" oder "Funktion y = y (x)". Eine Funktion wird sehr oft durch eine Gleichung (Formel) oder durch einen Term angegeben.

	Gleichung (Formel)	Term
	y = f (x) oder y = y (x)	f (x) oder y (x)
Beispiel	y = 2x + 3	2x + 3

(2) Statt der Funktionsgleichung $f(x) = 2x + 3$ könnte man genauso gut $f(a) = 2a + 3$ oder $f(t) = 2t + 3$ usw. schreiben. Für die Bezeichnung der Variablen wählt man sinnvollerweise Buchstaben, die an die Bedeutung der Größen erinnern, wofür die Variablen stehen: etwa t bei Zeitgrößen. Hat man keine bestimmte Anwendung im Sinn, so schreibt man (für die unabhängige Variable) gerne x.

(3) Häufig ist die Definitionsmenge nicht angegeben. Sie ergibt sich aus dem Sachverhalt. Ein Beispiel: $A = r^2 \cdot \pi$ ist die Funktionsgleichung für den Flächeninhalt eines Kreises in Abhängigkeit vom Radius r; die Angabe, dass der Radius positiv ist (dass also die Definitionsmenge nur die positiven Zahlen enthält), ergibt sich von selbst und kann daher unterbleiben.

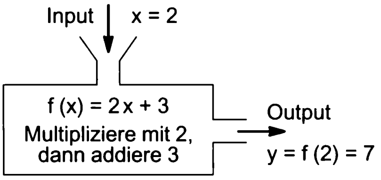


Abb. 5.2 Funktionsmaschine

Die Betrachtung einer Funktion als "Funktionsmaschine" (Abb. 5.2) kann oft nützlich sein: diese verarbeitet einen Eingangswert (Input) x zu einem durch x eindeutig bestimmten Ausgangswert (Output) y.

Empirische Funktionen:

In der Praxis treten oft Funktionen auf, bei denen der Zusammenhang zwischen x und y nicht durch eine Gleichung $y = f(x)$ angegeben ist, sondern durch Messung oder Beobachtung vorliegt. Solche Funktionen heißen **empirische Funktionen** (empirisch = aus der Beobachtung).

Beispiel 5.2 : Empirische Funktion

Die Lufttemperatur wurde in Abständen von 2 Stunden gemessen:

Tageszeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24 Uhr
ϑ in °C	6,0	5,8	5,0	6,0	9,0	11,2	15,6	16,0	14,8	13,0	11,0	9,4	8,2

Stelle den Zusammenhang graphisch dar!

Anmerkung: ϑ ("Theta", griechischer Kleinbuchstabe) ist das Formelzeichen für die Temperatur in Grad Celsius.

Lösung

Die Zeit-Temperatur-Paare werden in einem Koordinatensystem punktweise eingetragen und benachbarte Punkte in der Regel durch eine Strecke (Abb.5.3) verbunden.

Da sich Temperaturen nicht ruckartig ändern, wäre eher ein "glatter" Verlauf des Graphen angemessen.

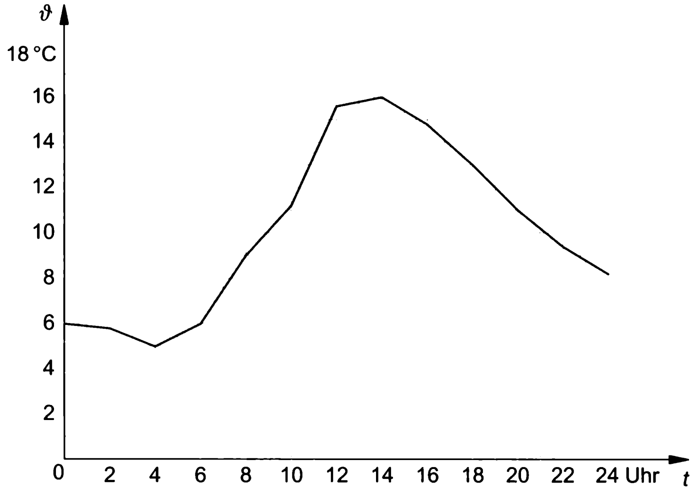


Abb. 5.3 Temperaturverlauf

5.2 Relationen

Stellt jede Zuordnung zwischen zwei Mengen bzw. jede Gleichung eine Funktion dar?

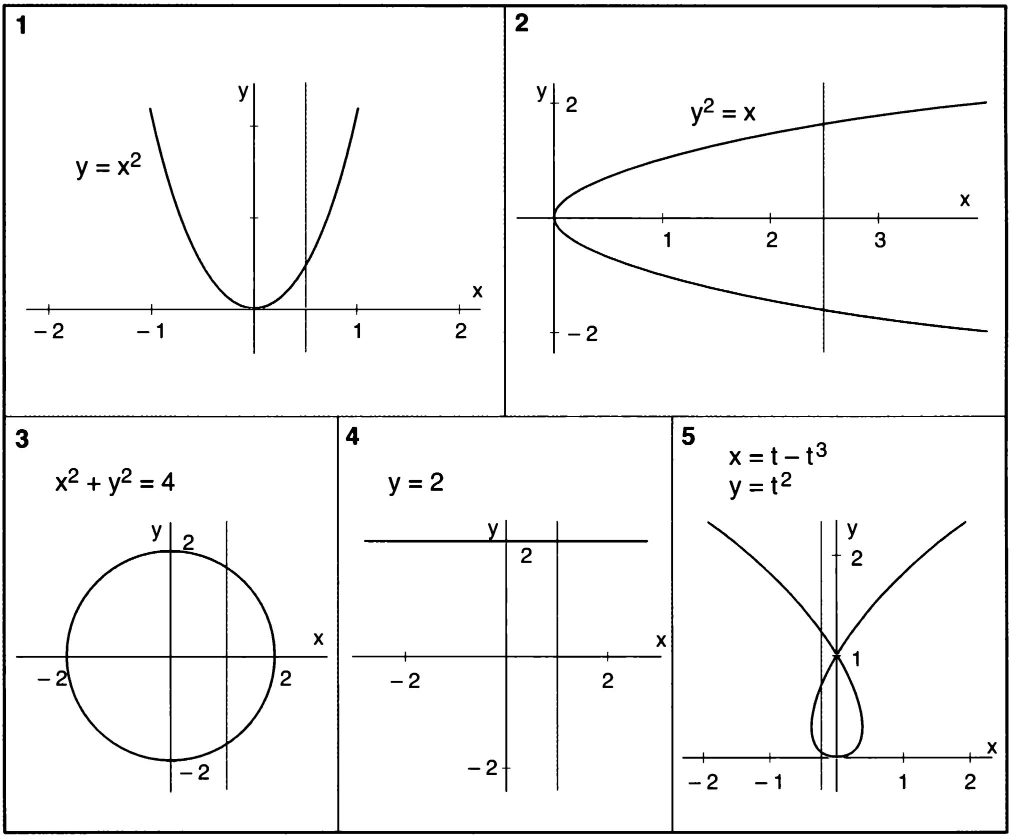


Abb. 5.4 Graphen von Relationen

Aus der Definition einer Funktion folgt, dass die Graphen in Fenster 2, Fenster 3 und Fenster 5 in Abb. 5.4 **keine Funktionen** darstellen, da es x-Werte gibt, denen *mehr* als ein y-Wert zugeordnet sind. Geometrisch veranschaulicht: Es gibt senkrechte Geraden, die mit dem Graphen *mehrere* Schnittpunkte haben.

Wir halten fest:

Eine **Zuordnung** zwischen einer Definitionsmenge und einer Wertemenge, bei der jedem Element aus der Definitionsmenge **mindestens ein** Element aus der Wertemenge zugeordnet wird, heißt **Relation**.

Funktionen sind eindeutige Relationen, d.h. jedem Element aus der Definitionsmenge ist **genau ein** Element aus der Wertemenge zugeordnet.

5.3 Nullstellen und Monotonie von Funktionen

Beispiel 5.3 : Einführendes Beispiel

Zeichne den Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = 0{,}5 \cdot x^2 - x - 1{,}5$ für $D = [-3, 5]$.

a) Wo schneidet der Funktionsgraph die x-Achse?

b) Gibt es Bereiche, in denen der Graph stets steigt oder stets fällt?

Lösung

Wie zeichnen den Funktionsgraph mit Hilfe einer Wertetabelle. Die so ermittelten Punkte verbinden wir durch eine "glatte" Kurve.

x	y
−3	6
−2	2,5
−1	0
0	−1,5
1	−2
2	−1,5
3	0
4	2,5
5	6

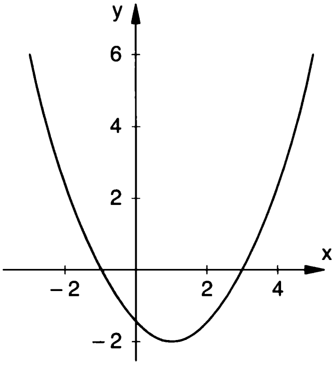


Abb. 5.5 Graph der Funktion $y = 0{,}5 \cdot x^2 - x - 1{,}5$

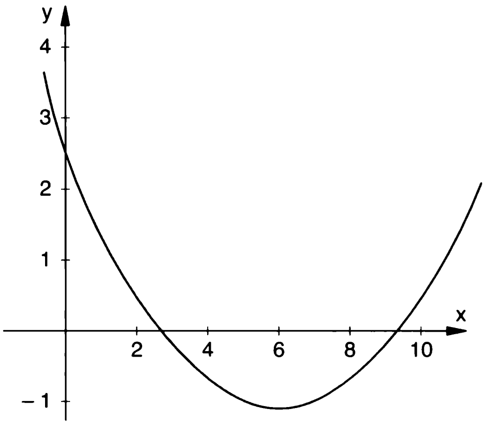
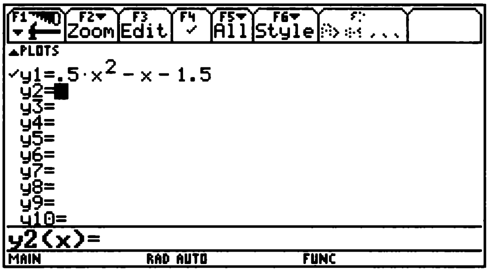


Abb. 5.6 $y = 0{,}1 \cdot x^2 - 1{,}2 \cdot x + 2{,}5$

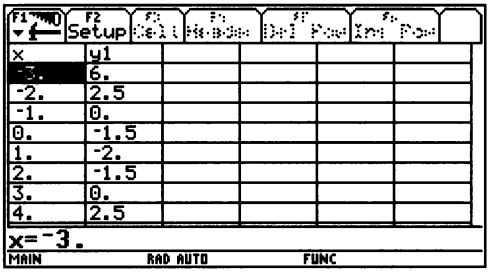
Dass wir mit einer auf gut Glück erstellten Wertetabelle den Verlauf einer Funktionskurve im Wesentlichen erfassen, ist nicht sicher. In Abb. 5.6 ist beispielsweise der Graph der Funktion $y = 0{,}1 \cdot x^2 - 1{,}2 \cdot x + 2{,}5$ gezeichnet; hätten wir die gleichen x-Werte wie in der obigen Wertetabelle verwendet, würden wir daraus nicht erkennen, dass die Funktionswerte wieder ansteigen. Im Laufe der Zeit werden wir lernen, dieses Risiko auszuschalten, indem wir Kenntnisse über Funktionen sowie wirksamere Mittel zur Funktionsuntersuchung erwerben. Dazu gehört das Aufsuchen von eventuell vorhandenen Nullstellen und das Erkennen von Monotonieeigenschaften (in welchen Bereichen steigt der Graph, in welchen fällt er?).

Wertetabellen mit dem Taschenrechner erstellt:



```
✓y1=.5·x²-x-1.5
 y2=
 y3=
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
 y10=
y2(x)=
```

Mit ◆ W gelangt man in den y-Editor. Man gibt nun die Funktionsgleichung ein.



x	y1
-3.	6.
-2.	2.5
-1.	0.
0.	-1.5
1.	-2.
2.	-1.5
3.	0.
4.	2.5

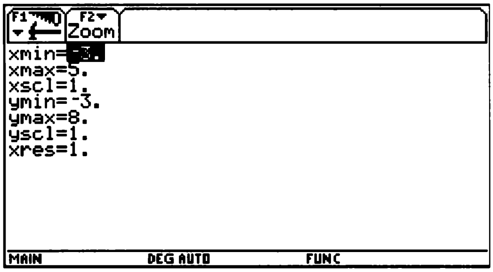
```
x=-3.
```

Mit ◆ Y aktiviert man die Tabelle. Durch Drücken von **F2** kann man die Schrittweite der Tabelle verändern.

Die Einstellungen der Tabelle kann man auch durch Drücken von ◆ T verändern.

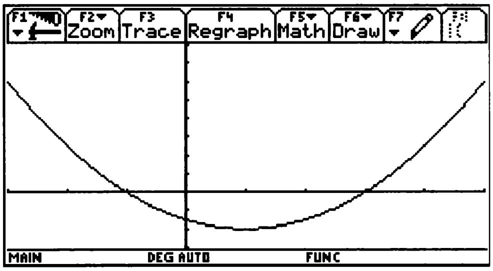
Graph mit dem Taschenrechner:

Ist die Funktion im y-Editor definiert, so kann sie auch graphisch dargestellt werden. Dazu ist das Ansichtsfenster ("Window"), d.h. der Zeichenbereich in der Koordinatenebene, anzugeben. Dies erfolgt nach Aufruf des Window-Editors mit ◆ E.



```
xmin=-3.
xmax=5.
xscl=1.
ymin=-3.
ymax=8.
yscl=1.
xres=1.
```

Durch die Wahl von xmin, xmax, ymin und ymax werden die Grenzen des Ansichtsfensters festgelegt. xscl und yscl geben den Teilstrichabstand auf der x- bzw. y-Achse an (scl steht für scale). Schließlich bestimmt xres die Pixelauflösung (1 bis 10, res steht für resolution) auf der x-Achse. 1 ist die feinstmögliche Auflösung.



◆ R öffnet den Graphikbildschirm und zeichnet den Graph der Funktion.

Aus der Wertetabelle bzw. dem Graphen der Funktion unseres Beispiels 5.3 entnehmen wir, dass dieser die x-Achse an den Stellen -1 und 3 schneidet. Diese beiden x-Koordinaten heißen **Nullstellen** der Funktion, weil der Funktionswert y an diesen beiden Stellen 0 ist.

Zur Ermittlung von Nullstellen setzt man $y = 0$ und löst die so entstehende Gleichung $f(x) = 0$ nach x auf.

Das algebraische Lösen der "quadratischen Gleichung" $y = 0{,}5 \cdot x^2 - x - 1{,}5$ werden wir in "Ingenieur-Mathematik 2" kennen lernen. Zur Zeit müssen wir die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ durch gezieltes Probieren ermitteln.

Wir halten noch einmal fest:

Die **Nullstellen** einer Funktion sind jene Stellen (also x-Koordinaten), an denen der Funktionsgraph die x-Achse schneidet oder berührt.

Der Funktionsgraph in Abb. 5.5 hat die Eigenschaft, dass mit *größer* werdenden x-Werten die Funktionswerte bis $x = 1$ *stets* fallen, danach *stets* steigen. Man sagt, dass die Funktion im Intervall $]-\infty, 1]$ **streng monoton fallend**, im Intervall $[1, \infty[$ **streng monoton steigend** ist.

Allgemein definiert man:

Gilt *stets* für zwei beliebige Stellen x_1, x_2 eines Intervalls I mit der Eigenschaft $x_1 < x_2$, dass $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f in I **streng monoton steigend**.
Ist dagegen *stets* $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f in I **streng monoton fallend**.

Kurzschreibweise: Gilt für zwei beliebige Stellen $x_1, x_2 \in I$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f in I streng monoton steigend;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f in I streng monoton fallend.

Würde man das Wort "streng" weglassen, so lässt man zu, dass die Funktionswerte auch gleich bleiben können.

Strenge Monotonie einer Funktion in einem Intervall oder in der gesamten Definitionsmenge D bedeutet ein einfaches Funktionsverhalten; die Funktion steigt oder fällt stets. Je größer die x-Werte, desto größer (kleiner) die Funktionswerte! Freilich ist damit noch nichts darüber ausgesagt, wie *stark* die Funktionswerte wachsen (abnehmen).

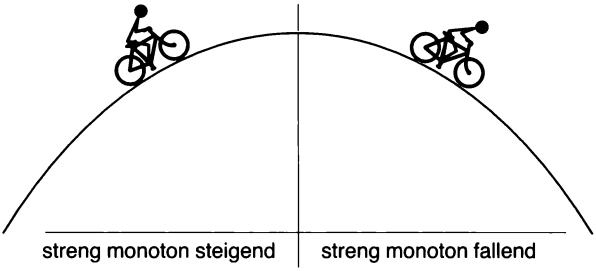


Abb. 5.7 Monotonie von Funktionen

5.4 Erster Überblick über Funktionen

Es gibt eine Vielzahl von in Technik und Naturwissenschaften verwendeten Funktionen; die wichtigsten "Standardfunktionen" werden wir vor allem in „Ingenieur-Mathematik 2" kennen lernen.

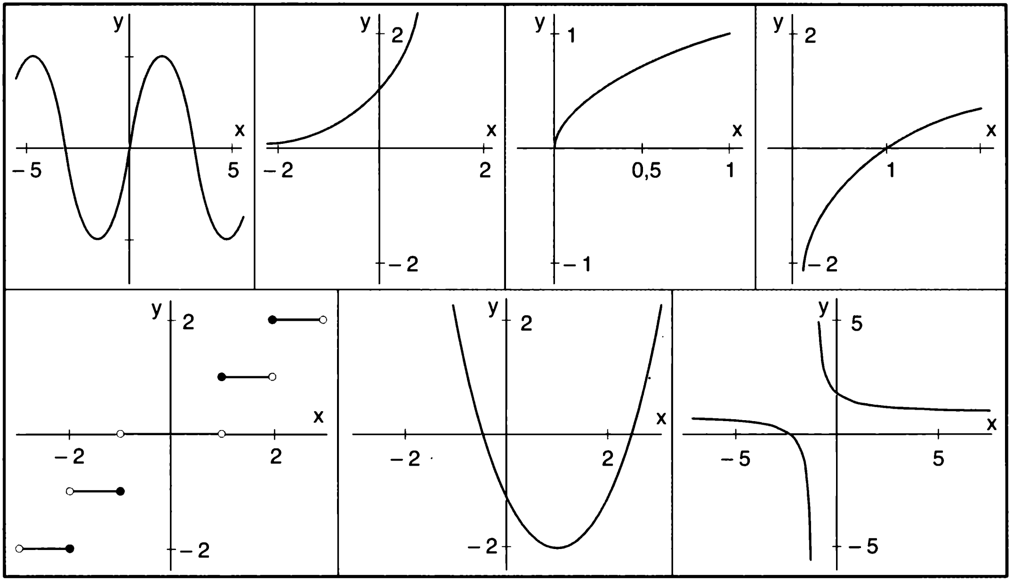
Beispiele:

Trigonometrische Funktion
hier: Sinus-Funktion

Exponentialfunktion
hier: $y = e^x$

Wurzelfunktion
hier: $y = \sqrt{x}$

Logarithmusfunktion
hier: $y = \ln x$



Sonstige Funktionen
hier: Integer-Funktion

Ganzrationale Funktionen
hier: $y = (x - 1)^2 - 2$

Gebrochen rationale Funktionen
hier: $y = \frac{1}{x + 1}$

Abb. 5.8 Überblick über einige Standardfunktionen

Im Überblick: Funktionen – Relationen ●

Definitionsmenge D: Menge der Zahlen, die die *unabhängige* Variable annehmen kann.
Wertemenge W: Menge der Zahlen, die die *abhängige* Variable annehmen kann.

Funktion: Jedem Element aus der Definitionsmenge wird *genau* ein Element der Wertemenge zugeordnet.

Relation: Jedem Element aus der Definitionsmenge wird *mindestens* ein Element der Wertemenge zugeordnet.

Darstellung einer Funktion: Wertetabelle; Funktionsgleichung (Formel); graphisch im Koordinatensystem; u. a.

Monotonie einer Funktion f in einem Intervall: Nehmen mit wachsenden x-Werten die Funktionswerte zu (ab), so heißt f streng monoton steigend (streng monoton fallend).

Nullstelle: Stelle (also x-Koordinate), an der der Funktionsgraph die x-Achse schneidet oder berührt.

In diesem Band werden wir uns näher mit der linearen Funktion beschäftigen.

5.5 Lineare Funktion und Gerade

Beispiel 5.4 : Graph einer linearen Funktion

Stelle die Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, graphisch dar.

Lösung

Zunächst erstellt man eine Wertetabelle und trägt anschließend die Punkte im kartesischen Koordinatensystem ein.

x	y
−2	−2
−1	−1,5
0	−1
1	−0,5
2	0
3	0,5

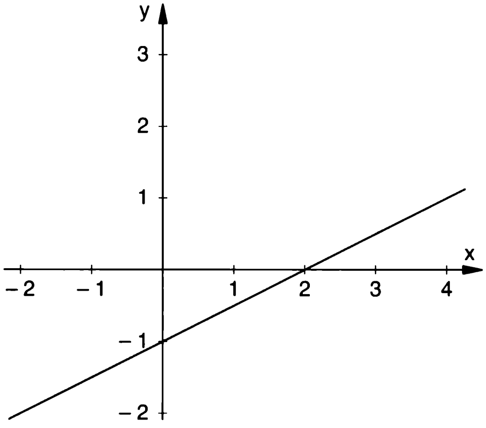


Abb. 5.9 $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

Aus der Wertetabelle erkennt man, dass bei gleicher Zunahme der x-Werte die y-Werte gleichmäßig ansteigen. Dies legt nahe, dass der Graph eine Gerade ist. Wegen dieser Eigenschaft heißt diese Funktion eine **lineare Funktion**.

Wir befassen uns nun ausführlicher mit jenen Funktionen, deren Graphen (im üblichen kartesischen Koordinatensystem) Geraden sind.

Geradengleichung und lineare Funktion

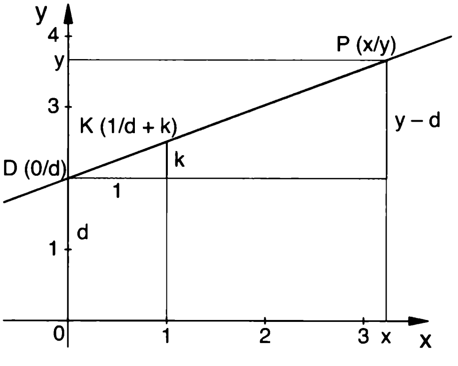


Abb. 5.10 Geradengleichung

Wir legen (Abb. 5.10) eine Gerade durch die Punkte D (0/d) und K (1/d + k). Für jeden Geradenpunkt P (x/y) gilt:

$\frac{y - d}{x} = \frac{k}{1}$ (ähnliche Dreiecke).

Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man:

$y = k \cdot x + d$ **Geradengleichung**.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $\mathbf{y = k \cdot x + d}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, k und d jeweils ein beliebiger fester Wert, heißt **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine **Gerade**.

Im Beispiel 5.4 war $k = \frac{1}{2}$ und $d = -1$.

Die Graphen von linearen Funktionen brauchen daher nicht mit Hilfe von (umfangreichen) Wertetabellen gezeichnet werden. Es genügt, *zwei* Punkte zu ermitteln (und eventuell einen dritten Punkt zur Kontrolle). Später werden wir den Graphen auch mittels der Werte k und d zeichnen.

Eine andere Schreibweise für die Funktionsgleichung einer linearen Funktion ist:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach y auf (wir setzen voraus, dass $b \neq 0$ ist), so erhält man:

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}.$$

Setzt man k für $-\frac{a}{b}$ und d für $-\frac{c}{b}$, so bekommt man wieder die Gleichung einer linearen Funktion in der uns bekannten Form: $y = k \cdot x + d$.

Die Gleichungen $y = k \cdot x + d$ bzw. $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ werden als **Geradengleichungen** bezeichnet. $y = k \cdot x + d$ heißt ihre **Normalform** und $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ihre **allgemeine Form**.

Für das praktische Rechnen wird die Normalform bevorzugt.

Beispiel 5.5 : Bedeutung von k und d

Die Gleichung einer Geraden lautet $y = k \cdot x + d$. Wie beeinflussen die Größen k und d die Gerade?

Lösung

a) Zunächst bleibt k konstant, etwa gleich $\frac{1}{2}$ und d variiert: $d = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$.
Wir stellen eine Wertetabelle für jeweils 2 Geradenpunkte auf und zeichnen anschließend die Geraden.

	$x = -2$	$x = 2$
$y = \frac{1}{2}x - 2$	$\frac{1}{2}\cdot(-2) - 2 = -3$	$\frac{1}{2}\cdot(2)\quad 2 = -1$
$y = \frac{1}{2}x - 1$	$\frac{1}{2}\cdot(-2) - 1 = -2$	$\frac{1}{2}\cdot(2) - 1 = 0$
$y = \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}\cdot(-2) + 0 = -1$	$\frac{1}{2}\cdot(2) + 0 = 1$
$y = \frac{1}{2}x + 1$	$\frac{1}{2}\cdot(-2) + 1 = 0$	$\frac{1}{2}\cdot(2) + 1 = 2$
$y = \frac{1}{2}x + 2$	$\frac{1}{2}\cdot(-2) + 2 = 1$	$\frac{1}{2}\cdot(2) + 2 = 3$

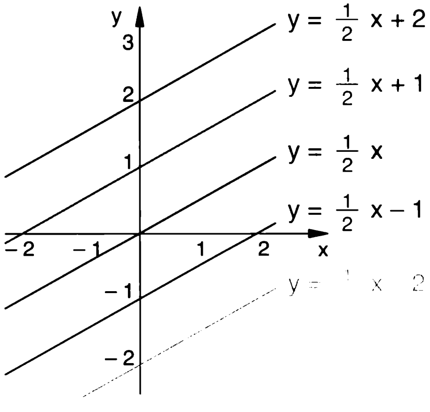


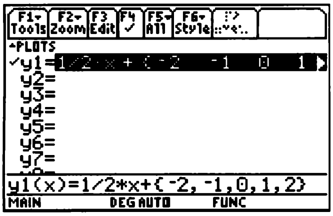
Abb. 5.11 Geraden mit gleicher Steigung

Die Wertetabelle lässt vermuten, dass d die Verschiebung der Funktion $y = \frac{1}{2}x$ entlang der y-Achse angibt.

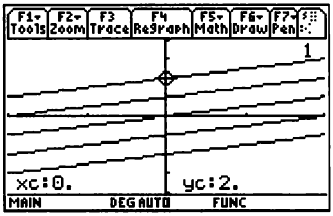
Aus der Zeichnung erkennt man, dass die einzelnen Geraden parallel sind.

Betrachtet man die Stelle $x = 0$, so schneiden die jeweiligen Geraden die y-Achse in Punkten mit der y-Koordinate d.

Das heißt, dass die obige Vermutung durch die Zeichnung bestätigt wird.



```
▲PLOTS
✓y1=1/2·x+{-2   -1   0   1 ▸
 y2=
 y3=
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
y1(x)=1/2*x+{-2,-1,0,1,2}
MAIN          DEG AUTO       FUNC
```



```
xc:0.          yc:2.
MAIN          DEG AUTO       FUNC
```

Nach Definition der Funktion im y-Editor setzt man im Graphikbildschirm mit F5 1 (1:value) 0 ENTER den Cursor auf die Stelle x = 0. Bewegt man den Cursor nach oben oder unten, so kann man bei yc die verschiedenen d-Werte ablesen.

d = 0: Die Gerade geht durch den Koordinatenursprung. Sie heißt daher **Ursprungsgerade**.

d ≠ 0: Die Gerade geht nicht durch den Koordinatenursprung.
d gibt die Verschiebung der Ursprungsgerade in y-Richtung an. Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse hat die y-Koordinate d, weshalb d der **Ordinatenabstand** oder **y-Achsenabschnitt** heißt.

Nun soll d konstant bleiben, etwa gleich 0;

b) d = 0 und k variiert: k = – 1, – 0,5, 0, 0,5, 1.

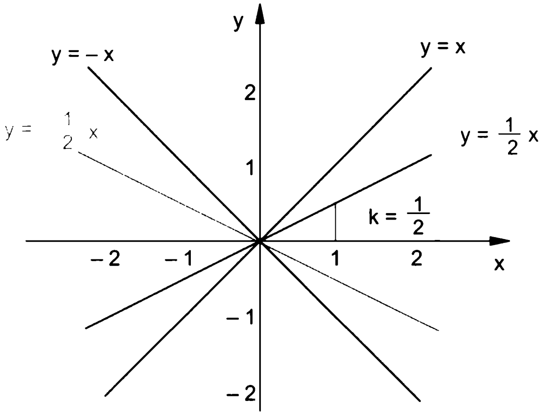
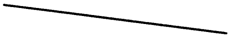


Abb. 5.12 Geraden mit unterschiedlicher Steigung

Aus der Gleichung y = k · x folgt, dass y = k ist, wenn x = 1 ist.

Man erkennt, dass k ein Maß für die Steigung ist. Damit können wir sagen:

Lineare Funktion mit	*Monotonieverhalten*	*Graph*
k > 0	Die Gerade **steigt**; die Funktion ist streng monoton wachsend.	
k < 0	Die Gerade **fällt**; die Funktion ist streng monoton fallend.	
k = 0	Die Gerade ist **waagrecht**; die Funktion ist konstant.	

Steigung – Steigungsdreieck

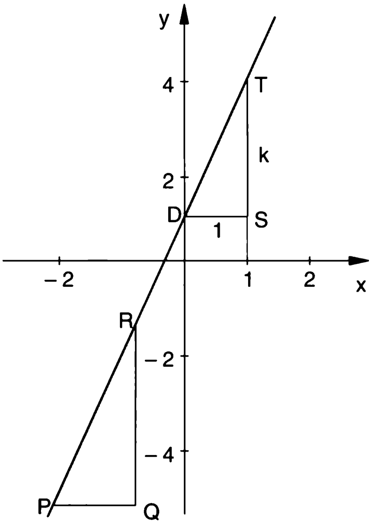


Abb. 5.13 Steigungsdreiecke

Neben dem besonderen Dreieck DST (siehe Abb. 5.13) zeichnen wir an ein beliebiges Geradenstück das Dreieck PQR.

Eckpunkte des Dreiecks PQR:
$P\ (x_1/y_1),\ Q\ (x_2/y_1),\ R\ (x_2/y_2)$

Eckpunkte des Dreiecks DST:
$D\ (0/d),\ S\ (1/d),\ T\ (1/d+k)$

Da die Dreiecke PQR und DST ähnlich sind, gilt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{1} = k$$

Die Dreiecke PQR und DST nennt man **Steigungsdreiecke**. Jedes rechtwinklige Dreieck dieser Art, dessen Katheten rechtwinklig zu den Koordinatenachsen sind, ist ein Steigungsdreieck. Für die Differenz $y_2 - y_1$ schreibt man kurz Δy, ebenso für $x_2 - x_1$ kurz Δx.

Das Verhältnis von „Höhendifferenz" $y_2 - y_1$ zu „horizontaler Differenz" $x_2 - x_1$ eines beliebigen Steigungsdreiecks einer Geraden ist also gleich k, weshalb man k die **Steigung** der Geraden nennt.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezeichnet man allgemein als **Differenzenquotienten** (Quotient zweier Differenzen).

Differenzenquotienten haben bei einer linearen Funktion stets den gleichen Wert k, gleichgültig, aus welchen Steigungsdreiecken sie gebildet werden. Ist $\Delta x = 1$, so ist $\Delta y = k$!

Steigungswinkel

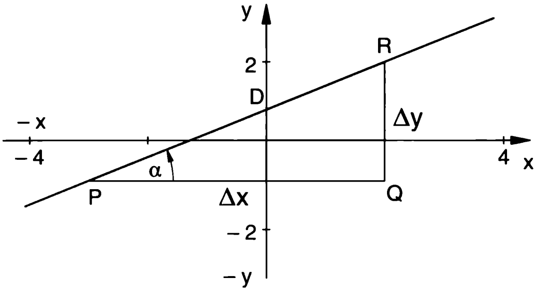


Abb. 5.14 Steigungsdreieck und Steigungswinkel

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Der Tangens des Steigungswinkels α ist gleich der Steigung k einer Geraden.

$$\boxed{\tan \alpha = k}$$

Beachte: Sind die Zeicheneinheiten auf den beiden Koordinatenachsen ungleich, so wird der Steigungswinkel verzerrt.

Beispiel 5.6 : Steigungswinkel einer Geraden

a) Eine Gerade ist durch die beiden Punkte P (1/– 1) und Q (3/4) gegeben.

b) Eine Gerade geht durch den Punkt R (1/– 2) und besitzt die Steigung –1.

Ermittle jeweils den Steigungswinkel.

Lösung

Zu **a)** $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-1)}{3 - 1} = \frac{5}{2}$; $k = \tan\alpha = \frac{5}{2}$; daraus $\alpha = 68{,}2°$.

Zu **b)**

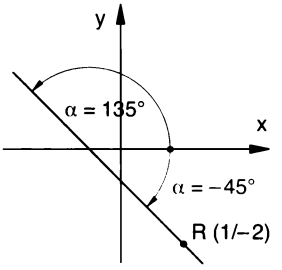


Abb. 5.15 Negative Steigung

$\tan\alpha = k = -1$; daraus ergibt sich mit dem Taschenrechner $\alpha = -45°$. Ist der Winkel negativ, so bedeutet dies, dass er von der positiven x-Achse ausgehend im Uhrzeigersinn aufgetragen wird (siehe Abb. 5.15).

Hinweis: Dies ist ein Winkel, der nicht mehr im I. Quadranten liegt; die Kreisfunktionswerte eines solchen Winkels haben wir noch nicht definiert. Die Behandlung der Kreisfunktionen in den übrigen Quadranten erfolgt in "Ingenieur-Mathematik 2".

Beispiel 5.7: Berechnung eines Funktionswertes aus der Wertetabelle

Von einer linearen Funktion kennt man eine Wertetabelle. Berechne mit Hilfe des Differenzenquotienten den fehlenden Wert.

x	−2	1	3
y	−7	y_2	3

Lösung

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{3 - (-7)}{3 - (-2)} = \frac{10}{5} = 2$; da *jeder* Differenzenquotient den Wert k hat, gilt beispielsweise auch $\frac{3 - y_2}{3 - 1} = 2$; daraus $y_2 = -1$.

Beispiel 5.8: Zeichnen einer linearen Funktion ohne Wertetabelle

Zeichne die Gerade $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 1$ ohne Wertetabelle.

Lösung

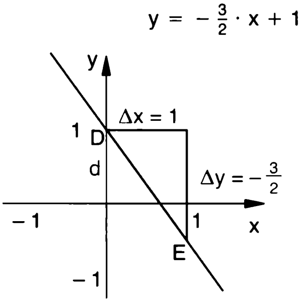


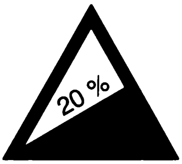
Abb. 5.16 Konstruktion einer Geraden

Beschreibung der Konstruktion:

1) Auftragen des Ordinatenabstandes d = 1 vom Koordinatenursprung ausgehend in Richtung der positiven y-Achse. Man erhält den Geradenpunkt D.
2) Für die Steigung gilt: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{3}{2}}{1}$. Man zeichnet daher von D ausgehend ein Steigungsdreieck mit den Katheten $\Delta x = 1$ (Δx ist positiv, daher wird es in positiver x-Richtung aufgetragen) und $\Delta y = -\frac{3}{2}$ (Δy ist negativ, daher wird es in Richtung der negativen y-Achse aufgetragen). Man erhält den Geradenpunkt E.
3) Die gesuchte Gerade verläuft durch die Punkte D und E.

Hinweis: Man könnte natürlich auch andere Steigungsdreiecke zeichnen. Wichtig ist nur, dass der Quotient k aus Δy und Δx gleich $-\frac{3}{2}$ ist; z.B. $\Delta y = -3$ und $\Delta x = 2$ oder $\Delta y = 6$ und $\Delta x = -4$ usw.

Eine **Steigung** oder ein **Gefälle** (negative Steigung) wird in der Praxis häufig so angegeben, dass man den Höhenunterschied Δy bei einem Horizontalunterschied Δx gleich 100 m oder 1 m angibt. So spricht man etwa von einer Steigung von 20 m auf 100 m oder 20 cm auf 1 m. In Abb. 5.17 ist dies festgehalten (nicht maßstäblich).



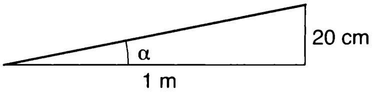


Abb. 5.17 Straßensteigung

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhenunterschied } \Delta y}{\text{Horizontalunterschied } \Delta x} = \frac{0{,}2 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0{,}2.$$

Da $0{,}2 = \frac{20}{100}$ und für $\frac{1}{100}$ kurz auch 1 % geschrieben wird, beträgt die Steigung 20 %.

Beispiel 5.9: Steigung einer Straße

Eine Alpenstraße überwindet bei einer Horizontalentfernung Δx = 2000 m (ersichtlich aus einer Straßenkarte) einen Höhenunterschied Δy = 180 m.

a) Berechne die (mittlere) Steigung!

b) Könnte ein Autofahrer bei der Berechnung der Steigung auch die vom Kilometerzähler angezeigte Streckenlänge s statt der Horizontalentfernung Δx nehmen?

Lösung

Zu **a)**

Abb. 5.18 Straßensteigung

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{180}{2000} = \frac{9}{100}.$

Das heißt, die Straße hat eine mittlere Steigung von 9 %.

Zu **b)** $\tan\alpha = \frac{180}{2000} \Rightarrow \alpha = 5{,}1°.$

$$\frac{\Delta y}{s} = \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{\cos\alpha}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\cos\alpha = \frac{180 \text{ m}}{2000 \text{ m}}\cdot\cos\alpha = 0{,}09 \text{ (auf 2 Nachkommastellen gerundet)} = k.$$

Ob die Horizontalentfernung Δx oder die gefahrene Streckenlänge s genommen wird, ist praktisch ohne Bedeutung; die Abweichung ist so gering, dass sie bei der vorliegenden Genauigkeit der Angabe nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Beispiel 5.10: Steigung ist 100 %

Wie groß ist der Steigungswinkel, wenn die Steigung 100 % beträgt ?

Lösung

$\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°.$

Beispiel 5.11: Berechnungen bei einer Geraden

Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}\cdot x - 1$.

a) Stelle fest, ob die Punkte P (3/− 0,5) und Q (− 2/− 2) auf der Geraden liegen.

b) Wie lautet die Nullstelle der linearen Funktion?

c) Überprüfe die Berechnungen anhand einer zeichnerischen Lösung.

Lösung

Zu **a)** **Ein Punkt liegt genau dann auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen.** Die Geradengleichung in Normalform ist gerade eine Formel zur Berechnung der y-Koordinate der Geradenpunkte.

Man setzt die x-Koordinate der einzelnen Punkte in die Normalform der Geraden ein und berechnet die y-Koordinate. Diesen erhaltenen y-Wert vergleicht man mit der y-Koordinate des Punktes. Stimmen beide Werte überein, so liegt der Punkt auf der Geraden.

P: $y = \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = \frac{1}{2}$

Die y-Koordinate von P ist $-\frac{1}{2}$. Das bedeutet, dass der Punkt P nicht auf der Geraden liegt.

Q: $y = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = -2$

Die y-Koordinate von Q ist −2. Das bedeutet, dass der Punkt Q auf der Geraden liegt.

Zu **b)** Die y-Koordinate (und damit der Funktionswert) an einer Nullstelle ist gleich 0.

$y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

$0 = \frac{1}{2} \cdot x - 1$; daraus $x = 2$.

Die Nullstelle hat den Wert 2; N(2/0) ist der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse.

Zu **c)**

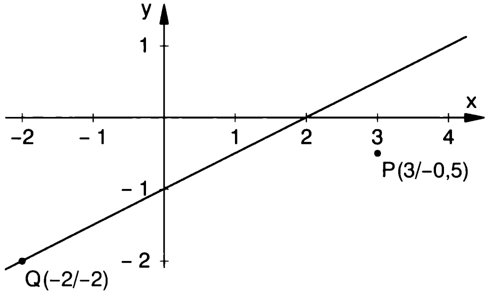


Abb. 5.19 $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

Aus der Zeichnung (Abb. 5.19) kann man die Ergebnisse der Berechnung bestätigen.

Beispiel 5.12: Aufstellen von Geradengleichungen

a) Eine Gerade verläuft durch den Punkt P (1/2) und hat den Steigungswinkel $\alpha = 40°$.

b) Eine Gerade ist durch die Punkte P(2/4) und Q(8/1) gegeben.

c) Eine Gerade ist graphisch nach Abb. 5.20 gegeben.

Ermittle jeweils die Gleichung der Geraden.

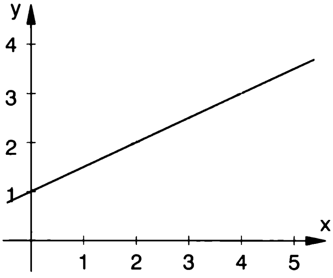


Abb. 5.20 Zu Beispiel 5.12 c)

Lösung

Zu **a)** $k = \tan 40° = 0,839 \approx 0,84$;

Die Koordinaten von P müssen die Geradengleichung $y = 0,84x + d$ erfüllen: $2 = 0,84 \cdot 1 + d$ daraus $d = 1,16$; somit lautet die gesuchte Geradengleichung $y = 0,84 \cdot x + 1,16$.

Überprüfe die Rechnung durch eine Zeichnung!

Zu **b)** $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{1-4}{8-2} = -\frac{1}{2}$; die Koordinaten von P (man könnte auch Q verwenden) müssen die Gleichung $y = -\frac{1}{2} \cdot x + d$ erfüllen: $4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + d$; daraus $d = 5$.

Die gesuchte Geradengleichung lautet: $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 5$.

Zu **c)**

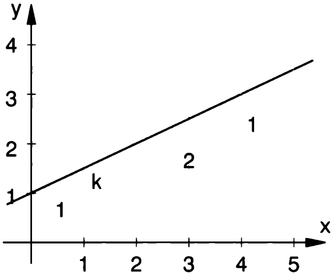


Abb. 5.21 Ablesen von k und d

Aus einem Steigungsdreieck (Abb. 5.21) mit $\Delta x = 1$ kann k unmittelbar abgelesen werden: $k = \frac{1}{2}$. Oft kann es günstig sein, ein Steigungsdreieck mit $\Delta x \neq 1$ zu wählen. Aus einem solchen (Abb. 5.21) mit $\Delta x = 2$ und $\Delta y = 1$ erhält man wieder $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$. Weiters liest man $d = 1$ ab.

Geradengleichung somit: $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$.

Beispiel 5.13: Zueinander normale Geraden

Gegeben ist die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und auf ihr der Punkt $P(2/y_0)$. Stelle die Gleichung der Geraden g_2 normal zu g_1 durch den Punkt P auf.

Lösung

Bestimmung der y-Koordinate y_0 von P: $y_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; P(2/3)

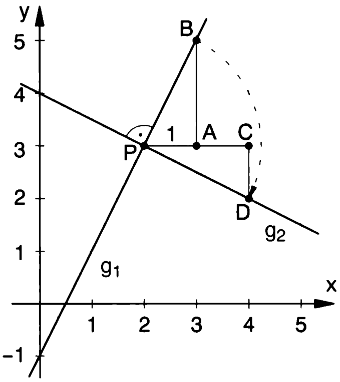


Abb. 5.22 Normale Geraden

Wir legen im Punkt P (Abb. 5.22) das Steigungsdreieck PAB an die Gerade g_1. Die Steigung k_1 von g_1 ist gleich 2. Das Steigungsdreieck PAB von g_1 ist deckungsgleich dem Steigungsdreieck PCD der Normalen g_2. Man liest als Steigung k_2 von g_2 ab: $k_2 = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

g_2 besitzt daher die Gleichung $y = -\frac{1}{2} \cdot x + d$.

P auf g_2: $3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + d$; daraus $d = 4$.

Somit lautet die Gleichung der *Normalen* g_2 zu g_1:

$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$.

In Beispiel 5.13 war $k_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{k_1}$. Aus dem Lösungsgang lässt sich vermuten, dass dieser Zusammenhang stets zwischen den Steigungen normal zueinander liegender Geraden gilt ($k_1 \neq 0$). Man kann auch zeigen, dass die Umkehrung gilt:

Zwei Geraden mit den Steigungen k_1 und k_2 sind genau dann **normal** zueinander, wenn $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ ($k_1 \neq 0$).

Der Graph einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ ist eine Gerade. k ist die **Steigung** der Geraden.
$k > 0$: die Gerade steigt; $k < 0$: die Gerade fällt; $k = 0$: die Gerade ist waagrecht.
d gibt die Verschiebung der Ursprungsgeraden $y = k \cdot x$ in y-Richtung an. Man bezeichnet d auch als den **Ordinatenabstand** oder **y-Achsenabstand**.

Der Tangens des Steigungswinkels α ist gleich der **Steigung k** der Geraden: $\tan \alpha = k$.

Normale Geraden: Für ihre Steigungen k_1 und k_2 gilt: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ $(k_1 \neq 0)$.

Aufgaben

5.1 Ermittle zeichnerisch oder wahlweise graphisch mit dem Taschenrechner die Wertemenge folgender Funktionen und gib sie in Intervallschreibweise an. Bestätige das Ergebnis rechnerisch.

a) $y = 2 \cdot x - 3$; $D = [-3, 4]$ **b)** $2x - 3y = 5$; $D = [-2, 10]$ **c)** $2y + 3x - 8 = 0$; $D = [-3, 3]$

5.2 Ermittle zeichnerisch oder wahlweise graphisch mit dem Taschenrechner die Definitionsmenge folgender Funktionen und gib sie in Intervallschreibweise an. Bestätige das Ergebnis rechnerisch.

a) $2y - 3x = 5$ $W = [-3, 4]$ **b)** $y = 3x$ $W = [3, 6]$ **c)** $-2x - 2y = 1$ $W = [-2, 5]$

5.3 Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $2y - 3x = -2$.

a) Untersuche, ob der Punkt P(4/5) auf der Geraden liegt.

b) Berechne die Steigung und den Ordinatenabstand d! Wie ist das Monotonieverhalten der Funktion?

c) Gib die Nullstelle an.

5.4 Zeichne die Graphen folgender linearen Funktionen *ohne* Wertetabelle und zeichne mit Farbe den y-Abstand ein, der der Steigung bzw. dem Ordinatenabstand entspricht.

a) $y = \frac{1}{2} \cdot x - 2$ **b)** $y + x = 1$ **c)** $2y + \frac{1}{3} \cdot x = 0$ **d)** $2x - 3y = 6$ **e)** $2x - 2y = 5$

5.5 Gegeben ist der Neigungswinkel und ein Punkt Q einer Geraden. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

a) $\alpha = 30°$, Q(0/2) **b)** $\alpha = 45°$, Q(2/3) **c)** $\alpha = 150°$, Q(4/0) **d)** $\alpha = -20°$, Q(–1/3)
Überprüfe das Ergebnis anhand einer Zeichnung!

5.6 Bestimme die Nullstelle der Funktion:

a) $3y - 4x = 6$ **b)** $2x + 4y = 1$ **c)** $3y - 4x = 0$ **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ **e)** $x - y = 5$
Überprüfe das Ergebnis anhand einer Zeichnung!

5.7 Überprüfe rechnerisch und graphisch, ob folgende Punkte auf der Geraden $3x - 2y = 4$ liegen!

a) P(0/–2) **b)** Q(2/1) **c)** R(–2/5) **d)** S(3/–2) **e)** T(1/$-\frac{1}{2}$)

5.8 Von einer Geraden kennt man:

a) P(3/4) und $d = 5$ **b)** Q(7/–8) und $k = -2$ **c)** R(1/–1) und $\alpha = 45°$
Bestimme die Gleichung der Geraden.

5.9 Bestimme die Gleichung der Geraden, wenn zwei Punkte R und S gegeben sind. Bestimme weiters die Nullstelle der zugehörigen linearen Funktion.

a) R(2/–3), S(5/–10) **b)** R(–1/2), S(3/–3) **c)** R(0/1), S(4/2) **d)** R(–4/–4), S(4/4)

Überprüfe das Ergebnis nach Möglichkeit graphisch am Taschenrechner!

5.10 Löse graphisch folgende linearen Gleichungen:

a) $4 - 3x = 0$ **b)** $2x + 3 = 12$ **c)** $0{,}5x - 3 = 2x + 1$ **d)** $4x - 3 = 8$

5.11 Ermittle aus dem Graphen oder wahlweise graphisch mit dem Taschenrechner von jeder Geraden 2 Argumentdifferenzen und die dazugehörigen Funktionswertdifferenzen. Bestimme den Differenzenquotienten und interpretiere das Ergebnis.

a) $2y + 3x = 4$ **b)** $y = \frac{2}{3}x - 2$ **c)** $3x - 4y = 12$ **d)** $x = 2y - 3$

5.12 Stelle die Gleichungen der Koordinatenachsen auf. Warum ist die Gleichung der y-Achse nicht die Gleichung einer Funktion?

5.13 Erstelle einen Zusammenhang zwischen dem Neigungswinkel einer Geraden und der Monotonie der linearen Funktion.

5.14 Eine Gerade g hat die Steigung k. Eine zu ihr normale Gerade h hat dann die Steigung $-\frac{1}{k}$. Sei g die Gerade mit $y = \frac{1}{2} \cdot x$ und h die zu g normal stehende Ursprungsgerade. Zeige geometrisch, dass die Steigung von h gleich –2 ist.

5.15 Gegeben ist die Gleichung der Geraden g: $y = 2x + 3$ und ein Punkt P(3/–4), wobei $P \notin g$. Bestimme die Gleichung der Geraden, die

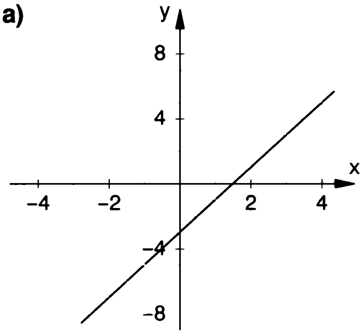
a) parallel zu g durch P geht; **b)** normal zu g durch P geht.

5.16 Gegeben ist die Gerade g durch die Gleichung $2x + 3y = 4$ und die Gerade h durch die Steigung $k = \frac{2}{3}$ und einen Punkt A(1/1). Bestimme den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden. Vor Ausführung der Berechnung fertige eine Skizze an!

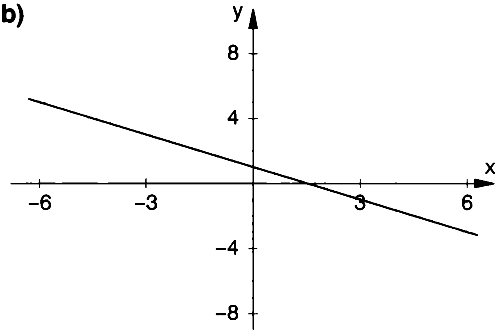
5.17 Bestimme die Gleichungen der Geraden, die mit der Geraden g: $3x - 6 = 2y$ einen Winkel von 20° einschließen und durch den Punkt P(2/2) gehen. Skizze!

5.18 Ermittle die Gleichungen folgender Geraden. Überprüfe das Ergebnis graphisch, wenn möglich am Taschenrechner. Ist jeder der dargestellten Graphen eine Funktion? (Begründung) Wo kann man direkt die Steigung ablesen?

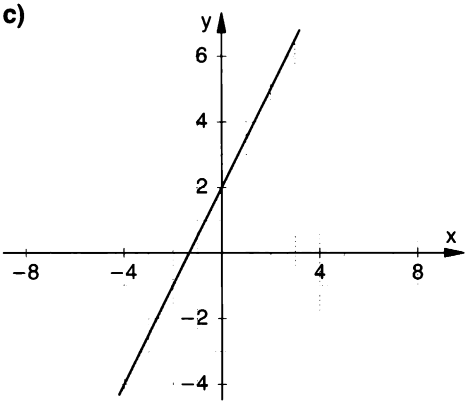
a)



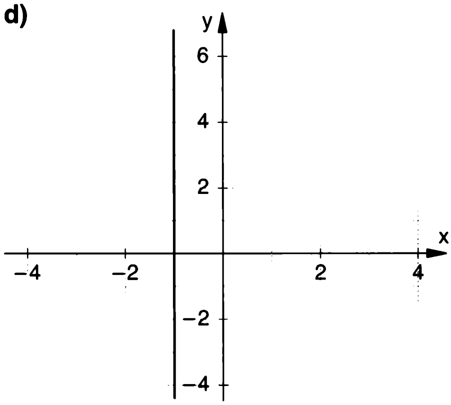
b)



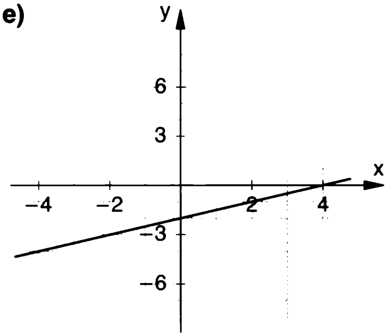
c)



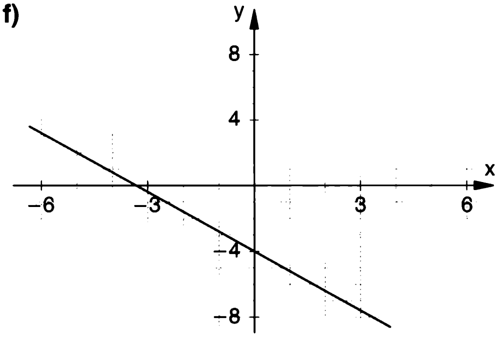
d)



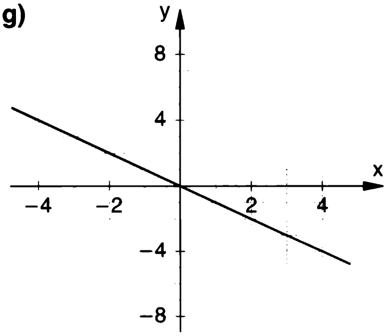
e)



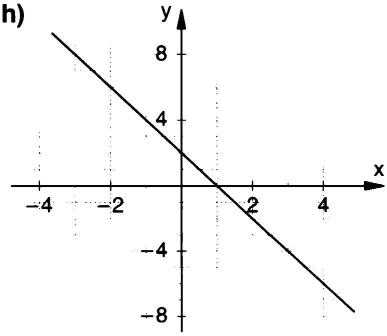
f)



g)



h)



5.19 Von einer linearen Funktion ist eine Wertetabelle gegeben. Bestimme mit Hilfe des Differenzenquotienten die fehlende Koordinate.

a)

x	−2	0	4
y	3	y_2	0

b)

x	−3	x_2	4
y	−3	5	11

c)

x	−3	0	4
y	2	2	y_3

5.20 Überprüfe, welche der folgenden Wertetabellen lineare Funktionen festlegen könnten.

a)

x	0	3	4
y	8	14	16

b)

x	−3	−2	0	1
y	13	3	−5	−3

c)

x	−3	0	3	7
y	−1	5	11	19

5.6 Lineare Interpolation

Es kommt in der Praxis öfters vor, dass von einer Funktion nur Funktionswerte zu *einzelnen* x-Werten vorliegen. Dabei handelt es sich meist um **Messreihen** (wie etwa jene im Beispiel 5.2 auf Seite 168) oder um **Funktionstabellen** ("Funktionstafeln").

Bei Messreihen ist die zugrunde liegende Funktionsgleichung im Allgemeinen unbekannt. Bei vielen Funktionstabellen ist die Berechnung der Funktionswerte aufwendig, was allerdings durch das Vorliegen leistungsfähiger Rechenhilfsmittel immer mehr in den Hintergrund tritt.

Sind nun in solchen Fällen **Zwischenwerte** gefragt, so können diese durch eine lineare Interpolation (interpolieren = zwischenschalten) *näherungsweise* bestimmt werden. Der Grundgedanke ist, dass man den Funktionsgraphen zwischen zwei auftretenden x-Werten durch ein Geradenstück ersetzt. So gut, wie die Gerade den Funktionsgraphen ersetzt, so gut ist die Näherung.

Wir beginnen mit der Berechnung von Zwischenwerten bei der linearen Funktion, wo natürlich die lineare Interpolation ein genaues Ergebnis liefert. In Beispiel 5.7 (Seite 178) haben wir den fehlenden y-Wert einer linearen Funktion bei bekanntem x aus der Kenntnis von zwei Punkten der Geraden ermittelt.

Beispiel 5.14 : Einführendes Beispiel

Von einer Geraden kennt man die Punkte P (1/2) und Q (5/4).

a) Bestimme den Funktionswert der zugehörigen linearen Funktion an der Stelle x = 3,5.

b) Zu welchem x-Wert gehört der Funtionswert y = 2,5?

Löse diese Aufgabe, ohne vorher die Gleichung der Geraden aufzustellen.

Lösung

Zu **a)** Mit D als Differenz der y-Koordinaten und H (wie "Horizontaldifferenz") als Differenz der x-Koordinaten von P und Q gilt (siehe Abb. 5.24): $\frac{y-2}{x-1} = \frac{D}{H}$.

Begründung: Auf beiden Seiten der Gleichung steht ein Differenzenquotient und Differenzenquotienten sind bei einer linearen Funktion stes gleich groß (nämlich gleich der Geradensteigung k).

Mit D = 4 − 2 = 2 und H = 5 − 1 = 4 ergibt sich: $\frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{4}$ und für die Zwischenstelle x = 3,5 der interpolierte Wert

$y = \frac{2}{4}(3{,}5 - 1) + 2 = 3{,}25.$

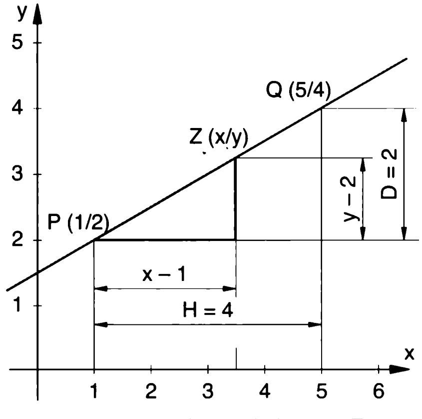


Abb. 5.24 Lineare Interpolation von Z zwischen P und Q

Zu **b)** Setzt man in die Gleichung $\frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{4}$ für y = 2,5, so erhält man $\frac{2{,}5-2}{x-1} = \frac{2}{4}$ und damit für die zugehörige Zwischenstelle $x = \frac{(2{,}5-2)\cdot 4}{2} + 1 = 2$.

Die Gleichung $\frac{y-2}{x-1} = \frac{D}{H}$ lässt sich nun leicht verallgemeinern: Z (x/y) ist der "Zwischenpunkt" (siehe Abb. 5.25) auf der Geraden durch die Punkte P (x_1/y_1) und Q (x_2/y_2). Weiters gelten die Beziehungen:

$D = y_2 - y_1$ ... Tafeldifferenz
$H = x_2 - x_1$ ... Schrittweite
$d = y - y_1$ .... Rechendifferenz
$h = x - x_1$ .... Argumentzuwachs

Die Namen nehmen Bezug auf die Anwendung der linearen Interpolation bei Funktionstafeln.

Dann gilt: $\frac{d}{h} = \frac{D}{H}$.

Daraus errechnet sich die

Interpolationsformel für die y-Koordinate an der Zwischenstelle x:

$y = y_1 + d$ mit $d = \frac{h}{H} \cdot D$

In Worten: Die Rechendifferenz d ist der Bruchteil $\frac{h}{H}$ der Tafeldifferenz D. Sie wird zu y_1 addiert.

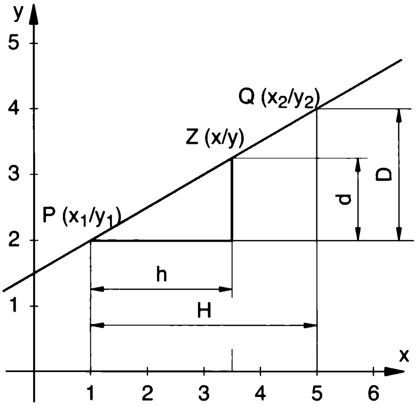


Abb. 5.25 Aufstellen einer Interpolationsformel

Die Werte x_1 und x_2 bezeichnet man als **Stützstellen** bei der Interpolation. Wird die Zwischenstelle x für einen vorgegebenen y-Wert verlangt, so kann ebenfalls die Interpolationsformel verwendet werden, wenn man *überall* die x- durch y-Koordinaten und die y- durch x-Koordinaten ersetzt.

Beispiel 5.15 : Lineare Interpolation einer nichtlinearen Funktion

Berechne mit Hilfe der linearen Interpolation näherungsweise den Funktionswert der quadratischen Funktion $y = \frac{1}{2} x^2$ an der Stelle $x = 2,5$. Verwende dafür die Funktionswerte an den Stützstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Lösung

$y_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 0,5$; $y_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 4,5$;

$h = 2,5 - 1 = 1,5$;

$H = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$;

$D = y_2 - y_1 = 4,5 - 0,5 = 4$;

$y = y_1 + \frac{h}{H} \cdot D = 0,5 + \frac{1,5}{2} \cdot 4 = 3,5$.

Zum Vergleich der genaue Wert:

$\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 = 3,125$

Die Größe des Fehlers hängt von der Schrittweite H und von der Krümmung der Funktion ab.

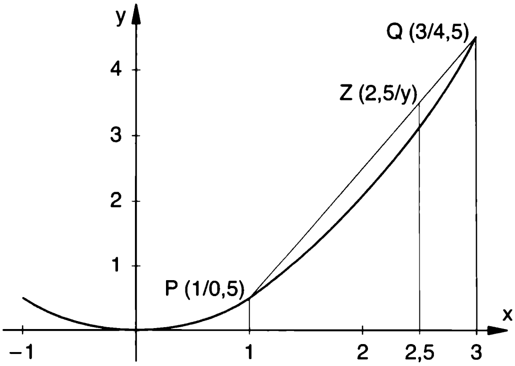


Abb. 5.26 Lineare Interpolation bei einer nichtlinearen Funktion

Beispiel 5.16 : Lineare Interpolation einer empirischen Funktion

Im Beispiel 5.2 wurde die Temperatur alle 2 Stunden gemessen (siehe Tabelle). Ermittle mit Hilfe der linearen Interpolation

a) die Temperatur um 11 Uhr;

b) den Zeitpunkt am Vormittag, zu welchem die Temperatur 10 °C betrug.

x: Tageszeit *t*	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24 Uhr
y: ϑ in °C	6,0	5,8	5,0	6,0	9,0	11,2	15,6	16,0	14,8	13,0	11,0	9,4	8,2

Lösung

Der Temperaturverlauf *zwischen* den Messzeiten ist nicht bekannt. Eine Ermittlung von Zwischenwerten mit Hilfe der linearen Interpolation bedeutet, dass wir einen linearen Temperaturverlauf zwischen den Messzeiten annehmen. Graphisch heißt dies, dass wir die Messpunkte geradlinig verbinden.

Zu **a)** Die beiden Stützstellen für die Interpolation sind $t_1 = 10$ und $t_2 = 12$. Daher gilt:

$\vartheta_1 = 11{,}2$; $\vartheta_2 = 15{,}6$;
$h = t - t_1 = 11 - 10 = 1$;
$H = t_2 - t_1 = 12 - 10 = 2$;
$D = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 15{,}6 - 11{,}2 = 4{,}\ 4$;
$\vartheta = \vartheta_1 + \frac{h}{H} \cdot D = 11{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 4{,}4 = 13{,}4\,°C$.

Zu **b)** Nun ist die umgekehrte Interpolationsaufgabe zu lösen. Dies kann nach der bisherigen Vorgangsweise geschehen, wenn wir die beiden Messwertzeilen vertauschen, wie es im folgenden Ausschnitt gezeigt wird.

x: ϑ in °C	6,0	9,0	11,2	15,6
y: Tageszeit t	6	8	10	12

Die beiden Stützstellen für die Interpolation sind $\vartheta_1 = 9{,}0\,°C$ und $\vartheta_2 = 11{,}2\,°C$.
Zur Verdeutlichung:

$H = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 11{,}2 - 9{,}0 = 2{,}2$;
$D = t_2 - t_1 = 10 - 8 = 2$;
$h = \vartheta - \vartheta_1 = 10{,}0 - 9{,}0 = 1{,}0$;
$t = t_1 + \frac{h}{H} \cdot D = 8 + \frac{1{,}0}{2{,}2} \cdot 2 = 8{,}9$ Uhr $\approx$ 8 Uhr 55 min.

Beispiel 5.17 : Lineare Interpolation in einer Tabelle

Aus der nebenstehenden Tabelle ist

a) der Funktionswert an der Stelle $x = 3{,}37$,

b) das Argument zum Funktionswert $y = 0{,}494$

näherungsweise mit Hilfe der linearen Interpolation zu ermitteln.

x	y
3,00	0,477
3,20	0,505
3,40	0,531
3,60	0,556

Lösung

Zu **a)** $x = 3{,}37$ liegt zwischen $x_1 = 3{,}20$ und $x_2 = 3{,}40$;

$y_1 = 0{,}505$; $y_2 = 0{,}531$;

H und D werden der Einfachheit halber gerne in Einheiten der letzten Stelle gerechnet, also h und H in Hundertstel und D in Tausendstel:

$H = x_2 - x_1 = 340 - 320 = 20$;
$h = x - x_1 = 37 - 20 = 17$;
$D = y_2 - y_1 = 531 - 505 = 26$.
$d = \frac{h}{H} \cdot D = \frac{17}{20} \cdot 26 = 22{,}1 \approx 22$.

Da die Tabellenwerte im Allgemeinen gerundete Zahlen sind, muss auch d auf die gleiche Genauigkeit wie die Tabellenwerte, also auf Tausendstel gerundet werden; da d in Tausendstel angeschrieben wurde, bedeutet dies nun eine Rundung auf Einer. Schließlich sind noch y_1 und d zu addieren:

$y = y_1 + d = 0{,}505 + 0{,}022 = 0{,}527$.

Der Funktionswert an der Stelle $x = 3{,}37$ ist daher näherungsweise gleich 0,527.

Zu **b)** Wir vertauschen wiederum x und y und erhalten:

$H = y_2 - y_1 = 505 - 477 = 28;$

$h = y - y_1 = 494 - 477 = 17;$

$D = x_2 - x_1 = 320 - 300 = 20.$

$d = \frac{h}{H} \cdot D = \frac{17}{28} \cdot 20 = 12{,}14 \approx 12.$

$x = x_1 + d = 3{,}00 + 0{,}12 = 3{,}12.$

Zum Funktionswert $y = 0{,}494$ gehört also näherungsweise die Stelle $x = 3{,}12$.

Möchte man zwischen zwei bekannten Stellen x_1 und x_2 einer Funktion an der Stelle x den Funktionswert y **linear interpolieren**, so verwendet man folgende Interpolationsformel:

$$y = y_1 + d \qquad \text{mit } d = \frac{h}{H} \cdot D$$

$D = y_2 - y_1$ ... Tafeldifferenz
$H = x_2 - x_1$ ... Schrittweite
$d = y - y_1$ .... Rechendifferenz
$h = x - x_1$ .... Argumentzuwachs

Wird die Zwischenstelle x für einen vorgegeben y-Wert verlangt, so kann man die Interpolationsformel ebenfalls verwenden, indem man überall die x- durch die y-Koordinaten und die y- durch die x-Koordinaten ersetzt.

$$x = x_1 + d \qquad \text{mit } d = \frac{h}{H} \cdot D$$

$D = x_2 - x_1$
$H = y_2 - y_1$
$d = x - x_1$
$h = y - y_1$

Aufgaben

Für alle Aufgaben 5.21 - 5.30 gilt: Bestimme mit Hilfe der **linearen Interpolation** die gesuchten Größen.

5.21 Von einer nichtlinearen Widerstandskennlinie kennt man folgende Messpaare:

ϑ in °C	20,0	40,0	60,0	80,0	100,0
R in Ω	510	290	178	120	80

a) Berechne den Widerstand R bei einer Temperatur von
(1) $\vartheta = 30$ °C (2) $\vartheta = 50$ °C (3) $\vartheta = 70$ °C (4) $\vartheta = 75$ °C (5) $\vartheta = 95$ °C.

b) Berechne die Temperatur zu folgenden Widerstandswerten
(1) $R = 400$ Ω (2) $R = 200$ Ω (3) $R = 150$ Ω (4) $R = 100$ Ω.

5.22 An die Serienschaltung eines Widerstands R und eines Kondensators C wird eine Spannung angelegt, die linear mit der Zeit t(0s $\leqslant t \leqslant$ 8s) ansteigt. Für die Spannung U_R am Widerstand R werden in Abhängigkeit von der Zeit folgende Werte gemessen:

t in s	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
U_R in V	0	39,35	63,21	77,69	86,47	91,79	95,61	96,96	98,17

a) Bestimme die Spannung U_R am Widerstand R zum Zeitpunkt t:
(1) $t = 0{,}5$ s (2) $t = 0{,}75$ s (3) $t = 2{,}5$ s (4) $t = 4{,}25$ s (5) $t = 7, 5$ s.

b) Bestimme den Zeitpunkt t, wenn die Spannung U_R am Widerstand R
(1) 25,00 V (2) 61,25 V (3) 90,26 V (4) 97,25 V beträgt.

5.23 Die Luftdichte ϱ in kgm^{-3} ist druck- und temperaturabhängig. Für einen Druck von 100 kPa ergeben sich folgende Werte:

ϑ in °C	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0
ϱ in kgm^{-3}	1,224	1,216	1,207	1,198	1,190	1,181	1,173	1,165	1,157	1,149

a) Bestimme die Dichte ϱ der Luft bei einer Temperatur:
(1) 1°C (2) 1,5°C (3) 6,8°C (4) 10,5°C (5) 16,5°C.

b) Bestimme die Temperatur ϑ bei einer Luftdichte ϱ:
(1) 1,220 kgm^{-3} (2) 1,209 kgm^{-3} (3) 1,152 kgm^{-3}.

5.24 Für die Abhängigkeit der Siedetemperatur des Wassers vom Druck p gelten folgende Werte:

p in kPa	68,65	78,45	88,26	98,07	101,3	147,1	196,1	245,2	294,2
ϑ in °C	89,45	92,99	96,18	99,09	100	110,79	119,62	126,79	132,88

a) Bestimme die Siedetemperatur des Wassers bei folgendem Druck:
(1) p = 75,80 kPa (2) p = 93,35 kPa (3) p = 112,30 kPa (4) p = 265,45 kPa.

b) Bestimme den Druck p zu den Siedetemperaturen:
(1) 90,75°C (2) 99,25°C (3) 105,55°C (4) 120,00°C.

5.25 Zur Beurteilung der Wasserqualität kann u.a. die Messung der Trübung herangezogen werden. Dazu wird die Stärke der Trübung im Photometer gemessen.

Farbstärke in °	1	2	5	10
Extinktion = Messwert des Photometers	0,2	0,4	1,0	2,0

Welcher Farbstärke entspricht eine Extinktion von
a) 0,3 **b)** 0,5 **c)** 0,6 **d)** 1,25 **e)** 1,75?

5.26 Bei der gaschromatographischen Analyse kann aus der Peakhöhe die Konzentration eines Stoffes, z.B. die Konzentration an giftigem Methylalkohol (CH_3-OH), ermittelt werden:

Methylalkohol in mg/*l*	0,1	0,2	0,4	0,8
Peakhöhe (= Zeigerausschlag) in mm	30	60	120	240

Welcher Konzentration an Methylalkohol entspricht eine Peakhöhe von
a) 45 mm **b)** 55 mm **c)** 90 mm?

5.27 Von einer Funktion liegt eine Wertetabelle vor:

x	y
0,4752	0,4575
1,0032	0,8432
1,4784	0,9957
2,3232	0,7301

a) Ermittle den Funktionswert y an der Stelle:
(1) x = 0,5 (2) x = 1 (3) x = 1,45 (4) x = 2,05.

b) Bestimme das Argument x zu folgenden Funktionswerten:
(1) y = 0,5523 (2) y = 0,9300 (2 Möglichkeiten) (3) y = 0,6900.

5.28 Ebenso:

x	y
-1,8319	2,4992
-0,5882	1,3419
0,0840	0,9589
1,1933	0,5507

a) Ermittle den Funktionswert y an der Stelle:
(1) x = -1,5 (2) x = -0,8567 (3) x = 0 (4) x = 1,0534.

b) Bestimme das Argument x zu folgenden Funktionswerten:
(1) y = 1,5523 (2) y = 0,9325 (3) y = 0,8457.

5.29 Von einer Funktion ist folgende Wertetabelle bekannt:

x	y
-3,00	2,000
-2,90	2,190
-2,80	2,360
-2,70	2,510
-2,60	2,640
-2,50	2,750
-2,40	2,840
-2,30	2,910

a) Ermittle näherungsweise die Funktionswerte zu folgenden Stellen x:
(1) x = -2,850 (2) x = -2,650 (3) x = -2,450.

b) Ermittle näherungsweise die Argumente x zu folgenden Funktionswerten:
(1) y = 2,0550 (2) y = 2,3500 (3) y = 2,880.

5.30 Von einer Funktion ist folgende Wertetabelle bekannt:

x	y
0,000	0,0000
0,500	0,5463
1,000	1,5574
1,500	14,1010
2,000	-2,1850
2,500	-0,7470
3,000	-0,1425
3,500	0,3746

a) Ermittle näherungsweise die Funktionswerte zu folgenden Stellen x:
(1) x = 0,750 (2) x = 1,650 (3) x = 2,450.

b) Ermittle näherungsweise die Argumente x zu folgenden Funktionswerten:
(1) y = 2,0550 (2) y = -1,3500 (3) y = -0,8800.

5.7 Einige besondere Funktionen

Betragsfunktion: y = |x| (sprich: y = Betrag von x); EDV- und Taschenrechnerbezeichnung: ABS (abs).

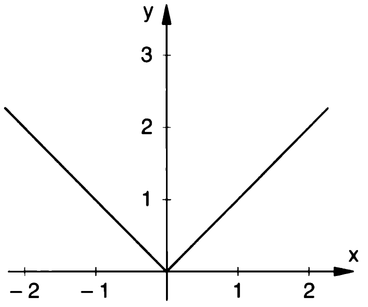


Abb. 5.27 Betragsfunktion

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ für } x < 0 \\ x \text{ für } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Die zwei Halbgeraden ihres Graphen bilden im Ursprung eine "Spitze".

Signumfunktion (Vorzeichenfunktion): y = sgn x (sprich: y = signum von x); EDV- und Taschenrechnerbezeichnung: SIGN (sign).

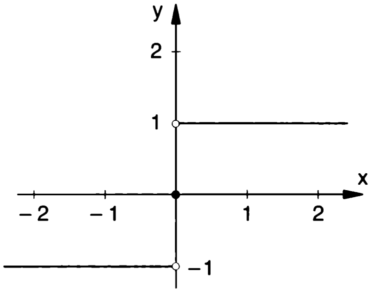


Abb. 5.28 Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

Ihr Graph besitzt einen einzeln gelegenen Punkt im Ursprung.

Hinweis: Bedeutung der Punktsymbole ● ○, siehe Seite 37f.

Ganzzahliger-Anteil-Funktion (Integerfunktion): y = int x (sprich: y = integer von x; siehe Seite 31.)

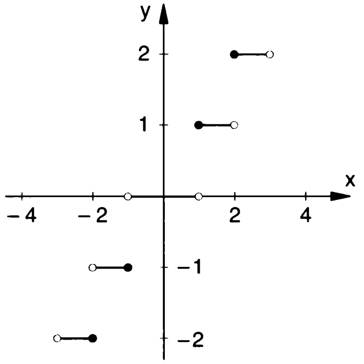


Abb. 5.29 Ganzzahliger-Anteil-Funktion

int x entsteht aus x durch Weglassen etwaiger Ziffern nach dem Komma.

int (−0,93) = 0; int 0,93 = 0.
int (−1,93) = −1; int 1 = 1.

5.8 Anwendungen linearer Funktionen und stückweise linearer Funktionen

Die mathematische Beschreibung der Wirklichkeit erfolgt in der Regel auf vereinfachende Weise, um gestellte Aufgaben leichter lösen zu können. Bekannte Beispiele dafür sind in der Physik die Begriffe "Massenpunkt" oder "starrer Körper". Es gibt streng genommen keinen Massenpunkt (einen Punkt mit der Masse null?) oder einen wirklich starren Körper. Diese Vereinfachung ist trotzdem zweckmäßig.

Die mathematische Beschreibung der Wirklichkeit nennt man ein **Modell** dieser Wirklichkeit.

Modelle gelten nur in gewissen Grenzen; außerhalb dieser Grenzen weichen die Ergebnisse des Modells aufgrund der vorgenommenen Vereinfachung von der Wirklichkeit zu sehr ab. Überlege, worin die Vereinfachungen bei den folgenden Beispielen bestehen!

Beispiel 5.18 : Bewegungsaufgabe

Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Es wird mit einer Verzögerung von $a = -2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ gleichmäßig bis zum Stillstand abgebremst.

a) Stelle graphisch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit dar.

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach einer Bremszeit von 5 Sekunden?

c) Was gibt die Steigung der Geraden an? (Erkläre die Bedeutung des Differenzenquotienten!)

d) Wie verändert sich die Bremszeit (Zeit zwischen Bremsbeginn und Stillstand), wenn die Bremsverzögerung halbiert wird? (Erklärung)

Lösung

Es gilt die Bewegungsgleichung: $v = v_0 + a \cdot t = 30 - 2t$.

v: Geschwindigkeit des Fahrzeuges t Sekunden nach Bremsbeginn, v_0: Geschwindigkeit des Fahrzeuges bei Bremsbeginn.

Die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit ab, da $a < 0$. Wir überlegen zuerst, welche Werte für die Bremszeit t sinnvoll sind, d.h. wir suchen die Definitionsmenge $\mathbb{D}$.

1. Für t gilt: $t \geqslant 0$.
2. Der Bremsvorgang dauert so lange, bis $v = 0$ ist.
   $0 = 30 - 2 \cdot t \Rightarrow t = 15$
   Die Bremszeit $t = 15$ s.

Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist demnach das abgeschlossene Intervall [0, 15].

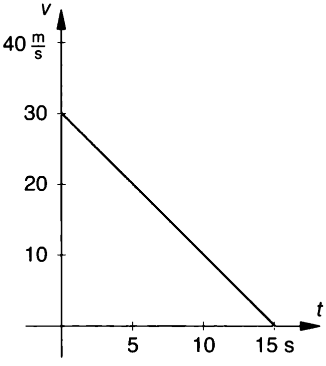


Abb. 5.30 Zu Beispiel 5.18

Zu **a)** Zeichnen der linearen Funktion

1) Aus der Funktionsgleichung $v = -2t + 30$ lesen wir ab: $k = -2$ und $d = 30$.

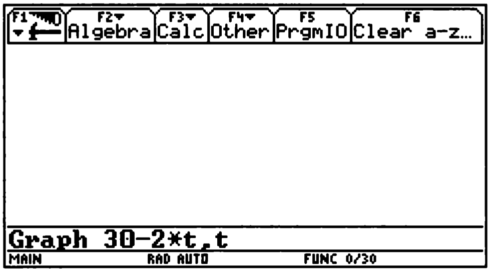
2) Wir ermitteln die Koordinaten zweier Punkte:
$t = 0$: $v = 30$;
$t = 15$: $v = 0$.
Zur Kontrolle könnte man noch einen dritten Punkt ermitteln.

Zu **b)** Aus $v = 30 - 2t$ folgt $v(5) = 30 - 2 \cdot 5 = 20$.
Die Geschwindigkeit nach einer Bremszeit von 5 Sekunden beträgt 20 ms^{-1}.

Zu **c)** $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a < 0$, da $\Delta v < 0$ . . . Verzögerung.

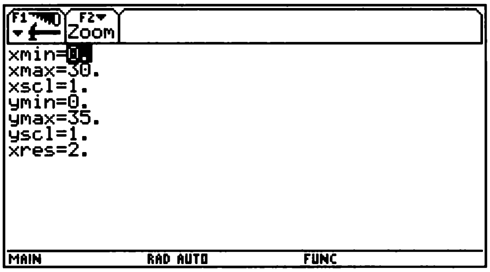
Der Differenzenquotient gibt die Geschwindigkeitsabnahme pro Sekunde an.

Zu **d)** $a = -1\ \mathrm{ms}^{-2}$: $v = 30 - t = 0 \Rightarrow t = 30$ s. Die Bremszeit verdoppelt sich.



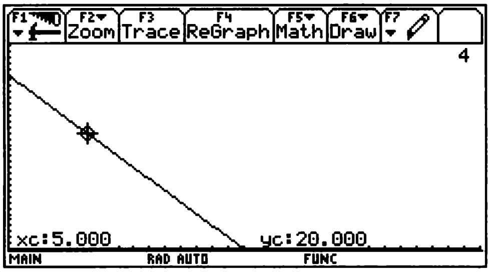
```
Graph 30-2*t,t
```

Mit **F4** aktiviert man 2:Graph. Dann wird der Funktionsterm eingegeben und durch einen Beistrich getrennt die abhängige Variable. Drückt man **ENTER** wird die Funktion gezeichnet.



```
xmin=0.
xmax=30.
xscl=1.
ymin=0.
ymax=35.
yscl=1.
xres=2.
```

Im Window-Editor (◆ E) kann man nur Werte für x und y eingeben, unabhängig welche Variable für die Graphik in der Eingabezeile verwendet wird.



```
xc:5.000          yc:20.000
```

Mit **F3** wird der Spurmodus (Trace) aktiviert. Durch Abtasten der Funktion mit der Cursortaste wird der genaue Wert x = 5 (t = 5) meistens nicht erreicht. Durch die direkte Eingabe von 5 springt der Cursor an die gewünschte Stelle.

Mit **F5** aktiviert man ein "Dropdown-Menü". Hier wählt man 1:Value und kann zu x = 5 den genauen Funktionswert ermitteln.

Lineare Kostenfunktionen

Bei der Herstellung von Waren fallen für ein Unternehmen Fixkosten F (z. B. Miete) sowie variable Kosten an, die von der Anzahl x der produzierten Einheiten abhängen. Die Verwendung einer in x linearen Kostenfunktion K (x) bedeutet, dass die Kosten für jede produzierte Einheit, unabhängig ob viel oder wenig produziert wird, gleich sind (lineares Kostenmodell).

$K(x) = F + k \cdot x$	K (x) ... Kostenfunktion F ... Fixkosten, k ... Kosten pro Produktionseinheit x ... Anzahl der Produktionseinheiten
$E(x) = p \cdot x$	E (x) ... Erlösfunktion p ... Verkaufspreis pro Produktionseinheit
$G(x) = E(x) - K(x)$	G (x) ... Gewinnfunktion

Beispiel 5.19 : Lineare Kostenfunktion

Ein Betrieb hat Fixkosten von € 50 000,–. Die monatlichen Produktionseinheiten sind mit höchstens 100 Stück beschränkt und die Kosten pro Stück betragen € 1 000,–. Der Verkaufspreis pro Stück beträgt € 2 000,–.

a) Stelle alle drei vorhin angeführten Funktionen in einem Koordinatensystem dar. Wähle geeignete Einheiten auf beiden Achsen!

b) Ab welcher Stückzahl arbeitet der Betrieb kostendeckend?

c) Wie viel Stück müssen abgesetzt werden, damit der Gewinn € 40 000.– beträgt?

d) Wie könnte man die Aufgabenstellung b) und c) graphisch lösen?

Lösung

$K(x) = 50\,000 + 1\,000\,x$; $E(x) = 2\,000\,x$; $G(x) = E(x) - K(x) = 1\,000\,x - 50\,000$.

Die Definitionsmenge aller drei Funktionen ist das abgeschlossene Intervall [0, 100], da höchstens 100 Stück hergestellt werden können und die Stückzahl größer oder gleich 0 sein muss.

Wertemenge von K (x): $K(0) = 50\,000$; $K(100) = 50\,000 + 1\,000 \cdot 100 = 150\,000$;
somit: $W_K = [50\,000, 150\,000]$;

Wertemenge von E (x): $E(0) = 0$; $E(100) = 2\,000 \cdot 100 = 200\,000$;
somit: $W_E = [0, 200\,000]$

Wertemenge von G (x): $G(0) = -50\,000$; $G(100) = 1000 \cdot 100 - 50\,000 = 50\,000$;
somit: $W_G = [-50\,000, 50\,000]$

Zu **a)**

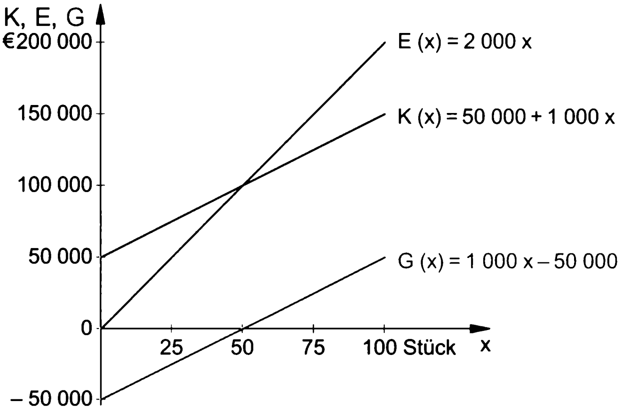


Abb. 5.31 Zu Beispiel 5.19

Hinweis: Bei solchen Aufgabenstellungen ist es besser, die Geraden durch die Berechnung von zwei Punkten zu zeichnen. (dritter Punkt zur Kontrolle)

Zu **b)** Ein Betrieb arbeitet kostendeckend, wenn die Ausgaben mindestens gleich den Einnahmen sind. Bei Gleichheit ist der Gewinn gleich 0.

$$\begin{aligned} G(x) &= 2\,000 \cdot x - (50\,000 + 1\,000 \cdot x) \\ 0 &= 1\,000 \cdot x - 50\,000 \\ x &= 50 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} E(x) &= K(x) \\ 2\,000 \cdot x &= 50\,000 + 1\,000 \cdot x \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Ab dem Absatz von 50 Stück arbeitet der Betrieb kostendeckend.

Zu **c)**

$$\begin{aligned} G(x) &= 40\,000 \\ 1000 \cdot x - 50\,000 &= 40\,000 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Werden 90 Stück verkauft, so beträgt der Gewinn € 40 000,–.

Zu **d)**

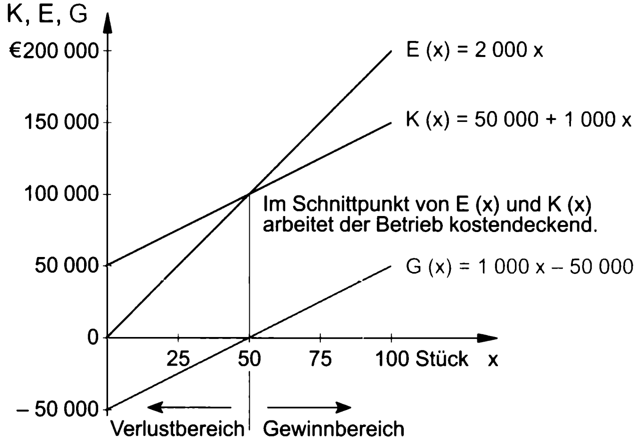


Abb. 5.32 Gewinn- und Verlustbereich

Die Nullstelle der Gewinnfunktion bezeichnet man als *Gewinnschwelle* oder *Break-Even-Point.*

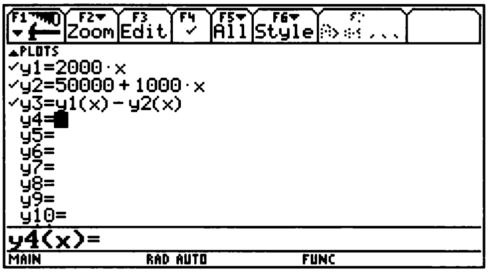
Hinweis:

(1) Ist die Gewinnschwelle nicht ganzzahlig, so muss sie **aufgerundet** werden.

(2) Negative Funktionswerte der Gewinnfunktion sind Verluste.

Die Definitionsmenge und die drei Wertemengen sind eigentlich Teilmengen der *ganzen* Zahlen. Da in Stück produziert wird, können die Stückzahlen x nur 0, 1, 2, 3, usw. sein. Das bedeutet, die Graphen der Funktionen bestehen aus einzelnen Punkten. Das Zeichnen von durchgehenden Graphen, hier Geraden, ist aber üblich. Man nennt sie **Trägergeraden**.

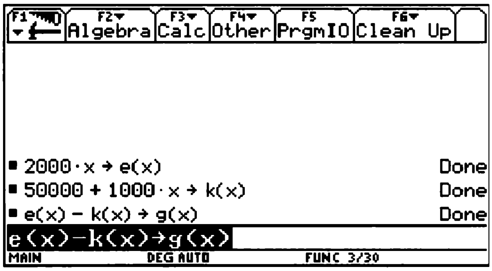
Hinweis: Eine Änderung der Definitionsmenge bedeutet eine Änderung der Funktion. Da sich die Funktionsgleichung nicht ändert, wollen wir dennoch die Funktion gleich benennen.
Ist die Definitionsmenge diskret (abzählbar), so besteht der Graph der Funktion aus einzelnen Punkten, ist die Definitionsmenge kontinuierlich, so ist der Funktionsgraph eine durchgehende Kurve (mit Ausnahme von Unstetigkeitsstellen).



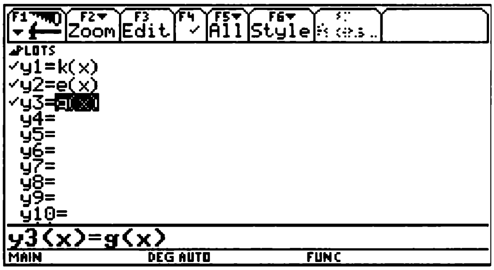
```
PLOTS
✓y1=2000·x
✓y2=50000+1000·x
✓y3=y1(x)-y2(x)
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
 y10=
y4(x)=
MAIN        RAD AUTO        FUNC
```

y1 .... Erlösfunktion
y2 .... Kostenfunktion
y1 – y2 .... Gewinnfunktion

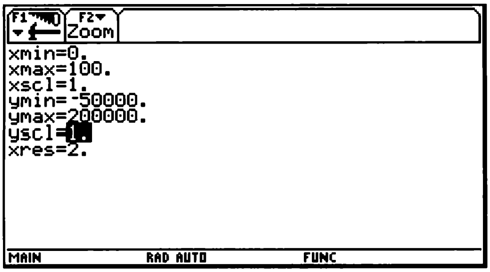
Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die einzelnen Funktionen zunächst unter ihrem Namen abzuspeichern. Dies erfolgt mit Hilfe der Taste STO▸ .



```
■ 2000·x → e(x)                Done
■ 50000 + 1000·x → k(x)        Done
■ e(x) - k(x) → g(x)           Done
e(x)-k(x)→g(x)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 3/30
```



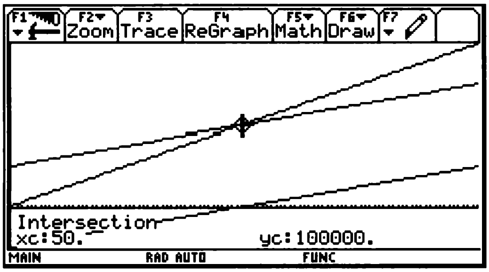
```
PLOTS
✓y1=k(x)
✓y2=e(x)
✓y3=g(x)
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
 y10=
y3(x)=g(x)
MAIN        DEG AUTO        FUNC
```



```
xmin=0.
xmax=100.
xscl=1.
ymin=⁻50000.
ymax=200000.
yscl=1.
xres=2.
```

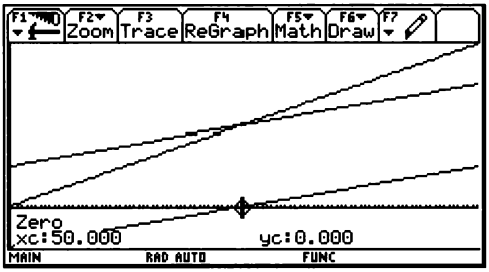
Mit ◆ E gelangt man in den Window-Editor, in dem man den Zeichenbereich festlegt.

Zu **b)** Gewinnschwellen:



```
Intersection
xc:50.          yc:100000.
```

1. Möglichkeit: Schnittpunkt der Erlösfunktion und Kostenfunktion. F5 aktivieren und 5:Intersection anwählen.



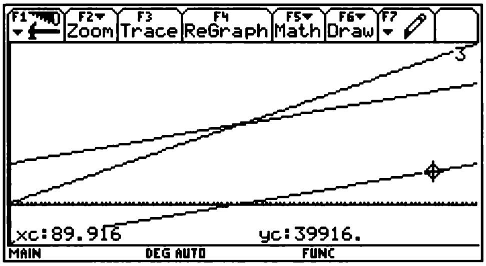
```
Zero
xc:50.000       yc:0.000
```

2. Möglichkeit: Nullstelle der Gewinnfunktion.

F5 aktivieren und 2:Zero anwählen.

Wichtig: Der Cursor muss auf den richtigen Funktionen stehen. Weiters werden die untere und die obere Grenze eines Intervalls, in dem die gesuchte Stelle liegt, abgefragt.

Zu **c)** Gewinn G = € 40000,-



```
xc:89.916       yc:39916.
```

Man kann leicht erkennen, dass man beim punktweisen Abtasten der Gewinnfunktion mit Trace den Gewinn von G = € 40000,- nicht genau bestimmen kann.

Mit Hilfe von ZOOM (F2) und ZoomBox könnte man den in Frage kommenden Bereich vergrößern und wieder mit F3 abtasten. Eine andere Möglichkeit ist die lineare Interpolation.

Es ist hier die umgekehrte Interpolationsaufgabe (siehe Abschnitt 5.6) zu lösen:

$$x = x_1 + \frac{h}{H} \cdot D \qquad h = y - y_1 = 40000 - 39916 = 84$$

$$x = 89,916 + \frac{84}{840,3} \cdot 0,8403 \qquad H = y_2 - y_1 = 40756,3 - 39916 = 840,3$$

$$x = 90 \qquad D = x_2 - x_1 = 90,7563 - 89,916 = 0,8403$$

Das heißt, bei 90 verkauften Stück erzielt man einen Gewinn von € 40000,-.

Lineare Abschreibung

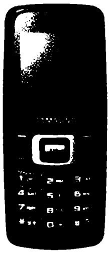
Der Wert eines Gebrauchsgegenstandes sinkt durch die Nutzung, die technische Alterung usw. Dieser Wertminderung wird durch die Abschreibung Rechnung getragen. Bei der linearen Abschreibung sinkt der *Buchwert* eines Gebrauchsgegenstandes innerhalb einer Nutzungsdauer von n Jahren vom Anschaffungswert A auf den Wert null. Eine in jedem Jahr gleich große Wertabschreibung wird durch eine lineare Abschreibung ausgedrückt.

$B(t) = A - \frac{A}{n} \cdot t$, wobei
B(t) ... Buchwert nach t Jahren
A ..... Anschaffungswert
n ..... Nutzungsdauer in Jahren
t ..... Zeit in Jahren

Lineare Tarife

$R(x) = G + k \cdot x$
R(x) .. Rechnungsbetrag
G .... Grundgebühr
k ..... Kosten für eine Leistungseinheit
x ..... Anzahl der verbrauchten Leistungseinheiten

Beispiel 5.20 : Linearer Tarif



Ein Mobilnetzbetreiber bietet folgenden Tarif an: Handy gratis; monatliches Grundentgelt € 20,–; gratis in das eigene Netz, ins Festnetz und in ein Netz freier Wahl, in alle anderen Netze € 0,20 pro Minute. Nimm an, dass ein Kunde im Durchschnitt 90% seiner Gespräche in die drei kostenlosen Netze führt.

a) Wie lautet die Formel für den (durchschnittlichen) monatlichen Rechnungsbetrag R in Abhängigkeit von der Gesprächsdauer t in Minuten?

b) Zeichne den Graphen dieser Funktion für $t \leqslant 1000$ min.

c) Wie lange kann der Kunde in einem Monat telefonieren, wenn er dafür € 30,– zur Verfügung hat?

d) Ein zweiter Mobilnetzbetreiber macht das folgende Angebot: Gleiches Handy wie oben samt Startpaket (SIM-Karte) um € 132,–; kein Grundentgelt; € 0,04 in alle Netze. Der Kunde schätzt, dass er das Handy zwei Jahre benützen wird. Vergleiche die Gesamtkosten über zwei Jahre für die beiden Angebote bei einer Gesprächszeit von 8 Stunden pro Monat. Für welche Gesprächszeit sind die Gesamtkosten gleich?

Lösung

Zu a) Bei einer Gesprächszeit von einer Minute ist *durchschnittlich* nur 10% dieser Zeit kostenpflichtig. Daher ist der durchschnittliche Minutenpreis in € $0{,}10 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$ und der durchschnittliche monatliche Rechnungsbetrag, ein linearer Tarif, lautet $R(t) = 20 + 0{,}02 \cdot t$.

Zu b) Wir ermitteln 2 Punkte der Geraden (und einen dritten zur Kontrolle):

t	R(t)	Punkt
0	20 = d	$P_1(0/20)$
300	26	$P_2(300/26)$
800	36	$P_3(800/36)$

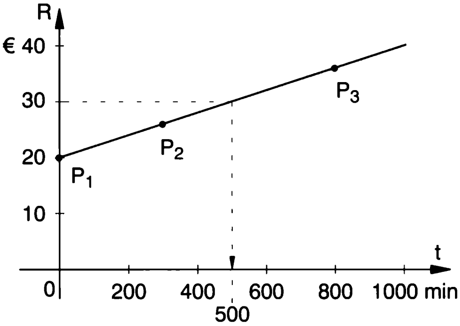


Abb. 5.32 Zu Beispiel 5.20

Zu c) $30 = 20 + 0{,}02 \cdot t$; daraus $t = 500$ min.

Zu d) 1. Angebot: $24 \cdot (20 + 8 \cdot 60 \cdot 0{,}02) = 710{,}40$.
2. Angebot: $132 + 24 \cdot 8 \cdot 60 \cdot 0{,}04 = 592{,}80$.

Die Gesamtkosten für das 2. Angebot sind daher bei der angenommenen monatlichen Gesprächsdauer von 8 Stunden mit € 592,80 geringer als jene für das 1. Angebot mit € 710,40.

$24 \cdot (20 + t \cdot 0{,}02) = 132 + 24 \cdot t \cdot 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad t = 725$ min.

Bei einer monatlichen Gesprächszeit von 725 min ≈ 12 h sind die Gesamtkosten beider Angebote gleich. Darüber ist das 1. Angebot günstiger.

Beispiel 5.21 : Weg-Zeit-Funktionen

Ein LKW und ein PKW fahren von Salzburg in Richtung Graz; die mittlere Geschwindigkeit v_L des LKW beträgt 60 kmh^{-1}, die mittlere Geschwindigkeit v_P des PKW 80 kmh^{-1}. Der LKW fährt eine Stunde vor dem PKW ab.

a) Zeichne die Graphen beider Weg-Zeit-Funktionen.

b) Wann und in welcher Entfernung von Salzburg ist der LKW nur noch 20 km vor dem PKW?

c) Wann und in welcher Entfernung von Salzburg überholt der PKW den LKW?

d) Löse b) und c) graphisch!

Lösung

Zu a)

s_L ... vom LKW zurückgelegter Weg
s_P ... vom PKW zurückgelegter Weg
t .... Fahrzeit des LKW
$t - 1$. Fahrzeit des PKW nach der Abfahrt des LKW

Für eine gleichförmige Bewegung gilt:

Weg = Geschwindigkeit mal Zeit

Daher gilt für die zurückgelegten Wege:

$s_L = 60 \cdot t$,
$s_P = 80 \cdot (t - 1)$.

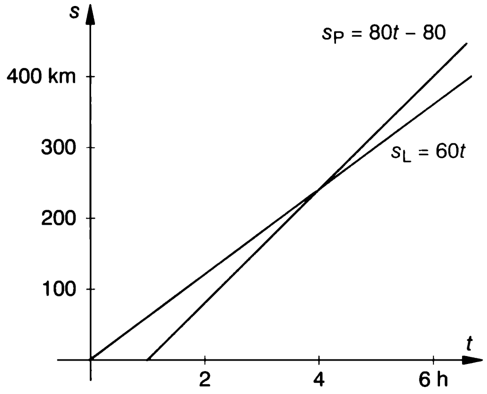
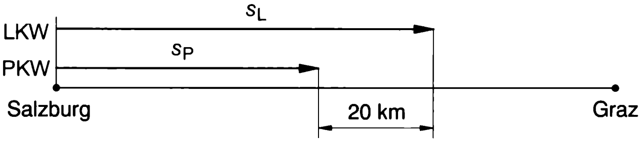


Abb. 5.33 Zu Beispiel 5.21

Zu **b)** Manchmal ist es nützlich, die Angabe durch eine Graphik zu unterstützen, um leichter den Gleichungsansatz zu finden.

$$s_L = s_P + 20$$
$$60 \cdot t = 80 \cdot (t - 1) + 20$$
$$60 \cdot t = 80 \cdot t - 80 + 20$$
$$-20 \cdot t = -60$$
$$t = 3\text{ h}$$



Weg des LKW = Weg des PKW + 20 km

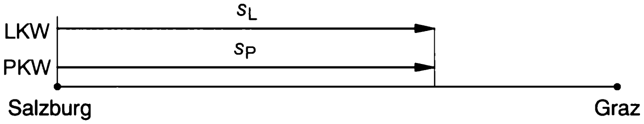
Das heißt, der LKW ist nach 3 Stunden Fahrt noch 20 km vor dem PKW.

$$s_L = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\text{ h} = 180\text{ km}$$

Die Entfernung von Salzburg beträgt dabei 180 km.

Zu **c)**

$$s_L = s_P$$
$$60 \cdot t = 80 \cdot (t - 1)$$
$$60 \cdot t = 80 \cdot t - 80$$
$$-20 \cdot t = -80$$
$$t = 4\text{ h}$$



Weg des LKW = Weg des PKW

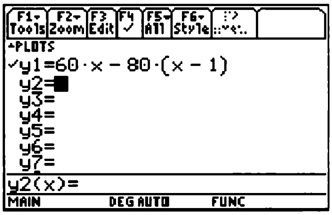
Der LKW wird nach 4 Stunden Fahrzeit vom PKW eingeholt.

$$s_L = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4\text{ h} = 240\text{ km}$$

Die Entfernung von Salzburg beträgt dabei 240 km.

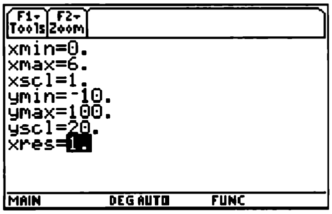
Zu **d)**

Wann und in welcher Entfernung von Salzburg ist der LKW nur noch 20 km vor dem PKW?



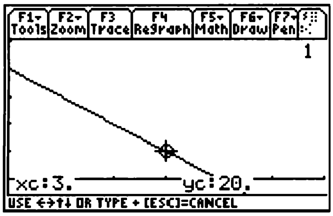
```
▴PLOTS
✓y1=60·x - 80·(x - 1)
 y2=
 y3=
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
y2(x)=
```

Im y-Editor (■ F1) gibt man die Differenz der beiden Wege sL-sP ein. Dabei ist zu achten, dass hier als Variable x bzw. y verwendet werden müssen.



```
xmin=0.
xmax=6.
xscl=1.
ymin=-10.
ymax=100.
yscl=20.
xres=1.
```

Im Window-Editor (Aufruf durch ■ F2) stellt man die Variable xres auf 1.

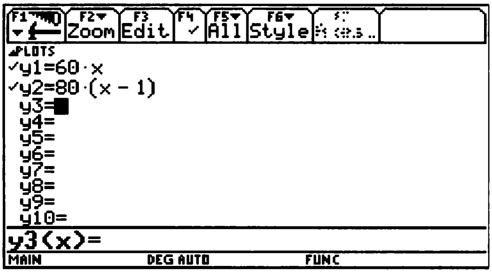


xc:3. yc:20.

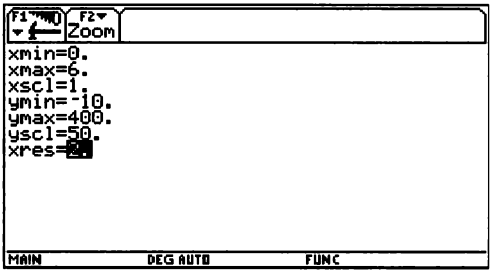
Damit kann man nach Öffnen des Graphik-Fensters durch ■ F3 mit F3 (Trace) jene Zeit t ermitteln, die der Differenz der beiden Wege von 20 km entspricht (d.h. der LKW ist noch 20 km vor dem PKW).

Wann und in welcher Entfernung von Salzburg überholt der PKW den LKW?

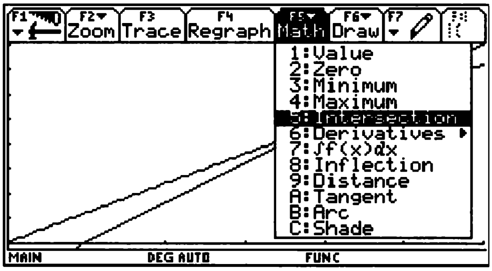
Dies erfolgt durch Bestimmung des Schnittpunktes der Graphen von $s_L = 60t$ und $s_P = 80(t-1)$. Dazu wird im Graphik-Fenster nach Drücken von **F5** die Option (5: Intersection) gewählt. Nach Angabe der beiden zu schneidenden Graphen (nur Bestätigung durch **ENTER** erforderlich) ist die untere und die obere Grenze eines Intervalls anzugeben, in dem die Schnittstelle liegt.

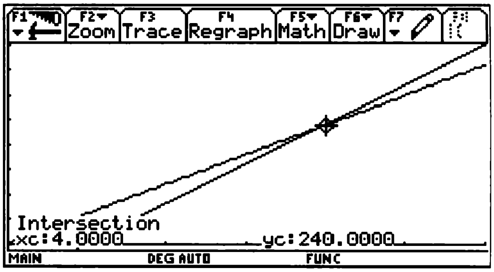


PLOTS
y1=60·x
y2=80·(x − 1)
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y9=
y10=
y3(x)=



xmin=0.
xmax=6.
xscl=1.
ymin=⁻10.
ymax=400.
yscl=50.
xres=2.





Intersection
xc:4.0000 yc:240.0000

Beispiel 5.22 : Stückweise lineare Funktion

Die Parkgebühr pro PKW in einer Tiefgarage beträgt je angefangener Stunde € 4,–.

a) Zeichne den Graphen für eine Parkdauer bis zu 5 Stunden.

b) Gib eine Formel für die Parkgebühr G in Abhängigkeit von der Parkdauer t (in h) an. Verwende die Integerfunktion y = int (x).

Lösung

Zu **a)**

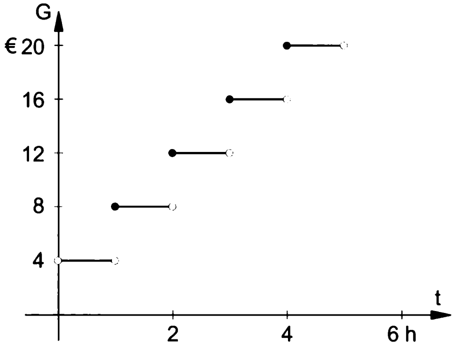


Abb. 5.35 Parkgebührenfunktion

Zu **b)** $G = 4 \cdot \text{int}(t + 1), t \in]0, 5[$

Beispiel 5.23 : Weg-Zeit-Funktion ("Weg-Zeit-Diagramm") einer Bewegung

Ein Radfahrer fährt zwei Stunden lang bei Rückenwind mit einer mittleren Geschwindigkeit von 20 kmh^{-1}. Danach kehrt er sofort um und beginnt die Heimreise. Da er nun mit Gegenwind zu kämpfen hat und außerdem schon müde ist, erreicht er nur eine geringere mittlere Geschwindigkeit. Abb. 5.36 zeigt den Graphen $s = s(t)$ der Fahrradtour, wobei $s(t)$ die Entfernung in km vom Ausgangsort zur Zeit t in Stunden nach dem Fahrtantritt ist.

a) Nach welcher Zeit nach Antritt der Reise erreicht er wieder den Ausgangsort?

b) Welche mittlere Geschwindigkeit besitzt der Radfahrer bei der Heimreise?

c) Wie lautet die abschnittsweise termmäßige Darstellung der Funktion $s = s(t)$?

Lösung

Zu **a)** Aus Abb. 5.36 liest man ab, dass zum Zeitpunkt $t = 6$ h wieder $s = 0$ km ist.

Zu **b)** Aus Abb. 5.36 liest man ferner ab, dass der Radfahrer auf seiner 4-stündigen Heimfahrt einen Weg von 40 km zurückgelegt; daher ist die mittlere Geschwindigkeit gleich $\frac{40 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

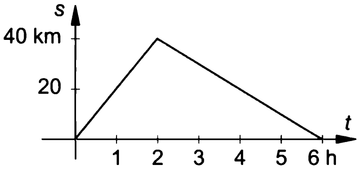


Abb. 5.36 Zu Beispiel 5.23

Zu **c)** Der Graph der Weg-Zeit-Funktion in Abb. 5.36 besteht in der Definitionsmenge $\mathbb{D} = [0, 6]$ aus zwei Geradenstücken.

(1) $0 \text{ h} \leqslant t \leqslant 2 \text{ h}$: Ursprungsgerade mit der Steigung $k = \frac{40 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 20 \text{ kmh}^{-1}$; also $s = 20 \cdot t$.

Man hätte hier genauso gut auch das Zeitintervall $0 \text{ h} \leqslant t < 2 \text{ h}$ wählen und den Zeitpunkt $t = 2$ h zum anschließenden Zeitintervall dazunehmen können.

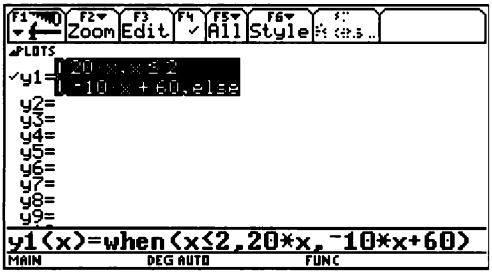
(2) $2\text{ h} < t \leqslant 6\text{ h}$: Geradenstück mit der Steigung $k = -\frac{40\text{ km}}{4\text{ h}} = -10\text{ kmh}^{-1}$; d.h. $s = -10 \cdot t + d$

Zur Bestimmung von d benützen wir, dass beispielsweise der Punkt P (6 h/0 km) auf dem Geradenstück liegt, seine Koordinaten also die Geradengleichung erfüllen:

$0\text{ km} = -10\text{ kmh}^{-1} \cdot 6\text{ h} + d$, daraus d = 60 km. Somit $s = -10 \cdot t + 60$.

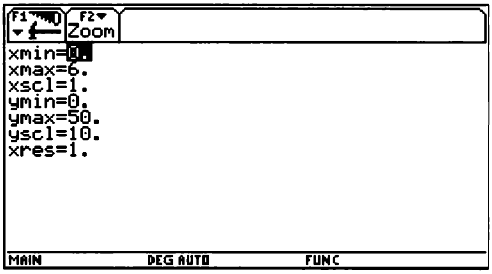
$$\text{Zusammenfassend: } s = \begin{cases} 20 \cdot t & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ -10 \cdot t + 60 & \text{für } 2 < t \leqslant 6 \end{cases}$$

Voyage 200

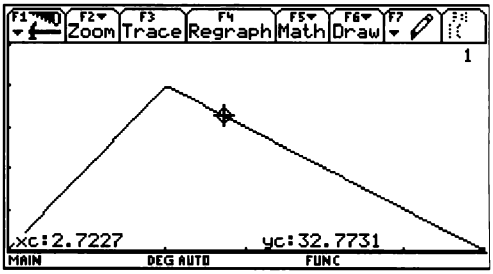


```
✓y1= { 20·x, x ≤ 2
      { -10·x + 60, else
 y2=
 y3=
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
y1(x)=when(x≤2,20*x,⁻10*x+60)
```

Die abschnittsweise unterschiedlich definierte Weg-Zeit-Funktion s(t) kann mit dem when-Befehl angegeben werden. Dies erfolgt durch zeichenweises Eintippen wie nebenstehend ersichtlich.
Das Zeichen ≤ erhält man durch ◆ 0.



```
xmin=0.
xmax=6.
xscl=1.
ymin=0.
ymax=50.
yscl=10.
xres=1.
```



Aufgaben

5.31 Für den Schweredruck in einer Flüssigkeit gilt bei Vernachlässigung des Luftdruckes: $p = \varrho \cdot g \cdot h$

a) Stelle den Verlauf des Druckes in Wasser ($\varrho = 1\text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, $g = 10\text{ m s}^{-2}$) graphisch bis zu einer Tiefe von 10 m dar.

b) Was bedeutet der Differenzenquotient $\frac{\Delta p}{\Delta h}$?

5.32 Eine Prüfanlage kostet € 24000,–. Die Nutzungsdauer beträgt 4 Jahre.

a) Stelle den Buchwert bei einer linearen Abschreibung als Funktion der Zeit dar.

b) Wie groß ist der Buchwert nach 3 Jahren?

5.33 Bei Erwärmung eines Gases bei konstantem Volumen gilt für den Druck des Gases:

$p_\vartheta = p_0 (1 + \gamma \vartheta)$

p_0 ... Gasdruck bei 0 °C; γ ... Volumsausdehnungskoeffizient ($\gamma = (273{,}15\,°\text{C})^{-1}$)

Stelle den Zusammenhang graphisch dar.

5.34 Ein PKW hat einen Benzinverbrauch von 8 *l* pro 100 km. Gib einen Zusammenhang zwischen dem momentanen Tankinhalt *V* und der Größe *s* der gefahrenen Strecke an. Wie weit kann (theoretisch) gefahren werden, wenn der Tankinhalt zu Reisebeginn 60 *l* beträgt?

5.35 Ein Urlauber hat anfänglich ein Budget von € 800,– zur Verfügung. Er verbraucht im Schnitt pro Tag € 80,–.

a) Gib eine Formel für den Restbetrag y am Ende des x-ten Tages an, wenn er keine weiteren Einnahmen hat!

b) Zeichne den Graphen des Restbetrages y, wenn er am Anfang des 5. Tages noch € 200,– dazu erhält.

5.36 In den USA wird die Temperatur in Fahrenheit (°F) gemessen. 35°C sind 95°F, pro 1°C nimmt die Fahrenheitskala um $\frac{9}{5}$ °F zu. Ein Amerikaner, der Österreich besucht, wünscht sich eine Umrechnungsformel von °C in °F. Wie lautet sie? Welche Formel würde ein Österreicher in den USA benutzen?

5.37 Ein Taxi, das maximal 4 Fahrgäste aufnehmen kann, soll eine Gruppe von x Personen eine bestimmte Strecke befördern. Zeichne den Graphen für die Anzahl der nötigen Fahrten, wenn jede Fahrt vollbesetzt erfolgt.

5.38 Ein Fußgänger beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Wanderung vom Ort A in Richtung B mit einer Geschwindigkeit von 5 kmh^{-1}. 2 Stunden später fährt ein Radfahrer mit der Geschwindigkeit von 15 kmh^{-1} von A in Richtung B.

a) Zeichne die Graphen beider Weg-Zeit-Funktionen.

b) Ermittle rechnerisch und graphisch, wann und wo der Radfahrer den Fußgänger einholt.

c) Wie weit von A entfernt kann der Radfahrer sagen, dass er in 10 Minuten den Fußgänger erreichen wird?

5.39 Die Kostenfunktion eines bestimmten Betriebes lässt sich annähernd durch die Gleichung $K(x) = 100000 + 1000\,x$ beschreiben. Der Verkaufspreis pro Stück wird mit € 2000,– veranschlagt.

a) Stelle Kostenfunktion, Erlösfunktion und Gewinnfunktion graphisch dar.

b) Bestimme graphisch die Gewinnschwelle. Bei welcher Stückzahl wird der Gewinn € 50000,– betragen?

c) Kontrolliere die Ergebnisse aus b) durch eine Rechnung!

5.40 Die Formel für den Rechnungsbetrag R in € einer Telefonrechnung lautet: $R = 29{,}04 + k \cdot t$, wobei t die Gesprächsdauer in Minuten und k das Verbindungsentgelt pro Minute ist. Für einen bestimmten Tarif in der Zone 1 beträgt k = € 0,12; in der Zone 2 ist k = € 0,149. Wie lautet die Formel für den Rechnungsbetrag R in Abhängigkeit von der Gesprächsdauer t, wenn jemand ausschließlich in der

a) Zone 1,

b) Zone 2 telefoniert?

c) Zeichne die Graphen dieser Funktionen für $t \leqslant 300$ min.

d) Wie lange kann man in der Zone 1 bzw. Zone 2 telefonieren, wenn dafür € 50,– zur Verfügung stehen?

5.41 Ein Radfahrer fährt zwei Stunden lang mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 kmh^{-1}. Dann dreht er um und fährt mit der gleichen mittleren Geschwindigkeit wieder zurück. *s* ist die Entfernung (in km) vom Ausgangspunkt der Fahrradtour zur Zeit *t* (in Stunden) nach Beginn der Fahrt.

a) Bestätige, dass Abb. 5.37 den Graphen der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ darstellt. Gib nun abschnittsweise die Gleichungen der Funktion $s = s(t)$ an.

b) Interpretiere eine Fahrradtour, deren Weg-Zeit-Funktion in Abb. 5.38 graphisch dargestellt ist. Wie lautet nun die abschnittsweise Darstellung der Funktion?

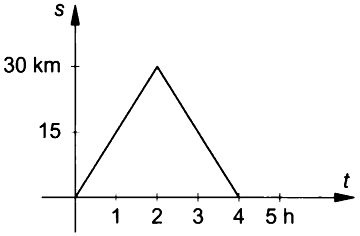


Abb. 5.37

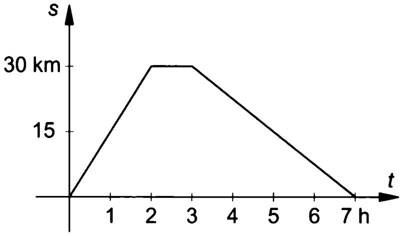


Abb. 5.38

5.42 Angenommen, für einen bestimmten PKW betragen die monatlichen Fixkosten (Versicherung, Steuer, Garage, ...) € 100,– und die monatlichen Betriebskosten (Treibstoff, Service- und Reparaturkosten, Reifen, ...) € 200,–.

a) Die Kosten sollen dabei nach folgendem Modell anfallen: die Fixkosten zu Monatsbeginn und die Betriebskosten werden gleichmäßig über das ganze Monat verteilt. Zeichne zu diesem Modell die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Zeit in Monaten (z.B. 4 Monate).

b) Verändere das Kostenmodell so, dass auch die Fixkosten gleichmäßig über den ganzen Monat anfallen; damit deckt es sich mit dem vorigen Modell nur zu den Monatsenden, was aber im Moment ausreichend sein soll. Zeichne die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Zeit in Monaten.

c) Zeichne die Kostenfunktion in Abhängigkeit der gefahrenen Kilometer (durchschnittliche Fahrleistung pro Monat 1 000 km).

d) Gib eine Formel für die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Zeit in Monaten und eine zweite in Abhängigkeit von den gefahrenen Kilometern an!

5.9 Proportionalität

5.9.1 Direkte Proportionalität

Beispiel 5.24 : Einführendes Beispiel

Welche Arbeit ist notwendig, um einen Körper mit dem Gewicht G = 50 N senkrecht 1 m, 2 m bzw. 3 m in die Höhe zu heben?

Lösung

Für die Arbeit gilt: $W = G \cdot h$

Aus der Gleichung kann man erkennen: Wird die Höhe h **verdoppelt**, **verdreifacht**, ..., so wird die Arbeit W **verdoppelt**, **verdreifacht**, ...

$h = 1$ m: $W = 50$ J
$h = 2$ m: $W = 100$ J
$h = 3$ m: $W = 150$ J

Man sagt, die Arbeit W ist **direkt proportional** zur Höhe h. Das Gewicht G bezeichnet man als **Proportionalitätsfaktor**.

Graphische Darstellung:

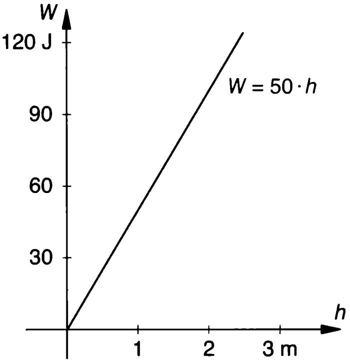


Abb. 5.39 Direkte Proportionalität

$W = G \cdot h$ ist eine lineare Funktion vom Typ $y = k \cdot x + d$ mit $k = G$ und $d = 0$, ihr Graph ist also eine Ursprungsgerade. Ihre Steigung ist der Proportionalitätsfaktor G.

Wir definieren:

Besteht zwischen zwei veränderlichen Größen y und x der Zusammenhang $y = k \cdot x$, wobei k ein konstanter Faktor ist, so heißt **y (direkt) proportional zu x**.
k wird **Proportionalitätsfaktor** genannt.

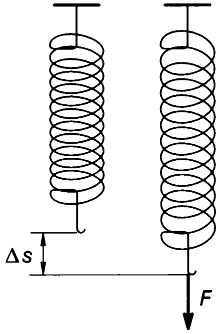


Abb. 5.40 Direkte Proportionalität zwischen F und Δs

Anmerkung: Ist y direkt proportional zu x, so ist auch x direkt proportional zu y, weil auch der Zusammenhang $x = \frac{1}{k} \cdot y$ besteht; der Proportionalitätsfaktor ist nun $\frac{1}{k}$.

Es gibt in der Praxis viele Beispiele für eine direkte Proportionalität zweier Größen (überlege die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors):

Preis p und Menge x einer Ware: $p = k \cdot x$
Arbeitslohn y und Zahl t der Arbeitsstunden: $y = k \cdot t$
Umfang u und Radius r eines Kreises: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$
Zurückgelegter Weg s und Zeit t bei einer gleichförmigen Bewegung: $s = v \cdot t$
Kraft F und Dehnung Δs bei einer Feder (siehe Abb. 5.40): $F = k \cdot \Delta s$
Ausdehnung Δl und Temperaturerhöhung $\Delta\vartheta$ eines Stabes der Länge l: $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta\vartheta$
usw.

Die Proportionalitäten in den letzten beiden Beispielen gelten ausreichend genau nur in bestimmten Grenzen.

Keine direkte Proportionalität besteht beispielsweise zwischen:

Fläche A und Radius r eines Kreises $A = \pi \cdot r^2$
Fallhöhe h und Fallgeschwindigkeit v $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$

Im ersten Fall ist A proportional zum Quadrat des Kreisradius r, im zweiten Fall ist v proportional zur Wurzel der Fallhöhe h .

5.9.2 Indirekte Proportionalität

Beispiel 5.25 : Einführendes Beispiel

Die Fläche eines Rechteckes beträgt 100 m^2. Stelle eine Gleichung auf, mit welcher die Länge des Rechteckes in Abhängigkeit von der Breite berechnet werden kann.

Lösung

$A = l \cdot b$; daraus $l = \frac{A}{b}$, $b > 0$.

$b = 5$ m: $l = 20$ m; $b = 10$ m: $l = 10$ m; $b = 20$ m: $l = 5$ m.

Aus der Gleichung kann man erkennen: Die Länge l **verdoppelt**, **verdreifacht**, ... sich, wenn man die Breite b **halbiert**, **drittelt**, ... usw.

Graphische Darstellung:

Der Graph der Funktion mit der Gleichung $l = \frac{A}{b}$ $(b > 0)$ oder allgemein $y = \frac{k}{x}$ $(x > 0)$ ist Ast einer Hyperbel.

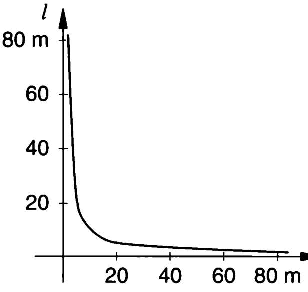


Abb. 5.41 Indirekte Proportionalität

Hinweis: Mit Kurven dieser Art werden wir uns in "Ingenieur-Mathematik 2" beschäftigen.

Wir definieren:

Besteht zwischen zwei veränderlichen Größen y und x der Zusammenhang $y = \frac{k}{x}$, wobei k ein konstanter Faktor (auch Proportionalitätsfaktor genannt) ist, so heißt y **indirekt proportional zu x**.

Anmerkung: Ist y indirekt proportional zu x, so ist auch x indirekt proportional zu y, weil auch der Zusammenhang $x = \frac{k}{y}$ besteht.

Beispiele für eine indirekte Proportionalität zweier Größen in der Praxis:

Fahrzeit *t* und Geschwindigkeit *v* für eine bestimmte Strecke *s*: $t = \frac{s}{v}$

Stromstärke *I* und Widerstand *R* bei konstanter Spannung *U*: $I = \frac{U}{R}$

Kraft *F* und Länge a eines Hebelarmes (siehe Abb. 5.41): $F = \frac{M}{a}$

Drehzahl *n* und Zähnezahl *z* eines Zahnrades: $n = \frac{k}{z}$

usw.

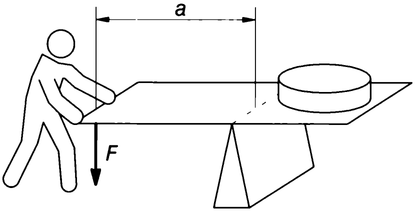


Abb. 5.41 Indirekte Proportionalität zwischen *F* und *a*

Keine indirekte Proportionalität besteht beispielsweise für die Frequenz *f* (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) und der Länge *l* eines mathematischen Pendels: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}$. *f* ist jedoch indirekt proportional zur *Wurzel* aus der Pendellänge *l*.

Aufgaben

5.43 Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist $A = \frac{a \cdot b}{2}$.

a) Die Kathete a ist gleich 2 cm. Stelle den Zusammenhang des Flächeninhaltes und der Kathete b graphisch dar und begründe die Proportionalität!

b) Der Flächeninhalt $A = 40\ \text{cm}^2$. Stelle den Zusammenhang der Kathete b und der Kathete a graphisch dar und begründe die Proportionalität!

5.44 Für das Volumen eines Drehkegels gilt: $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot H}{3}$. Ist das Volumen direkt proportional zum Radius r oder zur Kegelhöhe H? Begründe die Ergebnisse!

5.45 Für den Mantel eines Drehkegels gilt: $M = r \cdot \pi \cdot s$.

a) Der Mantel M ist gleich $30 \cdot \pi\ \text{cm}^2$. Stelle den Radius r als Funktion der Seitenkante s graphisch dar. Welche Proportionalität liegt zwischen diesen beiden Größen vor?

b) Die Seitenkante s ist gleich 5 cm. Stelle die Mantelfläche M als Funktion des Radius r dar. Welche Proportionalität liegt vor?

5.46 Der Verkaufspreis von Flacheisen (geometrisch ein Quader) beträgt € 15,– pro kg. Ein 20 x 5 Flacheisen bedeutet, dass der Querschnitt eine Breite b = 20 mm und eine Stärke a = 5 mm besitzt (Dichte $\varrho = 7{,}6\ \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$). Überprüfe, ob eine Proportionalität zwischen der Gesamtlänge L und dem Verkaufspreis besteht! Stelle den Verkaufspreis als Funktion der Gesamtlänge L graphisch dar!

5.47 Ergänze die fehlenden Werte der folgenden Tabelle, wenn y direkt proportional zu x ist. Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor? Wie lautet der Zusammenhang zwischen x und y?

a)

x	1	2		5	
y			12	15	30

b)

x	3	10		16	
y			144	192	300

Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie durch eine "glatte" Kurve!

5.48 Ergänze die fehlenden Werte der folgenden Tabelle, wenn y indirekt proportional zu x ist. Wie lautet der Zusammenhang zwischen x und y?

a)

x	2	3		15	
y		12	6		3

b)

x		0,4	0,6		
y	4		144	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

5.49 Das ohmsche Gesetz lautet: $U = R \cdot I$. Eine Strom- und eine Spannungsmessung ergaben folgende Werte:

U in Volt	20	40	30	50
I in Ampere	4	8	6	10

Welche Proportionalität liegt vor? Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor? Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie durch eine "glatte" Kurve.

5.50 Für die Masse eines Körpers gilt $m = \varrho \cdot V$. Begründe:

a) ϱ = konstant: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Masse und dem Volumen?

b) m = konstant: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Dichte und dem Volumen?

c) Stelle die Proportionalitäten von a) für $\varrho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ und $V = 1\ \text{m}^3$ bis $6\ \text{m}^3$ und von b) für $m = 4$ kg und $V = 1\ \text{m}^3$ bis $6\ \text{m}^3$ graphisch dar! Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte durch eine "glatte" Kurve!

5.51 Für die Reibungskraft F_R gilt: $F_R = \mu \cdot F_N$, wobei μ die Reibungszahl und F_N die Normalkraft ist. Auf einer horizontalen Ebene ist die Normalkraft gleich dem Gewicht. Welche Proportionalität besteht zwischen der Masse m des Körpers und der Reibungskraft F_R? Stelle diesen Zusammenhang graphisch dar!

5.52 Für den elektrischen Widerstand R eines Leiters gilt: $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$, wobei l die Länge, $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ der Querschnitt und ϱ der spezifische Widerstand des Leiters ist.
Besteht eine Proportionalität zwischen dem elektrischen Widerstand und
a) der Länge l, **b)** dem Querschnit A, **c)** dem Durchmesser d?

5.53 Für den Durchfluss einer Flüssigkeit durch eine Röhre gilt: $A_1 . v_1 = A_2 . v_2$

A_1, A_2 .. Querschnitte
v_1 ...... Strömungsgeschwindigkeit im Rohr 1 mit dem Querschnitt A_1
v_2 ...... Strömungsgeschwindigkeit im Rohr 2 mit dem Querschnitt A_2

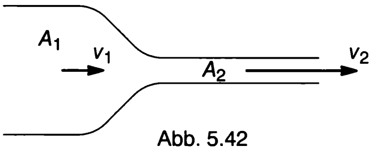


Abb. 5.42

Liegt eine Proportionalität zwischen der Strömungsgeschwindigkeit v und dem Querschnitt A vor? (Begründung!) Trage in einer Skizze den Zusammenhang zwischen der Strömungsgeschwindigkeit v und dem Querschnitt A ein (Es gilt $A \cdot v$ = konstant)!

5.54 Für die Längenausdehnung Δl eines Stabes der Länge l_0 bei Änderung der Temperatur um $\Delta\vartheta$ gelten folgende Beziehungen:

a) $l = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta$ **b)** $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\vartheta$

wobei l_0 die Länge vor der Temperaturänderung $\Delta\vartheta$, l die Länge nach der Temperaturänderung $\Delta\vartheta$, Δl die Längenänderung und α der Längenausdehnungskoeffizient ist. Überprüfe, ob bei a) eine Proportionalität zwischen l und $\Delta\vartheta$ bzw. bei b) eine Proportionalität zwischen Δl und $\Delta\vartheta$ vorliegt. Skizziere die Graphen, der in a) und b) dargestellten Formeln für eine Eisenbahnschiene von $l_0 = 50$ m ($\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1})!

5.55 Eine Zustandsgleichung des idealen Gases lautet: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$, wobei p der Druck, V das Volumen und T dieTemperatur des Gases in Kelvin ist.

Die folgende Größe bleibt konstant:

a) der Druck p ($p_1 = p_2$),

b) die Temperatur T,

c) das Volumen V.

Begründe, welche Proportionalität zwischen den verbleibenden Zustandsgrößen besteht und skizziere den Zusammenhang graphisch! (Achte auf die Bezeichnung der Achsen!)

5.56 Gegeben ist eine Formel, die die Abhängigkeit einer Größe y von einer Größe x angibt. Nimm an, dass x größer wird. Wird dann y größer oder kleiner?
Besteht eine Proportionalität (direkt oder indirekt) zwischen y und x?

a) $y = \frac{2x}{3}$	**b)** $y = \frac{1 + 2x}{3}$	**c)** $y = \frac{1 - 2x}{3}$	**d)** $y = \frac{2}{x}$
e) $y = \frac{2}{3x}$	**f)** $y = 3 + \frac{2}{x}$	**g)** $y = 3 - \frac{2}{x}$	**h)** $y = \frac{2}{3 + x}$
i) $y = \frac{2}{3 - x}$	**j)** $y = 4 \cdot (1 + x)$	**k)** $y = 5 \cdot \frac{2}{x}$	**l)** $y = 5 \cdot \frac{6}{x - 2}$

5.57 Eine Größe v hängt von r und h nach folgender Formel ab: $v = \frac{r}{h + 1}$.

a) Wie verhält sich v, wenn r wächst?

b) Auf das Wievielfache ändert sich v, wenn r verdoppelt wird?

c) Besteht eine Proportionalität zwischen v und r bzw. v und h?

5.58 Eine Größe v hängt von r und h nach folgender Formel ab: $v = \frac{r^2}{2 - h}$, $r \neq 0$.

a) Wie ändert sich v, wenn h wächst?

b) Auf das Wievielfache ändert sich v, wenn r verdoppelt wird?

c) Besteht eine Proportionalität zwischen v und r, v und r^2 bzw. v und h?

6 Lineare Gleichungen und lineare Ungleichungen

6.1 Gleichungen – Grundbegriffe

Viele praktische Probleme lassen sich in knapper Form nur mit Hilfe von Gleichungen formulieren. Mit Gleichungen lässt sich beschreiben oder **modellieren**, wie bestimmte Dinge in unserer Welt ablaufen. Unbekannte Größen, die in Gleichungen auftreten, können in **systematischer Weise** ermittelt werden, was einen großen Teil mathematischer Arbeit in technischen Anwendungen ausmacht.

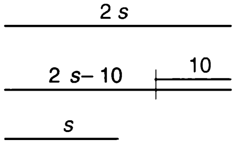
Beispiel 6.1 : Grundbegriffe

Bei einer dreitägigen Paddeltour werden insgesamt 65 km zurückgelegt. Die erste Tagesetappe ist doppelt so lang wie die dritte. Die zweite ist um 10 km kürzer als die erste. Wie lang sind die drei Tagesstrecken?

Lösung

(a) **Ansatz**:

Es geht nun darum, aus den Textinformationen eine **Gleichung zu formulieren**. Obwohl in der Aufgabe nach *drei* verschiedenen Weglängen gefragt wird, können diese durch eine einzige ausgedrückt werden. Dazu eignet sich gut die Länge der dritten Tagesstrecke, die wir mit s bezeichnen. Dann sind die Längen der drei Etappen:



1. Tag — Länge der 1. Etappe: $2s$ km

2. Tag — Länge der 2. Etappe: $(2s - 10)$ km

3. Tag — Länge der 3. Etappe: s km

Die gesuchte Gleichung ergibt sich daraus, dass die Summe der 3 Einzeletappen **gleich** 65 km ist:

$$\underbrace{2s + (2s - 10) + s}_{T_L} = \underbrace{65}_{T_R}$$

Wir haben dabei die linke Seite der Gleichung mit T_L (Links-Term) und die rechte Seite mit T_R (Rechts-Term) bezeichnet. Die Gleichung enthält die Variable s, nach der sie aufzulösen ist. Diese Variable heißt allgemein **Gleichungsvariable** oder **Unbekannte** der Gleichung. Die Menge der Zahlen, die für die Einsetzung der Gleichungsvariablen zur Verfügung stehen, nennt man die **Grundmenge** $\mathbb{G}$. Sie wird hier sinnvollerweise durch die nichtnegativen reellen Zahlen gebildet, da s die Bedeutung einer Weglänge hat, die nicht negativ sein kann:

$\mathbb{G} = [0, \infty[$.

Man könnte G noch weiter einschränken, da auch Zahlen über 65 nicht mehr in Betracht kommen.

Aus der Grundmenge muss man gegebenenfalls Zahlen ausschließen, die einen Gleichungsterm sinnlos machen (beispielsweise, um eine Division durch 0 zu vermeiden). Die so entstehende "Restmenge" bezeichnet man als die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ der Gleichung, also $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{G}$. In unserem Beispiel brauchen aus $\mathbb{G}$ keine Zahlen ausgeschlossen zu werden: $\mathbb{D} = \mathbb{G}$.

(b) **Lösen der Gleichung**:

$$2s + (2s - 10) + s = 65$$

$$5s - 10 = 65 \quad | +10$$

$$5s - 10 + 10 = 65 + 10$$

$$5s = 75 \quad | :5$$

$$\frac{5s}{5} = \frac{75}{5}$$

$$s = 15$$

Lösungen heißen alle jene Zahlen aus der *Definitionsmenge* $\mathbb{D}$, die die Gleichung erfüllen. Sie bilden die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$. In unserem Beispiel gibt es nur eine Lösung; wir schreiben: $\mathbb{L} = \{15\}$.

In technischen Aufgabenstellungen wird beim Lösen von Gleichungen häufig die Lösungsmenge nicht gesondert angeschrieben; der Lösungsvorgang schließt nach der letzten Umformung.

(c) **Antwort**:

Bei einer Textaufgabe sollte das Ergebnis durch eine **Antwort** formuliert werden, die auch eine Wertung des Ergebnisses, eine **Interpretation**, enthalten kann.
Am ersten Tag werden 30 km, am zweiten 20 km und am dritten 15 km zurückgelegt.

(d) **Probe**:

Die Summe der drei Weglängen ist 65 km: 30 km + 20 km + 15 km = 65 km;
die Weglänge am 1. Tag ist doppelt so groß wie am 3. Tag: 30 km = 2 · 15 km;
die Weglänge am 2. Tag ist um 10 km geringer als am 1. Tag: 20 km = 30 km –10 km;
damit stimmt die Probe.

Liegt keine Textaufgabe vor, sondern ist eine Gleichung vorgegeben, so setzt man die Lösung in die Gleichung ein und prüft auf Gleichheit. Bei Textaufgaben sollte die Probe am gegebenen Text erfolgen; eine Probe an der Gleichung würde hier die richtige Übersetzung des Textes in die Gleichung nicht überprüfen.

Werden zwei Terme T_L und T_R durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so spricht man von einer Gleichung: $T_L = T_R$.

1) $20 - 3 = 5 + 16$ 2) $15 + 5 = 4 \cdot 5$ 3) $5 = 2x + 8$ 4) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Gleichung 1) ist eine falsche Aussage, Gleichung 2) eine wahre Aussage. Bei den Gleichungen 3) und 4) kann über den Wahrheitswert erst dann etwas ausgesagt werden, wenn für die Variablen Zahlen eingesetzt werden .

Anmerkung:

Bei *nicht anwendungsorientierten* Gleichungen vereinbaren wir im Folgenden als **Grundmenge** $\mathbb{G}$ stets $\mathbb{R}$, falls sie nicht extra angegeben ist. In vielen *anwendungsorientierten* Aufgabenstellungen ist die Grundmenge $\mathbb{G}$ aus der Aufgabenstellung wie im Beispiel 6.1 ersichtlich. Ist beispielsweise in einer Gleichung nach einer unbekannten Stückzahl gefragt, so ist natürlich $\mathbb{G} = \mathbb{N}$ (oder eine Teilmenge von $\mathbb{N}$).

Beispiel 6.2 : Definitionsmenge einer Gleichung

Ermittle die Definitionsmenge der Gleichung $\frac{1}{x - 2} + 3 = 0$.

Lösung

Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable mindestens einmal im Nenner vorkommt, nennt man Bruchgleichungen. Damit werden wir uns später noch beschäftigen. Bei solchen

Gleichungen ist zu untersuchen, ob aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ Zahlen auszuschließen sind, bei deren Einsetzung für die Gleichungsvariable x die Gleichung, d.h. einer ihrer Terme, nicht definiert ist. Die linke Seite der Gleichung ist für $x = 2$ nicht definiert (Division durch 0). Daher kommen nur reelle Zahlen $x \neq 2$ für die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und damit für die Lösung in Betracht. Man schreibt $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; vgl. dazu Seite 23.

Das **Lösen** einer Gleichung kann auf unterschiedliche Arten erfolgen. Dazu gehören:

- gezieltes Probieren,
- graphische und numerische Verfahren,
- Äquivalenzumformungen.

In Ingenieur-Mathematik 1 werden wir dazu bevorzugt Äquivalenzumformungen verwenden.

Äquivalenzumformungen:

Darunter versteht man solche Umformungen einer Gleichung, welche die **Lösungsmenge nicht verändern**. Auf diese Weise umgeformte Gleichungen sind, was die Lösungsmenge betrifft, äquivalent (= gleichwertig).

Dies ist nicht selbstverständlich, wie wir noch kennen lernen werden. Es gibt Umformungen, die Lösungen hinzufügen oder wegfallen lassen! Im Abschnitt 1.1 ("Einfache Gleichungen und Formelumwandlungen") haben wir bereits drei Äquivalenzumformungen kennen gelernt. Sie lauten etwas verallgemeinert:

Eine Äquivalenzumformung einer Gleichung liegt vor, wenn man

Regel 1: beide Seiten vertauscht.
Regel 2: auf beiden Seiten der Gleichung entweder den gleichen Term addiert oder subtrahiert.
Regel 3: beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Term multipliziert oder durch den gleichen Term dividiert (der Term darf nicht gleich null sein).

Ein Trugschluss:

Viele Trugschlüsse in Gleichungsform beruhen auf "Umformungen", die mehr oder weniger gut versteckte Divisionen durch Null sind. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 \\ a(a-a) &= (a+a)(a-a) \quad | : (a-a) \\ a &= a + a \\ a &= 2a \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel 6.3 : Äquivalenzumformungen

Bestimme durch Äquivalenzumformungen die Lösung der Gleichung $2x + 3 = 5x - 7$

Lösung

$\mathbb{D} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5x - 7 && | -3 && \text{Auf beiden Seiten 3 subtrahieren.} \\ 2x + 3 - 3 &= 5x - 7 - 3 && && \\ 2x &= 5x - 10 && && \text{Seiten vertauschen.} \\ 5x - 10 &= 2x && | -2x + 10 && \text{Auf beiden Seiten } 2x - 10 \text{ subtrahieren.} \\ 5x - 10 - 2x + 10 &= 2x - 2x + 10 && && \\ 3x &= 10 && | : 3 && \text{Beide Seiten durch 3 dividieren.} \\ \frac{3x}{3} &= \frac{10}{3} && && \\ x &= \frac{10}{3} && && \end{aligned}$$

Probe: Für die Probe setzt man in den linken und rechten *Anfangsterm* ein und überprüft, ob beide Terme denselben Wert liefern.

$T_L\left(\frac{10}{3}\right) = 2\cdot\frac{10}{3} + 3 = \frac{20}{3} + \frac{9}{3} = \frac{29}{3}$; $T_R\left(\frac{10}{3}\right) = 5\cdot\frac{10}{3} - 7 = \frac{50}{3} - \frac{21}{3} = \frac{29}{3}$.

Die Probe stimmt.

Da $\frac{10}{3} \in \mathbb{D}$, ist $\frac{10}{3}$ Lösung der Gleichung. Daher $\mathbb{L} = \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

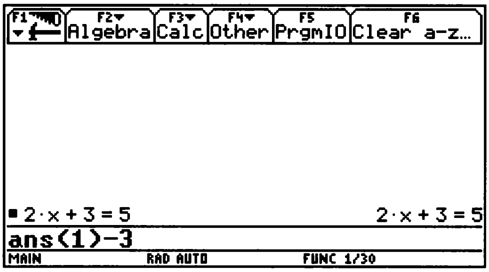
Die Angabe der Lösungsmenge unterbleibt oft. Wichtig ist, dass ein erhaltener Wert darauf überprüft wird, ob er in $\mathbb{D}$ enthalten ist.

Mit dem Voyage 200 (TI-89) kann man sehr gut die Äquivalenzumformungen zeigen und üben:

Beispiel 6.4 : Äquivalenzumformungen mit dem Voyage 200

Die Gleichung 2x + 3 = 5 soll mit dem Voyage 200 mit Hilfe von Äquivalenzumformungen gelöst werden.

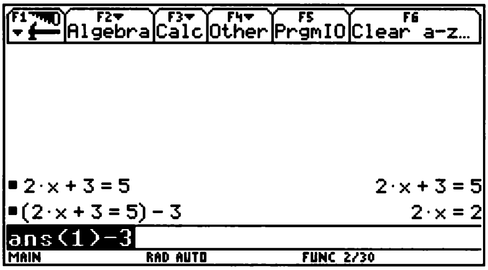
Lösung



```
■2·x+3=5                    2·x+3=5
ans(1)-3
```

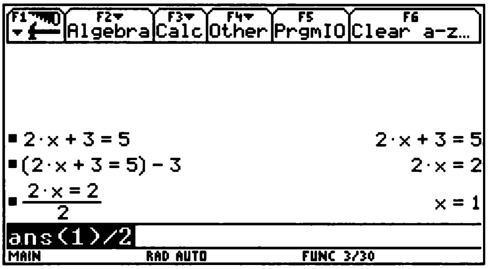
Man gibt die zu lösende Gleichung in der Eingabezeile ein und drückt ENTER .

Mit 2ND (-) wird die gewünschte Äquivalenzumformung (hier: Subtraktion von 3 auf beiden Seiten) eingeleitet.



```
■2·x+3=5                    2·x+3=5
■(2·x+3=5)-3                  2·x=2
ans(1)-3
```

Drückt man ENTER , so erscheint im Eingabebereich die auszuführende Äquivalenzumformung und im Ausgabebereich die umgeformte Gleichung.



```
■2·x+3=5                    2·x+3=5
■(2·x+3=5)-3                  2·x=2
  2·x=2
■ -----                         x=1
    2
ans(1)/2
```

Dies wird so lange wiederholt, bis die Gleichung nach der Variablen x aufgelöst ist.

Einteilung der Gleichungen:

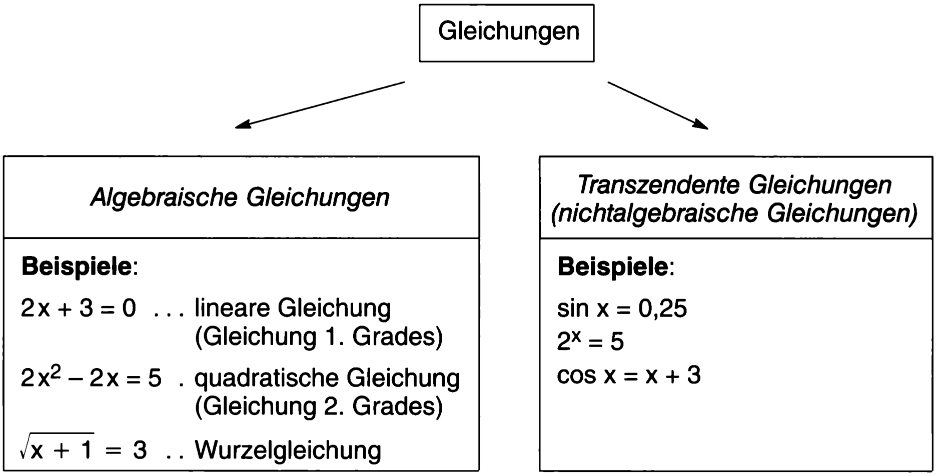
Es gibt unterschiedliche Einteilungsmöglichkeiten, je nachdem welche Merkmale herangezogen werden.

- *Anzahl der in einer Gleichung auftretenden Variablen*

Beispiele:

$x^2 + 2x = -2$	Gleichung in einer Variablen (mit einer Unbekannten)
$x + y = 8$	Gleichung in zwei Variablen (mit zwei Unbekannten)
$2x + 3y + 2z = 7$	Gleichung in drei Variablen (mit drei Unbekannten)

- *Art der in der Gleichung auftretenden Terme*



Gleichungen

Algebraische Gleichungen

Beispiele:

$2x + 3 = 0$ ... lineare Gleichung (Gleichung 1. Grades)

$2x^2 - 2x = 5$. quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades)

$\sqrt{x + 1} = 3$ .. Wurzelgleichung

Transzendente Gleichungen (nichtalgebraische Gleichungen)

Beispiele:

$\sin x = 0{,}25$

$2^x = 5$

$\cos x = x + 3$

Bei den algebraischen Gleichungen werden auf die Gleichungsvariable(n) höchstens die vier Grundrechnungsarten, Potenzieren oder Wurzelziehen angewandt. Durch Umformungen lässt sich jede algebraische Gleichung in einer Variablen auf die Form $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = 0$ bringen.

- *Anzahl der Lösungen*

Art der Gleichung	*Beispiel(e)*	*Lösung*
Allgemein gültige Gleichung	$x + x = 2x$	$\mathbb{L} = \mathbb{D}$
Nicht erfüllbare Gleichung	$x + 1 = x$; $x^2 + 1 = 0$; $2x = 3$, wenn $\mathbb{G} = \mathbb{N}$	$\mathbb{L} = \{\}$
Erfüllbare Gleichung	$2x = 3$ $x^2 - 1 = 0$	$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\mathbb{L} = \{-1, 1\}$

6.2 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax + b = 0$, wobei a und b beliebige Konstanten sind, heißt **lineare Gleichung** in der Variablen x.

Auf diesen sehr einfachen Gleichungstyp lassen sich öfters Gleichungen technischer Aufgabenstellungen zurückführen, auch wenn dies auf den ersten Blick nicht so aussehen mag.

Beispiele (führe die Umformungen durch):

(1) $2x + 3 = 5$ (2) $\frac{h}{4} + 3 = 5h - 7$ (3) $\frac{1}{x-2} + 3 = 0$ (4) $\frac{a+3}{2a} + 3 = 5$

Die Gleichungen (3) und (4) sind sogenannte **Bruchgleichungen**.

Beispiele von nicht linearen Gleichungen:

$2x^2 - 2x = 5$ (quadratische Gleichung); $2^x = 5$ (Exponentialgleichung).

Jede lineare Gleichung $ax + b = 0$ mit $\mathbf{a \neq 0}$ besitzt, wenn $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ist, **genau eine** Lösung.

Anmerkungen:

(1) Ist die Grundmenge $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, so kann der Fall eintreten, dass die Gleichung keine Lösung hat. Beispiel: $2x + 3 = 0$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$.

(2) Ist $a = 0$, so können zwei Fälle eintreten:

1. Fall: $b = 0$: $0 \cdot x + 0 = 0$; diese Gleichung ist für alle reellen Zahlen erfüllt; sie ist **allgemein gültig**.
2. Fall: $b \neq 0$: $0 \cdot x + b = 0$; diese Gleichung besitzt keine Lösung; sie ist **nicht erfüllbar**.

Beispiel 6.5 : Allgemein gültige lineare Gleichung

Es ist die Lösungsmenge der Gleichung $5a + 3 = 5(a + 1) - 2$ zu ermitteln.

Lösung

$5a + 3 = 5(a + 1) - 2$		Ausmultiplizieren der Klammer.
$5a + 3 = 5a + 5 - 2$		Zusammenfassen.
$5a + 3 = 5a + 3$	$\mid -5a - 3$	Auf beiden Seiten 5a + 3 subtrahieren.
$0 \cdot a + 0 = 0$		

Die Gleichung ist in der letzte Zeile für jedes Element aus der Definitionsmenge erfüllt. Man schreibt $\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Beispiel 6.6 : Nicht erfüllbare lineare Gleichung

Es ist die Lösungsmenge der Gleichung $3x = 2x + 2\,(\frac{x}{2} - 4)$ zu bestimmen.

Lösung

$$\begin{aligned} 3x &= 2x + 2\,(\tfrac{x}{2} - 4) && \text{Ausmultiplizieren der Klammer.} \\ 3x &= 2x + x - 8 && \text{Zusammenfassen.} \\ 3x &= 3x - 8 && \text{Auf beiden Seiten } 3x - 8 \text{ subtrahieren.} \\ 0 \cdot x + 8 &= 0 && \end{aligned}$$

Es gibt keine Zahl, die die Gleichung in der letzten Zeile erfüllt. Das heißt, die Gleichung ist nicht lösbar. Die Lösungsmenge ist die leere Menge; man schreibt $\mathbb{L} = \{\,\}$.

Beispiel 6.7 : Gleichung mit Formvariablen

Löse die Gleichung $(a - b) \cdot x - 4a = (a + b) \cdot x$ nach der Variablen x.

Lösung

Die Gleichung enthält drei Variable. Jene Variable, nach der die Gleichung *vereinbarungsgemäß* gelöst wird, bezeichnet man als die **Gleichungsvariable**. Für sie verwendet man oft einen der hinteren Buchstaben des Alphabets. Die anderen Variablen nennt man **Formvariable** oder **Parameter**.

Gleichungen mit Formvariablen werden genauso umgeformt wie Gleichungen mit Zahlen. Zu beachten ist jedoch die Einschränkung der Regel 3 für Äquivalenzumformungen (Multiplikation und Division). Daher muss man gegebenenfalls **Fallunterscheidungen** durchführen.

$$\begin{aligned} (a - b) \cdot x - 4a &= (a + b) \cdot x \\ ax - bx - ax - bx &= 4a \\ -2bx &= 4a \\ bx &= -2a \end{aligned}$$

Bis zu dieser Stelle wurden nur Äquivalenzumformungen durchgeführt, bei denen die Werte der Formvariablen ohne Bedeutung waren. Nun muss man unterscheiden:

Fall 1: $b \neq 0$

Division durch b ergibt:

$$x = -\frac{2a}{b}$$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{2a}{b}\right\}$$

Probe:

$$T_L\left(-\frac{2a}{b}\right) = (a - b) \cdot \left(-\frac{2a}{b}\right) - 4a = \frac{-2a^2 + 2ab - 4ab}{b} = \frac{-2a^2 - 2ab}{b}.$$

$$T_R\left(-\frac{2a}{b}\right) = (a + b) \cdot \left(-\frac{2a}{b}\right) = \frac{-2a^2 - 2ab}{b}.$$

Fall 2: $b = 0$

$0 \cdot x = -2a$

Hier sind 2 Unterfälle zu unterscheiden:

I: $a \neq 0$

Dies führt zur folgenden Gleichung: $0 \cdot x = a$.

Es gibt keine Zahl für x, welche die Gleichung erfüllt (nicht erfüllbare Gleichung). Die Lösungsmenge ist die leere Menge: $\mathbb{L} = \{\,\}$.

II: $a = 0$

Dies führt zur folgenden Gleichung: $0 \cdot x = 0$.

Alle Zahlen erfüllen die Gleichung (allgemein gültige Gleichung). Die Lösungsmenge ist die Definitionsmenge: $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Je nach eintretendem Fall (es kann *nur einer* eintreten), erhält man drei unterschiedliche Lösungsmengen.

Bei vielen Gleichungen mit Formvariablen (z.B. Formelumwandlungen) wird gewöhnlich auf Fallunterscheidungen verzichtet. Wichtig ist die Fallunterscheidung jedoch bei der Programmierung. Dort ist es notwendig, dass jede Möglichkeit untersucht wird.

Beispiel 6.8 : Betragsgleichung

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $|x + 2| = 4$.

Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable zwischen Betragsstrichen vorkommt, bezeichnet man als **Betragsgleichung**.

Lösung

Auf Seite 36 haben wir den Betrag einer Zahl a definiert. Dementsprechend sind beim Lösen die Fälle $x + 2 \geqslant 0$ und $x + 2 < 0$ zu unterscheiden.

Fall 1: Aus $x + 2 \geqslant 0$ folgt $|x + 2| = x + 2$

$$\begin{aligned} x + 2 &= 4 \\ x &= 2 \\ \mathbb{L}_1 &= \{2\} \end{aligned}$$

Fall 2: Aus $x + 2 < 0$ folgt $|x + 2| = -(x + 2)$

$$\begin{aligned} -(x + 2) &= 4 \\ -x - 2 &= 4 \\ -x &= 6 \\ x &= -6 \\ \mathbb{L}_2 &= \{-6\} \end{aligned}$$

Da sowohl Fall 1 als auch Fall 2 eintreten können, sind 2 *und* – 6 Lösungen.
Daher $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2, -6\}$.

Probe:

$x = 2$: $|2 + 2| = 4$, $|4| = 4$

$x = -6$: $|-6 + 2| = 4$, $|-4| = 4$

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen:

6.1 **a)** $5v - 18 = 9 - 2v$ **b)** $7x - 6 = 5x - 14 - x + 10$

6.2 **a)** $10y + 14 - 8y = 3y$ **b)** $2z - 18 + 8z + 1 = 20 + 5z - 2$

6.3 **a)** $10d - (6 + 4d) = 20 - (-3d - 2)$ **b)** $14 - (x - 9) = 10 + 5x - (7x - 5)$

6.4 **a)** $3a - [(3 - 10a) - (6a - 15)] = a + 9$ **b)** $4y - [(3y + 4) + 2] = 3(2y - 8) - (3y - 24)$

6.5 $14t + 12 = 18(5t - 24) - [8(42 - t) - 9(512 - 20t)] + 12$

6.6 $30x - [10(x + 1) - 6(3x + 1) + 15(x - 2) + 6(2 + x)] - 4(x + 1) = 10x - 4$

6.7 **a)** $(x + 1)(4x - 3) = 2(x + 1)(2x + 3)$
b) $(5a + 1)(2a - 1) - (3a - 5)(2a + 1) = 4(a - 1)(a + 3) - 4$

6.8 **a)** $(z + 1)^2 - (z - 1)^2 = 8$ **b)** $(2y - 2)^2 + (2y + 2)^2 = 8y^2 + 4y$

6.9 $(2d + 1)^2 + (8d - 3)^2 = (7d - 2)(11d - 1) - (3d + 1)^2$

6.10 $2(s - 6)^2 + (s - 4)^2 + (2s - 9)^2 = (6s - 7)(s - 6) + s^2 - 12s - 42$

6.11 $5(x - 1)^2 - 2(x + 3)^2 = 3(x + 2)^2 - 7(6x - 1)$

6.12 **a)** $\frac{1}{4}x = 9 - \frac{x}{5}$ **b)** $z - 10 = \frac{2z}{3} - 2 - \frac{z}{2}$

6.13 **a)** $24 - \frac{5a}{6} = -\frac{4a}{5} + \frac{5a}{3} - 10$ **b)** $1 + \frac{5y}{12} = -\frac{3y}{4} + \frac{4y}{6}$

6.14 **a)** $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$ **b)** $2 \cdot \frac{1}{3}y - 3 \cdot \frac{1}{2}y + 1 = y - 5 \cdot \frac{1}{3}y + 3 \cdot \frac{1}{5}y$

6.15 **a)** $\frac{a + 2}{7} + \frac{a + 3}{8} = 2$ **b)** $\frac{b - 3}{6} + \frac{b + 3}{20} = \frac{9}{4}$

6.16 **a)** $\frac{s + 1}{10} + \frac{3 - s}{30} - \frac{s + 1}{12} = \frac{2s + 3}{20} - \frac{s - 4}{15}$ **b)** $\frac{1}{5} - \frac{7 - 4t}{4} + \frac{3t - 5}{10} = \frac{1 - 16t}{5} - \frac{3}{4}$

6.17 **a)** $x + \frac{2x - 7}{2} - \frac{3x + 1}{5} = 5 - \frac{x + 6}{2}$ **b)** $\frac{2(a + 1)}{30} + \frac{2a - 10}{5} + 6 = 9 - \frac{9a - 48}{9}$

6.18 $-\frac{(12x - 15)}{36} + \frac{3}{5}(2x + 11) + 10 = 11 - \frac{4x - 3}{20}$

6.19 $\frac{14s - 4}{6} + 3 - \frac{3(s + 2)}{2} + 3 = -\frac{4}{5}(s + 3) + \frac{4}{5}s + \frac{1}{5} - \frac{2}{10}(1 - 4s)$

Löse folgende Gleichungen nach x und führe, wenn es erforderlich ist, eine Fallunterscheidung durch:

6.20 **a)** $a + x = b$ **b)** $2a - x = b$ **c)** $3b + 2x = a$

6.21 **a)** $\frac{bx}{a} = 1$ **b)** $\frac{a^2x}{b} = 2$ **c)** $(a + b)x = 1$

6.22 **a)** $4bx - a = 2a - b$ **b)** $ax - b(x + a) = 2b$ **c)** $(a + b)(x + 1) = a$

Löse folgende Betragsgleichungen:

6.23 **a)** $|x + 2| = 4$ **b)** $|2x + 3| = 4$ **c)** $|2 - x| = 4$

6.24 **a)** $|\frac{x}{2} + 2| = \frac{1}{2}$ **b)** $|\frac{2x}{3} - 2| = 1$ **c)** $|\frac{2 - x}{2}| = 4$

6.25 **a)** $|\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}| = 1$ **b)** $|\frac{3 + x}{4}| = 6$ **c)** $|\frac{1}{3} - 2x| = 2$

6.3 Bruchgleichungen

Darunter versteht man Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable mindestens einmal im Nenner vorkommt.

Wie bei den Bruchtermen im Abschnitt 2.8 müssen wir jene Elemente ausschließen, bei deren Einsetzung der Nenner 0 wird.

Beispiel 6.9 : Einführendes Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{5z}{z+1} - \frac{3}{z} = 5$ bei größtmöglicher Definitionsmenge.

Lösung

Ermitteln der Definitionsmenge:

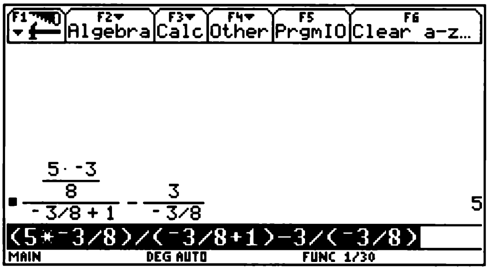
1. Nenner: z darf nicht –1 sein. 2. Nenner: z darf nicht 0 sein.

Das bedeutet: $z \neq 0$ und $z \neq -1$; man schreibt auch $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$.

Ermitteln des kleinsten gemeinsamen Nenners, des sogenannten Hauptnenners:
HN = $(z + 1)\cdot z$

$\frac{5z}{z+1} - \frac{3}{z} = 5$		Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner
$\frac{5z\cdot z}{(z+1)z} - \frac{3(z+1)}{(z+1)z} = \frac{5(z+1)z}{(z+1)z}$		Beide Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren und Klammern ausrechnen.
$5z^2 - 3z - 3 = 5z^2 + 5z$	$\mid -5z^2$	Auf beiden Seiten $5z^2$ subtrahieren.
$5z^2 - 3z - 3 - 5z^2 = 5z^2 + 5z - 5z^2$		Zusammenfassen.
$-3z - 3 = 5z$	$\mid +3z$	Auf beiden Seiten $3z$ addieren.
$-3z - 3 + 3z = 5z + 3z$		Zusammenfassen.
$-3 = 8z$	$\mid : 8$	Beide Seiten durch 8 dividieren.
$\frac{-3}{8} = \frac{8z}{8}$		
$z = -\frac{3}{8}$	$\mathbb{L} = \left\{-\frac{3}{8}\right\}$	

Die Probe könnte mit dem Taschenrechner erfolgen. Wichtig ist, dass der Term als Ganzes eingegeben wird (gutes Training für das Erfassen der Termstruktur im Taschenrechner).

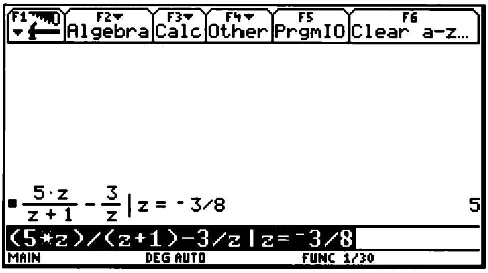


$\blacksquare\ \dfrac{\frac{5\cdot -3}{8}}{-3/8+1} - \dfrac{3}{-3/8}$ 5

```
(5*-3/8)/(-3/8+1)-3/(-3/8)
```

1. Möglichkeit: Direkte Eingabe für z = -3/8.

Voyage 200



$\frac{5\cdot z}{z+1}-\frac{3}{z}\,|\,z = -3/8$ 5

```
(5*z)/(z+1)-3/z|z=⁻3/8
```

2. Möglichkeit: Eingabe des Terms auf der linken Seite der Gleichung und nach 2ND K kann man für z den gewünschten Wert eingeben.

Beispiel 6.10 : Nicht erfüllbare Gleichung

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3}{u-3} = \frac{6}{u^2-9} + \frac{1}{u+3}$.

Lösung

Einschränkung für die Definitionsmenge $\mathbb{D}$: $u \neq 3$ und $u \neq -3$

Bestimmung des Hauptnenners:

1. Nenner: $(u - 3)$, 2. Nenner: $u^2 - 9 = (u - 3)(u + 3)$, 3. Nenner: $(u + 3)$.
Hauptnenner : $HN = (u + 3)\cdot(u - 3)$

Zum Unterschied von der Vorgangsweise in Beispiel 6.9 können wir die Gleichung auch sofort mit dem Hauptnenner multiplizieren.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{u-3} &= \frac{6}{u^2-9} + \frac{1}{u+3} && |\ (u+3)\cdot(u-3) && \text{Multiplikation mit dem Hauptnenner.}\\
3(u+3) &= 6 + (u-3) && && \text{Ausmultiplizieren der Klammer und Zusammenfassen.}\\
3u + 9 &= 6 + u - 3 && |\ -u\\
2u + 9 &= 3 && |\ -9\\
2u &= -6 && |\ :2\\
u &= -3
\end{aligned}$$

Da -3 nicht in der Definitionsmenge enthalten ist, ist -3 keine Lösung der Bruchgleichung: $\mathbb{L} = \{\}$.

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so spricht man von einer **Gleichung** $(T_L = T_R)$.

Äquivalenzumformungen: Umformungen einer Gleichung, welche die Lösungsmenge nicht verändern. Eine Äquivalenzumformung liegt vor, wenn man

Regel 1: beide Seiten der Gleichung vertauscht;

Regel 2: auf beiden Seiten der Gleichung entweder den gleichen Term addiert oder subtrahiert;

Regel 3: beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Term multipliziert oder durch den gleichen Term dividiert (der Term darf nicht gleich 0 sein).

Eine Gleichung der Form $a\cdot x + b = 0$ nennt man eine **lineare Gleichung** in der Variablen x. Sie besitzt in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung für x, wenn $a \neq 0$ ist.

Aufgaben

Gib die Einschränkungen für die Definitionsmenge an und bestimme die Lösungsmenge folgender Bruchgleichungen!

6.26 a) $\frac{6}{x}+2=5$ b) $\frac{4}{t}-\frac{5}{t}=5$ c) $\frac{1}{a}+4=\frac{3}{a}+2$

6.27 a) $\frac{2}{4x}-\frac{5}{8x}=\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{2a}+\frac{10}{4a}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3x}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

6.28 a) $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x-3}$ b) $\frac{a}{a+3}=\frac{2a}{2a-2}$ c) $\frac{t+3}{2(t-2)}=\frac{4}{3}$

6.29 a) $\frac{s-2}{s-3}=\frac{s+6}{s+4}$ b) $\frac{x+1}{x+5}-2=-\frac{x+3}{x-1}$ c) $\frac{a+4}{a-3}=\frac{a+6}{a-2}$

6.30 a) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$ b) $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x}$

6.31 a) $\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3+x}=\frac{6}{9-x^2}$ b) $\frac{1}{2a-6}+\frac{1}{a+3}=\frac{3}{(a+3)(a-3)}$

6.32 a) $\frac{1}{d+4}=\frac{1}{3d+12}-\frac{1}{3d}$ b) $\frac{10}{2(2t+2)}=\frac{2}{2t+2}+\frac{1}{t}$

6.33 a) $\frac{b+2}{b-4}+\frac{2b+1}{3b-12}=\frac{3(b-1)}{b-4}$ b) $\frac{a+2}{a+1}-\frac{3-2a}{1-a}=-\frac{(a+4)^2}{a^2-1}$

6.34 a) $\frac{7}{6t-5}=\frac{2(8t-9)}{10-12t}+\frac{12t+4}{9t-4}$ b) $\frac{25}{5x-45}+\frac{28}{35-7x}=\frac{9}{x-5}$

6.35 a) $\frac{2a+5}{2(a-2)}=\frac{3a^2-2a+5}{a^2-4}-\frac{6a+5}{3(a+2)}$ b) $\frac{3t-5}{3t-3}-\frac{2t-7}{2t+2}=\frac{3-19t}{6-6t^2}$

6.36 a) $-\frac{3x+2}{2-x}+\frac{5x-2}{x+2}=\frac{-8x^2+5x-18}{4-x^2}$ b) $\frac{2(7x^2+2)}{4x^2-1}=\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{4x+1}{1-2x}$

6.37 a) $\frac{3}{x-3}-\frac{5}{x+3}=-\frac{2x}{x^2-9}$ b) $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{3-x}=\frac{3x}{x^2-9}$

6.38 a) $\frac{x+6}{x-5}+\frac{2x-3}{2x-10}=\frac{4}{4x-20}$ b) $\frac{a-3}{2-a}-\frac{a}{4-2a}=\frac{2a+3}{6-3a}+\frac{1}{a-2}$

6.39 a) $\frac{3}{2b+2}-\frac{2b+5}{b+1}=\frac{1}{10b+10}$ b) $\frac{(3a-5)^2}{a+1}-\frac{(3a+5)^2}{a-1}=\frac{-78a^2+5a}{a^2-1}$

6.40 a) $\frac{w+1}{w-2}+\frac{2w}{2w-4}+\frac{w-4}{6-3w}=0$ b) $\frac{2x-8}{x}+\frac{2x^2-4}{x^2}=\frac{4x-4}{x^2}$

6.41 a) $\frac{5x+2}{x-1}-\frac{2+x}{-5x^2+7x-2}=\frac{25x-2}{5x-2}$ b) $\frac{(s+2)(s-1)}{s-1}+\frac{(1-s)(2-s)}{s+3}=\frac{2s^3+4}{s^2+2s-3}$

6.42 $\frac{a-2}{(2a+3)^2}-\frac{a-2}{(a+1)^2}=\frac{-3a^3-4a^2+11a+17}{(a+1)^2\cdot(2a+3)^2}$

6.43 $\frac{2\,x+1}{x^2-x}-\frac{4\,x-1}{x^2+x}=\frac{-2\,x^3+8\,x^2-4\,x+4}{x^4-x^2}$

6.44 $\frac{2\,b}{(b-1)^2}-\frac{4}{(b-1)(b+1)}=\frac{4\,b}{2(b+1)^2}+\frac{4}{b^2-1}$

6.45 $\frac{1}{7-x}+\frac{4}{4-x}=\frac{1}{3-x}+\frac{8}{10-2\,x}$

6.46 $\frac{2}{2\,a+2}-\frac{1}{a+3}-\frac{4}{2\,a-6}-\frac{6}{6-3\,a}=0$

6.47 **a)** $\frac{\frac{2(a+1)}{3}}{\frac{a-3}{2}}=4$ **b)** $\frac{\frac{(x-1)^2}{3}}{\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{x^2}{12}}=1$ **c)** $\frac{\frac{2\,x+5}{6}}{\frac{8\,x-2}{3}+1}=2$

Bei den folgenden Aufgaben ist x die Gleichungsvariable. Einfachheitshalber sind keine Fallunterscheidungen durchzuführen:

6.48 **a)** $\frac{x-a}{x+a}=4$ **b)** $\frac{3}{a+x}-4=b$ **c)** $\frac{2(a+x)}{x-b}=a$

6.49 **a)** $\frac{2\,x+a}{2\,x-a}-\frac{a\,x}{2\,x-a}=0$ **b)** $\frac{a}{x-b}+\frac{b\,x}{x-b}=\frac{a+b}{x-b}$

6.50 **a)** $\frac{b}{2-x}+\frac{a}{3-x}=\frac{a+b}{(2-x)(3-x)}$ **b)** $\frac{3-x}{b+x}+\frac{4-x}{b-x}=\frac{b(4-2\,x)}{b^2-x^2}$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Gleichungsvariable extra angeführt.

6.51 $A=1-2\left(1-\frac{a-2\,b}{b}\right)^{-1}$; $b=?$

6.52 $h=\frac{A}{2}\left(a+\frac{b\cdot A}{2\,c}\right)-1$; $b=?$

6.53 $c=\frac{a}{2}\left(\frac{4}{b}-m\cdot\frac{1+b}{b}\right)$; $m=?$

6.54 $a=\frac{2}{x}-\frac{n+x}{3\,x}\cdot b$; $n=?$

6.55 $w=\frac{1}{2}\cdot v\left[1-\frac{1+k}{1+\frac{m_1}{m_2}}\right]$; $m_2=?$

6.56 $\frac{A}{2}=\frac{1}{a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{b}}$; $x=?$

6.57 $a=\frac{1}{2\,b}-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b\cdot c}\right)\cdot\frac{2}{3}$; $c=?$

6.58 $n=b-2\cdot\frac{c-b}{h}\cdot(y-1)\cdot\frac{2}{z}$; $b=?$

6.59 $P=Q\cdot\frac{b\,x\cdot\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}+x\right)}$; $b=?$

6.60 $m=1-\frac{c}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; $y=?$

6.61 $R=S\left(1+\frac{1-k}{1+\frac{a}{b}}\right)$; $a=?$

6.62 $u=\frac{1}{2}-\frac{x}{x+\frac{1}{b}}$; $x=?$

6.63 $A=\frac{x}{b}-\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{x+3}{b}\right)$; $x=?$

6.64 $a=3\cdot\frac{x}{b}-\frac{b\,x+\frac{1}{2}}{2\,b}$; $x=?$

6.4 Textaufgaben

Die Schwierigkeit bei einer Textgleichung liegt meist in der richtigen "Übersetzung" der Textinformationen in eine Gleichung. Dazu folgende Bemerkungen:

(1) Oft wird nach mehreren Größen gefragt. Man bezeichnet eine dieser Größen mit einem Buchstaben (beispielsweise t oder dgl.) und drückt dann die anderen durch diesen Buchstaben aus (bei Gleichungen mit einer Unbekannten). Hierbei sollten diese Größen mit ihrer Bedeutung in geeigneter Form übersichtlich angeschrieben werden.

(2) Wesentlich ist nun, die im Text enthaltene Gleichung zu erkennen und zu formulieren.

(3) Bei anwendungsorientierten Aufgaben werden in der Regel nur die Lösungswerte der gesuchten Variablen angegeben. Eine besondere Angabe der Lösungsmenge unterbleibt meist.

Beispiel 6.11 : Erste Vorübung

In verschiedenen Gruppen von Schülern ist x die Anzahl der Burschen und y die Anzahl der Mädchen. In folgenden Sätzen ist eine Gleichheit formuliert. Drücke sie in mathematischer Form als Gleichung aus:

a) In der Gruppe gibt es doppelt so viele Burschen wie Mädchen.
b) Es gibt um drei Burschen mehr als Mädchen.
c) Die Mädchenanzahl ist um zwei geringer als jene der Burschen.
d) Wäre ein Bursche weniger, so hätte eine Gruppe gleich viele Burschen wie Mädchen.
e) Wäre ein Mädchen weniger, so wären dreimal so viele Burschen wie Mädchen in einer Gruppe.

Lösung

Zu **a)** $x = 2y$ Zu **b)** $x = y + 3$ oder $x - 3 = y$ Zu **c)** $x - 2 = y$
Zu **d)** $x - 1 = y$ Zu **e)** $x = 3(y - 1)$

Beispiel 6.12 : Zweite Vorübung

Ein Taxiunternehmen beabsichtigt die vier Reifen jedes seiner n Taxis zu wechseln. Insgesamt stehen k Reifen zur Verfügung. Drücke folgende Gleichungen in Worten aus:

a) $k = 4n$ **b)** $k = 4n + 10$ **c)** $k + 1 = 4n$ **d)** $k = 2n$ **e)** $\frac{k}{2} = 4n$

Lösung

Zu **a)** Die Anzahl der Reifen reicht genau, um alle Taxis zu bereifen.
Zu **b)** Es gibt um 10 Reifen mehr, als für die Bereifung aller Taxis notwendig sind.
Zu **c)** Ein Reifen ist zu wenig.
Zu **d)** Die Reifen reichen genau für die halbe Anzahl der Taxis.
Zu **e)** Es sind genau doppelt so viele Reifen vorhanden wie notwendig.

Beispiel 6.13 : Leistungsaufgabe

Um einen Löschteich eines Sägewerkes zu entschlämmen, muss das Wasser abgesaugt werden. Dafür stehen drei Pumpen zur Verfügung. Die erste Pumpe würde allein in 4 Stunden, die zweite in 3 Stunden und die dritte in 6 Stunden das Wasser absaugen. Wie lange dauert das Absaugen, wenn alle drei Pumpen gleichzeitig in Betrieb sind?

Lösung

t ... Absaugdauer in Stunden bei gleichzeitigem Betrieb

	Menge pro Stunde	*Menge für t Stunden*
1. Pumpe	$\frac{V}{4}$	$\frac{V}{4}\cdot t$
2. Pumpe	$\frac{V}{3}$	$\frac{V}{3}\cdot t$
3. Pumpe	$\frac{V}{6}$	$\frac{V}{6}\cdot t$

1. Pumpe: Das gesamte Volumen V wird in 4 Stunden abgesaugt. Das heißt, pro Stunde wird ein Viertel des Gesamtvolumens V entleert; in t Stunden daher $\frac{V}{4}\cdot t$.

Für die 2. und 3. Pumpe sind die gleichen Überlegungen anzustellen.

Dadurch ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{4}t+\frac{V}{3}t+\frac{V}{6}t&=V && |:V\\
\frac{1}{4}t+\frac{1}{3}t+\frac{1}{6}t&=1 && |\cdot 12\\
3t+4t+2t&=12\\
9t&=12 && |:9\\
t&=\frac{12}{9}\\
t&=\frac{4}{3}\text{ h}
\end{aligned}$$

Probe:

Abgesaugte Wassermenge durch die

1. Pumpe: $\frac{V}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{V}{3}=\frac{3V}{9}$;

1. Pumpe: $\frac{V}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4V}{9}$;

1. Pumpe: $\frac{V}{6}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4V}{18}=\frac{2V}{9}$;

Summe: $\frac{9V}{9}=V$.

Zum Absaugen des Löschteiches benötigen alle 3 Pumpen zusammen 1 h 20 min.

Beispiel 6.14 : Mischungsaufgabe

Lötmaterial ist eine Legierung aus Zinn und Blei. Zur Verfügung stehen zwei Sorten: Die erste Sorte enthält 30% Zinn (d.h. 30% der Legierungsmasse ist Zinn) und die zweite Sorte 50% Zinn. Durch Mischen beider Sorten und Hinzufügen von 2 kg Blei sollen 12 kg Lötmaterial mit 40% Zinn hergestellt werden. Wie viel kg der einzelnen Sorten müssen dazu verwendet werden?

Lösung

Alle Massen sind im Folgenden in kg, wobei die Einheit aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit weggelassen wird.

x ist die Masse der ersten Sorte. Die Masse des neuen Lötmaterials ist 12; zieht man davon die Masse x der ersten Sorte und die Masse 2 des reinen Bleis ab, so erhält man die Masse der zweiten Sorte: 12 – x – 2 = 10 – x.

Material	*Masse*	*davon Zinn*
erste Sorte	x	$\frac{30}{100}\cdot x$
zweite Sorte	10 – x	$\frac{50}{100}\cdot (10 - - x)$
reines Blei	2	0
neues Lötmaterial	12	$\frac{40}{100}\cdot 12$

Die Zinnmasse aller 3 Materialien muss natürlich gleich der Zinnmasse des neuen Lötmaterials, nämlich $\frac{40}{100}\cdot 12$, sein. Dies ergibt die gesuchte Gleichung für x.

$$\begin{aligned}\frac{30}{100}\cdot x+\frac{50}{100}\cdot(10-x)+0&=\frac{40}{100}\cdot 12 \qquad | \cdot 100\\ 30x+500-50x&=480\\ -20x&=-20\\ x&=1\end{aligned}$$

Masse der zweiten Sorte: $10 - x = 9$.

Man muss von der ersten Sorte 1 kg und von der zweiten Sorte 9 kg nehmen, um das gewünschte Lötmaterial zu erhalten.

Probe durch Berechnung der Zinnmassen:

1 kg der ersten Sorte (30% Zinn) hat eine Zinnmasse von $\frac{30}{100}\cdot$ 1 kg = 0,3 kg;

9 kg der zweiten Sorte (50% Zinn) hat eine Zinnmasse von $\frac{50}{100}\cdot$ 9 kg = 4,5 kg;

12 kg der neuen Sorte (40% Zinn) hat eine Zinnmasse von $\frac{40}{100}\cdot$ 12 kg = 4,8 kg.

Anmerkung: Bei Mischungsaufgaben kann sich die Prozentangabe auch auf das Volumen und nicht auf die Masse beziehen.

Beispiel 6.15 : Bewegungsaufgabe

Vom Bahnhof A fährt um 12.30 Uhr ein Tankzug ab; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 30 km/h. Nachdem er eine Strecke von 3 km zurückgelegt hat, durchfährt ein Regionalexpress mit einer mittleren Geschwindigkeit von 90 km/h den Bahnhof A in der gleichen Richtung.

a) Wann passiert der Regionalexpress den Bahnhof A?

b) Zu welcher Zeit und in welcher Entfernung von A überholt der Regionalexpress den Tankzug?

Lösung

Grundlage aller Bewegungsaufgaben mit gleichbleibender Geschwindigkeit ist die Beziehung **Weg = Geschwindigkeit mal Zeit.**

Zu **a)**

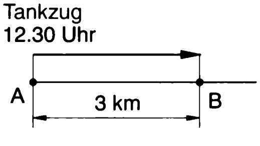


Abb. 6.1 Zu Beispiel 6.15 a)

Der Regionalexpress durchfährt den Bahnhof A, wenn der Tankzug bereits in B ist. B ist 3 km von A entfernt.

t ist die Fahrzeit des Tankzugs für den Weg von A nach B (Abb. 6.1).

$$t=\frac{3\text{ km}}{30\text{ kmh}^{-1}}=\frac{1}{10}\text{ h}=6\text{ min.}$$

Der Regionalexpress passiert den Bahnhof A 6 Minuten nach dem Tankzug, also um 12.36 Uhr.

Zu b)

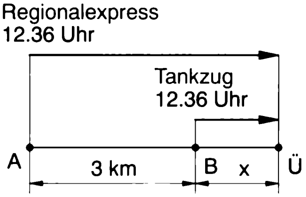


Abb. 6.2 Zu Beispiel 6.15 b)

Um 12.36 Uhr befindet sich der Regionalexpress in A, der Tankzug in B (Abb. 6.2).

t ist nun die Zeitspanne, die ab 12.36 Uhr bis zum Überholen im Punkt Ü verstreicht. In dieser Zeit t fährt also der Regionalexpress von A bis Ü, der Tankzug von B bis Ü.

Wir wenden die Beziehung *Weg = Geschwindigkeit mal Zeit* zweimal an.

Fahrweg des Regionalexpress: $90 \cdot t$

Fahrweg des Tankzugs: $30 \cdot t$.

Der Fahrweg des Regionalexpress ist um 3 km länger. Das liefert die gewünschte Gleichung für die Unbekannte t:

$90 \cdot t = 30 \cdot t + 3$

$60 \cdot t = 3$

$t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$; $t = \frac{1}{20}\,\text{h} = 3\,\text{min}.$

Fahrweg des Regionalexpress: $90\,\text{kmh}^{-1} \cdot \frac{1}{20}\,\text{h} = 4{,}5\,\text{km}.$

Drei Minuten, nachdem der Regionalexpress den Bahnhof A durchfahren hat, überholt er den Tankzug. Dies erfolgt also um 12.39 Uhr in der Entfernung 4,5 km von A.

Aufgaben

Gib die Lösungen mit sinnvollen Genauigkeiten an. Die numerischen Angaben sind entsprechend genau zu betrachten.

Geometrische Aufgaben

6.65 In einem Rechteck ist die eine Seite um 8 cm länger als die andere. Der Umfang des Rechtecks beträgt 144 cm. Wie lang sind die Rechteckseiten?

6.66 Für das Einzäunen eines rechteckigen Grundstückes werden 5000 m Maschendraht benötigt. Die Seitenlängen des Grundstückes unterscheiden sich um 250 m. Welche Abmessungen hat das Grundstück?

6.67 In einem Dreieck gilt: Die Seite a ist ein Viertel der Seite b und die Seite c ist um 8 cm kürzer als die Seite b. Der Umfang beträgt 19 cm. Wie lang sind die Seiten?

6.68 In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 30 cm und die andere um 10 cm kürzer als die Hypotenuse. Wie lang ist die Hypotenuse, wie lang die zweite Kathete?

6.69 Ein Rechteck hat die Länge a = 20 cm und die Breite b = 10 cm. Berechne die Seite des Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat!

6.70 In einem unregelmäßigen Fünfeck sind die erste und zweite Seite gleich lang. Die dritte Seite ist 3 cm und die vierte Seite ist 4 cm länger als die erste; die fünfte Seite ist um 7 cm kürzer als die dritte Seite. Wie lang sind die Seiten, wenn der Umfang 28 cm beträgt?

6.71 Die Kantenlängen zweier Würfel unterscheiden sich um 10 cm; ihre Oberflächen um 3240 cm^2. Ermittle die Kantenlängen der beiden Würfel!

6.72 Verdreifacht man die Höhe eines quadratischen Quaders mit der Grundkante $a = 10$ cm, so nimmt die Oberfläche um 400 cm^2 zu. Wie hoch ist der Quader ursprünglich?

6.73 Vergrößert man bei einem gleichseitigen Kegel (Durchmesser d = Mantellinie s) den Durchmesser um 2 cm, so nimmt die Mantelfläche um 22π cm^2 zu. Wie groß ist der Radius des gleichseitigen Kegels?

6.74 Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Grundkante $a = 10$ cm. Verdoppelt man die Höhe der Seitenfläche, so nimmt die Oberfläche um 160 cm^2 zu. Wie groß ist die Höhe der Seitenfläche der neuen Pyramide?

6.75 Bei einem geraden sechsseitigen Prisma ist die Höhe 4 cm. Vergrößert man die Grundkante um 2 cm, so nimmt das Volumen um $96\sqrt{3}$ cm^3 zu. Wie groß sind die Grundkanten beider Prismen?

Vermischte Aufgaben

6.76 Eine Treppe mit 36 Stufen und einer Stufenhöhe von 20 cm soll durch eine Treppe mit einer Stufenhöhe von 15 cm ersetzt werden. Wie viele Stufen sind notwendig?

6.77 Ein 40 m langes Seil ist in drei Teile zu teilen. Der zweite Teil ist um 5 m länger als der erste Teil; der dritte Teil ist um 9 m länger als der zweite Teil. Wie lange sind die einzelnen Teile?

6.78 Ein Grundbesitz besteht aus 150 ha Weideland und aus Wald, der 60% der Gesamtfläche ausmacht. Wie groß ist der Besitz?

6.79 Mit einer 4 m langen Stange soll eine Last von 2 kN gehoben werden. An welcher Stelle muss die Stange unterstützt werden, damit der Kraftaufwand 400 N beträgt?

6.80 Ein Hebel ist 1 m lang. An einem Ende soll eine Kraft von 1 kN wirken. Der Kraftarm ist 40 cm lang. Welche Kraft muss am anderen Ende des Hebels wirken, damit Gleichgewicht herrscht?

6.81 Bei einer Radrundfahrt wird der Gewinn von € 240000,– auf ein fünfköpfiges Team folgend aufgeteilt: Der Kapitän der Mannschaft erhält doppelt so viel wie sein Stellvertreter und dieser erhält dreimal so viel wie jeder in der restlichen Mannschaft. Wie viel erhält jeder einzelne Sportler?

6.82 Ein Gewinn wird unter 3 Spielern nach einem bestimmten Schlüssel aufgeteilt. Der erste Spieler bekommt zwei Fünftel des Betrages, den der zweite und dritte zusammen erhalten. Der zweite Spieler bekommt um € 3000,– weniger als der erste und der dritte bekommt doppelt so viel wie der zweite. Wie viel bekommt jeder einzelne Spieler und wie hoch ist der Gewinn?

6.83 Ein Büro wird durch insgesamt 50 Leuchtstofflampen ausgeleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 4625 W besitzen. Ein Teil von ihnen sind 100-W-Lampen und die anderen sind 75-W-Lampen. Wie viele Leuchtstofflampen von jeder Art sind vorhanden?

6.84 In einem quaderförmigen Gefäß mit einer Grundfläche von 8 dm^2, befindet sich eine Flüssigkeit. Erhöht man den Flüssigkeitsspiegel um 1 dm, so erhöht sich die Masse der Flüssigkeit um 6,48 kg. Welche Dichte besitzt die Flüssigkeit? (Masse = Dichte mal Volumen)

Mischungsaufgaben

6.85 Man möchte 30 kg Zinnbronze CuSn6 (6% Sn) aus Zinnbronze CuSn2 (2% Sn) und CuSn8 (8% Sn) herstellen. Wie viel kg muss man von jeder Sorte nehmen?

6.86 Wie viel Liter Wasser muss man von 20 Liter 4%igem Meerwasser verdampfen, damit man eine 10%ige Salzlösung erhält?

6.87 Zinnbronze CuSn8 besteht aus 92% Cu und 8% Sn. Die Dichte von Kupfer $\varrho_{Cu} = 8{,}93$ kgdm^{-3} und von Zinn $\varrho_{Sn} = 7{,}20$ kgdm^{-3}. Welche Dichte besitzt Zinnbronze CuSn8?

6.88 Eine Messingsorte hat eine Dichte $\varrho = 8{,}42$ kgdm^{-3}. Wie viel kg Cu und Zn besitzen 3 kg der Legierung? ($\varrho_{Cu} = 8{,}93$ kgdm^{-3}, $\varrho_{Zn} = 7{,}12$ kgdm^{-3})

6.89 12 Liter 20%iger Alkohol wird mit 24 Liter 30%igem Alkohol gemischt. Wie viel prozentig ist die Mischung?

6.90 Wie viel Liter Wasser muss man 20 Liter 45%igem Alkohol beimengen, um 40%igen Alkohol zu erhalten?

6.91 In einem Behälter befindet sich 90%iger Alkohol. Lässt man 18 Liter abfließen und füllt den Behälter wieder mit Wasser auf, so ist die Mischung 80%ig. Welche Menge ist im Behälter?

6.92 Wie viel kg Zink muss man mit 40 kg Kupfer zusammenschmelzen, um eine Messinglegierung mit 80% Kupfer zu erhalten?

6.93 85 Liter 60%iger Spiritus sollen mit 30%igem Spiritus zu 50%igem Spiritus gemischt werden. Wie viel Liter vom 30%igen Spiritus muss zugesetzt werden?

6.94 Für die Einschotterung eines Weges werden 60 m^3 Schotter mit 80% Korngröße unter 20 mm gebraucht. Zur Auswahl stehen drei Schotterarten A, B und C. Von der Schotterart A, die vollständig eingearbeitet werden muss, stehen 15 m^3 mit 70% Korngröße unter 20 mm zur Verfügung; B hat 90% Korngröße und C 50% unter 20 mm. Wie viel m^3 sind von B und C zu nehmen?

6.95 Bei einem Schmelzvorgang von Bronze mit 75% Kupfergehalt, soll reines Kupfer beigegeben werden, damit man 200 kg Bronze mit 80% Kupfer erhält. Wie viel kg reines Kupfer muss beigemengt werden?

6.96 Es werden 4 m^3 Kunststoffgranulat mit 80% Korngröße unter 3 mm und 2 m^3 mit 60% unter 3 mm, sowie 1 m^3 mit Korngröße unter 3 mm gemischt. Wie viel m^3 des Kunststoffgranulatgemisches besitzt eine Korngröße unter 3 mm?

Für die Aufgaben 6.97 – 6.99 gilt: $c_1 \cdot m_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_m) = c_2 \cdot m_2 \cdot (\vartheta_m - \vartheta_2)$. Die Formel bedeutet, dass die abgegebene Wärmemenge gleich der aufgenommenen Wärmemenge ist.
(c bedeutet die spezifische Wärmekapazität in Jkg^{-1} °C^{-1}, m die Masse in kg und ϑ die Temperatur in °C.)

6.97 Es werden 20 Liter Wasser mit einer Temperatur von 50 °C mit 30 Liter Wasser mit einer Temperatur von 70 °C gemischt. Welche Mischungstemperatur ϑ_m stellt sich ein?

6.98 In einem Fass mit 50 Liter Fassungsvermögen befindet sich Wasser. Füllt man 20 Liter Wasser mit 80 °C dazu, so wird das Fass voll gefüllt und es stellt sich eine Temperatur von 60 °C ein. Welche Temperatur hatte das Wasser ursprünglich im Fass?

6.99 Eine Eisenkugel ($c_1 = 465\ \mathrm{Jkg^{-1}\,°C^{-1}}$) mit einer Masse von 50 dag und einer Temperatur von 120 °C wird in 1 000 g Wasser ($c_1 = 4\,187\ \mathrm{Jkg^{-1}\,°C^{-1}}$) mit einer Temperatur von 20 °C gegeben. Welche Temperatur stellt sich ein?

Bewegungsaufgaben

6.100 Ein Fahrzeug benötigt für eine bestimmte Strecke 3 Stunden. Ein zweites Fahrzeug, dessen Geschwindigkeit um 20 $\mathrm{kmh^{-1}}$ geringer ist, braucht dafür 4 Stunden. Wie groß sind die Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge?

6.101 Ein 5 m langes Fahrzeug, das mit einer Geschwindigkeit von 108 $\mathrm{kmh^{-1}}$ unterwegs ist, fährt an einer stehenden Kolonne in 15 Sekunden vorbei. Wie lange ist die stehende Kolonne?

6.102 Drei Ortschaften A, B und C liegen hintereinander auf einer Strecke. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 60 km und zwischen B und C 80 km. Um 7.00 Uhr fährt von A aus ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 $\mathrm{kmh^{-1}}$ in Richtung C. Um 7.30 Uhr fährt ein Mopedfahrer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\mathrm{kmh^{-1}}$ von B nach C.

a) In welcher Entfernung von B überholt der PKW das Moped?

b) Wie weit ist das Moped von C entfernt, wenn der PKW in C ankommt?

6.103 Die Entfernung zweier Ortschaften A und B beträgt 160 km. Zur gleichen Zeit starten von A nach B ein Motorrad mit einer mittleren Geschwindigkeit von 90 $\mathrm{kmh^{-1}}$ und von B nach A ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von von 70 $\mathrm{kmh^{-1}}$.

a) In welcher Entfernung von A begegnen sie einander?

b) Mit welcher mittleren Geschwindigkeit müsste der PKW fahren, damit die Begegnung 100 km von A entfernt erfolgt?

6.104 Ein Auto legt auf der Autobahn eine Strecke von 485 km zurück. Nach 100 km, die mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 $\mathrm{kmh^{-1}}$ zurückgelegt werden, erfolgt ein Tankstop. Dieser dauert 10 Minuten. Mit welcher Geschwindigkeit muss die restliche Strecke zurückgelegt werden, wenn die Ankunft um 18.30 Uhr erfolgen soll. Die Abfahrt vom Ausgangspunkt erfolgte um 14 Uhr.

6.105 Zwei Fahrzeuge fahren einander aus 90 km entfernten Ortschaften entgegen. Die mittleren Geschwindigkeiten betragen 60 $\mathrm{kmh^{-1}}$ bzw. 80 $\mathrm{kmh^{-1}}$. Nach welchen Fahrzeiten beträgt der Abstand zwischen den Fahrzeugen 20 km? (2 Lösungen: vor und nach der Begegnung.)

Leistungsaufgaben

6.106 Ein Trinkwassertank wird in 25 Minuten gefüllt und 24 Minuten entleert. Ist das Abflussventil 6 Minuten geöffnet, so verbleiben noch 6000 Liter Wasser im Tank.

a) Wie viel Liter Wasser fasst der Tank?

b) Wie viel $\mathrm{m^3}$ Wasser fließen pro Minute zu bzw. ab?

6.107 Für die Installationsarbeit in einer Werkshalle würden der Meister und sein Geselle 12 Tage benötigen. Der Meister alleine braucht 20 Tage. In wie vielen Tagen würde der Geselle die Installation beenden?

6.108 Aus einem voll gefüllten Heizöltank mit 1 000 Liter Inhalt bekommt der zweite Kunde doppelt so viel wie der erste Kunde. Der dritte Kunde kauft $\frac{1}{3}$ der Menge der ersten Kundschaft. Es verbleiben danach noch 100 Liter im Tank. Wie viel Liter Heizöl wurden an jeden der Kunden abgegeben?

6.109 Ein Behälter wird durch den ersten Zufluss in 4 Stunden und durch den zweiten Zufluss in 6 Stunden gefüllt.

a) Wie lange dauert das Füllen, wenn beide gleichzeitig in Betrieb sind?

b) Wie lange dauert der Füllvorgang, wenn der zweite Zufluss 1 Stunde länger geöffnet ist?

c) Durch ein Abflussrohr wird das Becken in 3 Stunden entleert. Nach welcher Zeit ist das entleerte Becken wieder halb gefüllt, wenn beide Zuflussrohre und das Abflussrohr geöffnet sind?

d) In welcher Zeit müsste ein zusätzliches Abflussrohr das Becken entleeren, damit durch die beiden Zuflussrohre und die beiden Abflussrohre die gleiche Wassermenge fließt?

6.110 Für das Ausheben eines Kanals werden drei Bagger eingesetzt. Der erste würde für das Ausbaggern alleine 12 Tage, der zweite 15 Tage und der dritte 10 Tage benötigen.

a) Wie lange dauert die Arbeit, wenn alle drei Bagger gleichzeitig eingesetzt werden?

b) Wie lange dauert der Aushub, wenn der dritte Bagger erst fünf Tage später eingesetzt wird?

6.111 Drei Anstreicher sollen den Rumpf eines Schiffes streichen. Der erste würde die Arbeit in $7\frac{1}{2}$ Tagen, der zweite in 6 Tagen und der dritte in 5 Tagen erledigen. Wie lange dauert es, wenn alle drei gleichzeitig streichen?

6.112 Ein Tankbehälter wird durch zwei Röhren gespeist. Die erste Röhre füllt den Tank in 9 Stunden. Nach 4 Stunden wird die zweite Röhre dazugeschaltet, sodass nach 2 Stunden der Behälter gefüllt ist. Wie lange dauert der Füllvorgang durch die zweite Röhre?

6.113 Beim Abbau eines Eisenerzes werden drei Bagger eingesetzt, die pro Tag 33 000 m^3 abbauen. Der erste Bagger schafft 1 000 m^3 mehr als der zweite; der dritte schafft das Dreifache des zweiten. Wie viele m^3 schafft jeder der drei Bagger?

6.114 Drei Pumpen A, B und C sollen 21 200 Liter in ein Becken pumpen.

Pumpleistung	A	B	C
Liter pro Minute	80	100	150

Wie lange dauert der Füllvorgang, wenn die Pumpe A 20 Minuten später als die Pumpe B in Betrieb genommen wird und die Pumpe C $\frac{1}{3}$ h vor der Pumpe B eingeschaltet wird?

6.5 Formelumwandlungen

Eine häufige Aufgabe in der Technik, in den Naturwissenschaften, in den Wirtschaftswissenschaften usw. ist es, eine Formel von einer Größe auf eine andere umzustellen.

Dieses Umwandeln von Formeln ist das Lösen einer Gleichung mit Formvariablen. Diese Formvariablen nehmen im Allgemeinen nur Werte an, die eine Fallunterscheidung unnötig machen.

Beispiel 6.16 : Formelumwandlung

Berechne aus der Formel für die Steighöhe $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beim lotrechten Wurf nach oben die Anfangsgeschwindigkeit v_0!

Lösung

$$
\begin{aligned}
h &= v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 && | \cdot 2 \\
2 \cdot h &= 2\left(v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2\right) \\
2 \cdot h &= 2 \cdot v_0 \cdot t - g \cdot t^2 && | + g \cdot t^2 \\
2 \cdot h + g \cdot t^2 &= 2 \cdot v_0 \cdot t - g \cdot t^2 + g \cdot t^2 \\
2 \cdot h + g \cdot t^2 &= 2 \cdot v_0 \cdot t && | : 2 \cdot t \\
\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2t} &= v_0 \\
v_0 &= \frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2t}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

(Einfache Aufgaben zu Formelumwandlungen befinden sich in Kapitel 1.1.)

Berechne aus folgenden Formeln die gesuchte Variable!

6.115 $v_n = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ **a)** $m_2 = ?$ **b)** $v_2 = ?$

6.116 $v_0' = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \cdot \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$ **a)** $m_1 = ?$ **b)** $v_2 = ?$

6.117 $t_m = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}$ **a)** $t_2 = ?$ **b)** $m_1 = ?$

6.118 $p_1 + \varrho \cdot g \cdot h_1 + \frac{\varrho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \varrho \cdot g \cdot h_2 + \frac{\varrho \cdot v_2^2}{2}$ **a)** $h_2 = ?$ **b)** $p_1 = ?$

6.119 $F_1 = \frac{F_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ **a)** $r = ?$ [✓ **b)**] $R = ?$

6.120 $f' = f \cdot \left(1 - \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot R}\right)$ **a)** $R = ?$ **b)** $G = ?$

6.121 $T_A = T_B \cdot \left(1 - \frac{g \cdot H}{c^2}\right)$ **a)** $g = ?$ **b)** $H = ?$

6.122 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M_A + M_B)}$ **a)** $G = ?$ **b)** $M_B = ?$

6.123 $f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$ **a)** $v_Q = ?$ **b)** $c = ?$

6.124 $\omega' = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \cdot \omega$ **a)** $I_1 = ?$ **b)** $I_2 = ?$

6.125 $v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$ **a)** $m_1 = ?$ **b)** $m_2 = ?$

6.126 $F = G \cdot \frac{R - r}{2 \cdot R}$ **a)** $R = ?$ **b)** $r = ?$

6.127 $s = \frac{c_w \cdot c_l}{c_w - c_l} \cdot \Delta t$ **a)** $c_w = ?$ **b)** $c_l = ?$

6.128 $r_S = \frac{M \cdot R + m \cdot r}{M + m}$ **a)** $M = ?$ **b)** $m = ?$

6.129 $\frac{1}{s} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_B}$ **a)** $f_A = ?$ **b)** $b = ?$

6.130 $W = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$ **a)** $r_A = ?$ **b)** $r_P = ?$

6.131 $\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ **a)** $T_1 = ?$ **b)** $Q_2 = ?$

6.132 $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R \cdot T$ **a)** $a = ?$ **b)** $p = ?$

6.133 $\overline{R} = \frac{m_1 \cdot R_1 + m_2 \cdot R_2}{m_1 + m_2}$ **a)** $R_2 = ?$ **b)** $m_1 = ?$

6.134 $c = \frac{Q}{m \cdot (t_2 - t_1)}$ **a)** $t_1 = ?$ **b)** $t_2 = ?$

6.135 $m_2 = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot (t_1 - t_m)}{c_2 \cdot (t_m - t_2)}$ **a)** $t_1 = ?$ **b)** $t_m = ?$

6.136 $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{L}{\lambda}$ **a)** $\lambda = ?$ **b)** $\alpha_1 = ?$

6.137 $E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Z \cdot e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r}$ **a)** $r = ?$ **b)** $Z = ?$

6.138 $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2m}{h^2}\left[E + \frac{Z \cdot e^2}{k \cdot r}\right]$ **a)** $E = ?$ **b)** $m = ?$

6.139 $f = f_Q \frac{1 + \frac{v_B}{c}}{1 - \frac{v_B}{c}}$ **a)** $v_B = ?$ **b)** $f_Q = ?$

6.140 $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \cdot \omega_1^2$ **a)** $I_1 = ?$ **b)** $I_2 = ?$

6.141 $v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v_x' \cdot v}{c^2}}$ **a)** $v_x' = ?$ **b)** $v = ?$

6.142 $\frac{1}{R_G} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ **a)** $R_G = ?$ **b)** $R_2 = ?$

6.143 $\frac{U_1}{U_2} = R_1\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_2}\right)$ **a)** $R_a = ?$ **b)** $R_2 = ?$

6.144 $R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}$ **a)** $I = ?$ **b)** $R_V = ?$

6.145 $\eta_B = (1 - \nu) \cdot \frac{\beta}{1 - \varepsilon \cdot (1 - \beta)}$ **a)** $\beta = ?$ **b)** $\nu = ?$

6.146 $M_D = \frac{H}{\cos\alpha} \cdot \left(\mu \frac{r_1}{R_1} \cdot R + f \frac{R_1 + R}{R_1}\right)$ **a)** $R_1 = ?$ **b)** $f = ?$

6.147 $\varkappa_P = \frac{1{,}6 \cdot V_s \cdot V_h}{\frac{T_s}{T_u}}$ **a)** $T_u = ?$ **b)** $T_s = ?$

6.148 $W_{12} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot (p_2 V_2 - p_1 V_1)$ **a)** $\kappa = ?$ **b)** $p_1 = ?$

6.149 $W_{12} = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{\kappa - 1} \cdot \left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]$ **a)** $T_2 = ?$ **b)** $T_1 = ?$

6.150 $\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_1}{T_2} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$ **a)** $T_1 = ?$ **b)** $T_2 = ?$

6.151 $Q = c_V \cdot \frac{\kappa - n}{1 - n} \cdot m\,(T_2 - T_1)$ **a)** $T_1 = ?$ **b)** $n = ?$

6.152 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ **a)** $C = ?$ **b)** $C_1 = ?$

6.153 $R_\vartheta = R_{\vartheta 1} \cdot \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{\vartheta_0 + \vartheta_1}$ **a)** $\vartheta_0 = ?$ **b)** $\vartheta_1 = ?$

6.154 $I = \frac{U \cdot R_1}{R\,(R_1 + R_a) - R_1^2}$ **a)** $R_a = ?$ **b)** $R = ?$

6.6 Proportionen

Beispiel 6.17 : Einführendes Beispiel

Ein Fußgänger legt in einer Stunde 5 km zurück und ein Kleinmotorrad 80 km. In welchem Verhältnis stehen die zurückgelegten Wege?

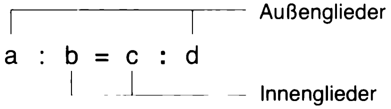
Lösung

Um die beiden Wege zu vergleichen, bildet man den Quotienten (das Verhältnis) $\frac{s_2}{s_1}$:
$\frac{s_2}{s_1} = \frac{80\text{ km}}{5\text{ km}} = 16.$

Das heißt, pro Stunde ist der Weg des Kleinmotorrades 16-mal größer als der Weg des Fußgängers. In der Gleichung $\frac{s_2}{s_1} = \frac{80}{5}$ steht auf der linken und auf der rechten Seite ein Verhältnis. Ersetzt man die Bruchstriche durch die Divisionspunkte, so erhält man $s_2 : s_1 = 80 : 5$ (sprich: "s_2 verhält sich zu s_1 wie 80 zu 5").

Der Quotient 80 : 5 kann nach Kürzen auch in der Form 16 : 1 geschrieben werden. Somit kann man auch schreiben: $s_2 : s_1 = 16 : 1$.

Eine Gleichung der Gestalt $a : b = c : d$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0)$ nennt man **Verhältnisgleichung** oder **Proportion**.



Schreibt man eine Proportion in Bruchform $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und multipliziert die Gleichung mit $b \cdot d$, so erhält man die sogenannte Produktgleichung der Proportion:

$$\mathbf{a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c}$$

Proportion **Produktgleichung**

In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Durch Bilden der Produktgleichung erkennt man, dass eine Vertauschung der Innenglieder oder auch der Außenglieder in einer Proportion keine Veränderungen hervorruft. Beispiel: $a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d$.

Öfters kann es auch vorteilhaft sein, eine Proportion in Form von *zwei* Gleichungen zu schreiben. Wir gehen so vor: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$. Daraus folgt: $a = kc$ und $b = kd$.

$$\mathbf{a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad a = k \cdot c \text{ und } b = k \cdot d}$$

Man erhält die Glieder der einen Seite einer Proportion, wenn man die Glieder der anderen Seite mit einem bestimmten Faktor k ($\neq$ 0), dem sogenannten Proportionalitätsfaktor, multipliziert.

Beispiel: $s_2 : s_1 = 16 : 1 \Leftrightarrow s_2 = 16 \cdot k$ und $s_1 = 1 \cdot k$ mit $k = 5$.

Das geometrische Mittel

Wir betrachten drei Längen $p = 1$ m, $s = 1$ dm und $q = 1$ cm. p ist zehnmal so groß wie s, das wiederum zehnmal so groß wie q ist. Wir merken, dass s zwischen p und q liegt, allerdings nicht im Sinne des arithmetischen Mittels.

Dieses wäre ja gleich $\bar{x} = \frac{p+q}{2} = 0{,}505$ m = 5,05 dm! In unserem Fall handelt es sich aber um das **geometrische Mittel** von p und q, das wie folgt definiert ist:

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_g = \sqrt{p \cdot q}$$

Da $\bar{x}_g = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{1 \cdot 0{,}01}\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{dm}$, ist $s = \bar{x}_g$. Ist allgemein $p = k \cdot s$ und $s = k \cdot q$ ($k > 0$), so können wir die Proportion formulieren: $p : s = s : q$.

Dann lautet die Produktgleichung $s^2 = p \cdot q$ oder $s = \sqrt{p \cdot q}$, also ist s gerade das geometrische Mittel der Außenglieder!

Ein weiteres Beispiel:

Die Erde hat einen mittleren Durchmesser von $2 \cdot 6370$ km $= 1{,}274 \cdot 10^7$ m $\approx 10^7$ m. Ein Atom hat einen Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-10} m. Das geometrische Mittel dieser Größen ist $\bar{x}_g = \sqrt{10^7 \cdot 10^{-10}}$ m $\approx 0{,}03$ m = 3 cm. Dies ist etwa der Durchmesser einer (Wal)Nuss. Wir können also, was den Durchmesser betrifft, sagen: Erde : Nuss ≈ Nuss : Atom. Diese Proportion veranschaulicht, wie klein ein Atom ist.

Die Werte von elektrischen Widerständen sowie anderen technischen Größen werden bevorzugt nach bestimmtem "Reihen" hergestellt. Ein Wert in einer solchen Reihe ist angenähert das geometrische Mittel seiner Nachbarwerte.

Beispiel 6.18 : Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung liegen alle Widerstände an der gleichen Spannung. In welchem Verhältnis stehen die Widerstände zu den Stromstärken?

Lösung

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt: $U = R_1 \cdot I_1$ und $U = R_2 \cdot I_2$; daraus folgt: $R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2$; oder als Proportion geschrieben: $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$.

Die Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände.

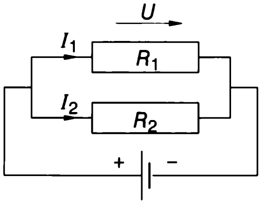


Abb. 6.3 Stromkreis

Beispiel 6.19 : Zylinder

Das Volumen V eines (Dreh-)Zylinders beträgt $V = 81\pi$ cm^3. Für den Radius r und die Zylinderhöhe h gilt folgender Zusammenhang r : h = 1 : 3. Wie groß sind der Radius und die Höhe?

Lösung

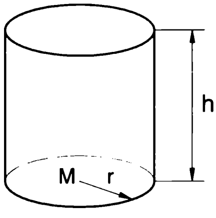


Abb. 6.4 Zylinder

1. Lösungsvorschlag: Aus der Proportion r : h = 1 : 3 erhält man $h = 3 \cdot r$. Einsetzen in die Formel für das Zylindervolumen $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ ergibt: $81\pi = r^2 \cdot \pi \cdot 3r$; daraus $r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$ cm.

Damit ist h = 9 cm.

2. Lösungsvorschlag: $h = 3 \cdot k$ bzw. $r = 1 \cdot k$. Einsetzen in die Volumsformel ergibt: $(1 \cdot k)^2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot k = \pi \cdot 3 \cdot k^3 = 81 \cdot \pi$;
daraus $k^3 = 27 \Rightarrow k = 3$.

Damit ist h = 9 cm und r = 3 cm.

Beispiel 6.20 : Zahnradgetriebe

Bei einem Zahnradgetriebe greifen 2 Zahnräder mit den Radien r_1 und r_2 ineinander. Das erste Zahnrad hat z_1 Zähne und das zweite z_2 Zähne. Welche Beziehung besteht zwischen der Zähnezahl und den Radien?

Lösung

Abb. 6.5 Zahnradgetriebe

Teilt man den Umfang der Zahnräder durch die Zähnezahl, so erhält man die Teilkreisteilungen.

$t_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{z_1}$ bzw. $t_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2}{z_2}$

Bei ineinander greifenden Zahnrädern müssen die Teilkreisteilungen übereinstimmen.

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2}{z_2}$$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$ und damit $r_1 : r_2 = z_1 : z_2$

Die Radien der Zahnräder verhalten sich wie die Anzahl der Zähne.

Aufgaben

Löse die folgenden Proportionen nach x:

6.155 **a)** $2 : x = 5 : 16$ **b)** $\frac{3}{2} : \frac{1}{4} = x : \frac{5}{3}$ **c)** $\frac{x}{2a} : b = \frac{1}{a} : 2$

6.156 **a)** $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = x : \frac{1}{ab}$ **b)** $\frac{1}{x} : \frac{1}{a} = \frac{1}{a} : \frac{1}{t}$ **c)** $\frac{3}{4} : \frac{x}{2} = \frac{3a}{5} : \frac{a}{0,5}$

6.157 **a)** $\frac{x}{u-v} : \frac{u}{u+v} = (u+v)^2 : u$ **b)** $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = x : \frac{n+m}{n-m}$

6.158 **a)** $2a^2x : (-a)^3 = a^{-1} : (2a)^{-1}$ **b)** $3b^{-1} : x = b^{-2} : (3b)^{-1}$

Bringe folgende Verhältnisse auf die Form x : 1.

6.159 **a)** 1000 : 10 **b)** 1 : 0,1 **c)** 0,3 : 0,1 **d)** $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

6.160 **a)** $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$ **b)** 8,1 : 1,8 **c)** 28,8 : 3,2 **d)** 0,6 : 0,01

6.161 Richtig oder falsch? Eine Proportion a : b = c : d wird umgeformt in

a) a : c = b : d **b)** a : b = d : c **c)** a : (b + a) = c : (d + c) **d)** $a : b = \frac{c}{7} : \frac{d}{7}$

6.162 Bilde das arithmetische Mittel $\bar{x}$ sowie das geometrische Mittel $\bar{x}_g$ folgender Zahlen:

a) 1 und 25 **b)** 1 und 100 **c)** 0,1 und 10 **d)** 1 und 2

6.163 In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich die Basis zum Schenkel wie 2 : 5. Ermittle die Dreieckseiten, wenn der Umfang u = 144 cm beträgt.

6.164 Ein Winkel eines Dreiecks beträgt 72°. Die beiden anderen Winkel stehen im Verhältnis 4 : 5. Wie groß sind die Winkel?

6.165 Von einem unregelmäßigen Viereck sind 2 Winkel bekannt; $\alpha = 150°$ und $\beta = 138°$. Für die beiden anderen Winkel gilt: $\gamma : \delta = 3 : 5$. Wie groß sind sie?

6.166 Für Stirnräder gilt: $z_1 : z_2 = d_1 : d_2$, wobei z_1 und z_2 die Zähnezahlen sowie d_1 und d_2 die zugehörigen Durchmesser bedeuten. Ermittle die fehlende Größe!

a) $z_1 = 18$ Zähne; $z_2 = 35$ Zähne; $d_1 = 9$ mm;

b) $z_1 = 12$ Zähne; $d_1 = 12$ mm; $d_2 = 20$ mm.

6.167 Für Kegelräder (für eine Winkelübersetzung) gilt die gleiche Beziehung wie bei den Stirnrädern. Ermittle die fehlende Größe!

a) $z_1 = 16$ Zähne; $z_2 = 20$ Zähne; $d_1 = 24$ mm;

b) $z_2 = 40$ Zähne; $d_1 = 40$ mm; $d_2 = 100$mm.

6.168 Für Kettenräder gilt: $n_1 : n_2 = z_2 : z_1$, wobei n die Umdrehungszahl pro Minute und z die Zähnezahl ist. Ermittle die fehlende Größe!

a) $n_1 = 63$ Upm (Umdrehungen pro Minute); $z_1 = 18$ Zähne; $z_2 = 35$ Zähne.

b) $n_1 = 192$ Upm; $n_2 = 48$ Upm; $z_1 = 14$ Zähne.

6.169 Bei einer Raute (einem Rhombus) gilt für die Winkel die Proportion: $\alpha : \beta = 1 : 2$. Wie groß sind die Winkel?

6.170 Der Umfang eines Deltoides beträgt 98 cm. Die Seiten verhalten sich wie 2 : 5. Wie groß sind sie?

6.171 Das Volumen einer geraden quadratischen Pyramide beträgt 144 cm^3. Für die Grundkante a und die Körperhöhe h gilt: $a : h = 2 : 4$. Berechne die Grundkante a und die Körperhöhe h!

6.172 Für die Radien zweier Kugeln gilt: $r_1 : r_2 = 2 : 5$. In welchem Verhältnis stehen

a) die Oberflächen, **b)** die Volumina, **c)** die Durchmesser der beiden Kugeln?

6.173 Bei einer hydraulischen Hebebühne gilt $F_1 : F_2 = A_1 : A_2$, wobei F_1, F_2 die Kolbenkräfte und A_1, A_2 die Kolbenquerschnitte sind. Der Durchmesser des Pumpenkolbens beträgt 8 cm; jener des Lastkolbens 80 cm. Welche Kraft muss man aufwenden, um einer Last von 5000 N das Gleichgewicht zu halten?

6.174 Für die Strömung in einer Rohrleitung, deren Querschnittsfläche sich verändert, gilt für ideale Flüssigkeiten die Kontinuitätsbedingung: $v_1 : v_2 = A_2 : A_1$, wobei v_1, v_2 die Strömungsgeschwindigkeiten und A_1, A_2 die zugehörigen Querschnittsflächen sind.

a) Zeige, dass die Kontinuitätsbedingung auch in der Form $r_1^2 : r_2^2 = v_2 : v_1$ geschrieben werden kann.

b) Welchen Wert hat die Strömungsgeschwindigkeit v_2, wenn der Durchmesser d_2 um ein Viertel kleiner als der Durchmesser d_1 und $v_1 = 9\ \text{ms}^{-1}$ ist?

6.175 Die Oberfläche eines Zylinders beträgt $80\pi\ \text{cm}^2$. Für den Radius r und die Höhe h gilt: $r : h = 2 : 3$. Berechne den Radius und die Körperhöhe.

6.176 Für den Radius r und die Seitenkante s eines Kegels gilt: $r : s = 2 : 5$. Wie groß sind der Radius und die Seitenkante, wenn die Oberfläche $350\pi\ \text{cm}^2$ beträgt?

6.177 Ein Riementrieb hat zwei Scheiben mit den Durchmessern d_1 und d_2. Die erste Scheibe besitzt die Umdrehungszahl n_1 und die zweite Scheibe n_2.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Radien und den Umdrehungszahlen?

Hinweis: Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Scheiben müssen gleich groß sein ($v = d \cdot \pi \cdot n$)!

b) $n_1 = 2000$ Upm und $n_2 = 3600$ Upm; der Durchmesser $d_1 = 180$ mm. Wie groß muss der Durchmesser d_2 sein?

6.178 Das Mischungsverhältnis von Kalk und Sand bei Kalkmörtel beträgt 2 : 6.

a) Wie viel m^3 Sand braucht man für 8 m^3 Kalk?

b) Wie viel m^3 Kalk braucht man für 8 m^3 Sand?

Beispiel 6.21 : Fortlaufende Proportion

Bei einer Serienschaltung (Abb. 6.6) dreier Widerstände gelten folgende Proportionen $R_1 : R_2 = 2 : 3$ und $R_2 : R_3 = 1 : 2$. Der Gesamtwiderstand beträgt 22 Ω. Wie groß sind die einzelnen Teilwiderstände R_1, R_2, R_3?

Lösung

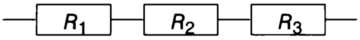


Abb. 6.6 Serienschaltung

$$R_1 : R_2 = 2 : 3$$
$$R_2 : R_3 = 1 : 2 = 3 : 6$$

Wir versuchen zunächst, für alle drei Widerstände eine zusammenhängende Beziehung herzustellen. Da eine Proportion eine Gleichung zwischen Verhältnissen ist, darf man die Glieder einer Seite mit einer beliebigen (von Null verschiedenen) Zahl multiplizieren oder durch diese dividieren.

Diese beiden Proportionen schreibt man abkürzend $R_1 : R_2 : R_3 = 2 : 3 : 6$ und spricht von einer **fortlaufenden Proportion**. Diese fortlaufende Proportion kann man in die drei Gleichungen $R_1 = 2 \cdot k$, $R_2 = 3 \cdot k$ und $R_3 = 6 \cdot k$ mit dem Proportionalitätsfaktor k umschreiben. Da der Gesamtwiderstand bei einer Reihenschaltung die Summe der Teilwiderstände ist, haben wir: $2 \cdot k + 3 \cdot k + 6 \cdot k = 22$; daraus $k = 2$.
Damit: $R_1 = 4$ Ω, $R_2 = 6$ Ω und $R_3 = 12$ Ω.

[illegible]

Proportion: Sie ist eine Gleichung der Gestalt $a : b = c : d$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$). Man nennt sie auch *Verhältnisgleichung* (a, d sind die Außenglieder; b, c sind die Innenglieder).

Die Proportion $a : b = c : d$ ist äquivalent der Produktgleichung $a \cdot d = b \cdot c$.
In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

$a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad a = k \cdot c$ und $b = k \cdot d$
Man erhält die Glieder der einen Seite einer Proportion, wenn man die Glieder der anderen Seite mit einem bestimmten Faktor k, dem Proportionalitätsfaktor, multipliziert.

Fortlaufende Proportion: $a : b : c = d : e : f$. Sie ist gleichwertig zu den zwei Proportionen $a : b = d : e$ und $b : c = e : f$ oder zu den drei Gleichungen $a = k \cdot d$, $b = k \cdot e$ und $c = k \cdot f$, wobei k der Proportionalitätsfaktor ist.

Aufgaben

Bilde aus den gegebenen Proportionen fortlaufende Proportionen:

6.179 **a)** x : y = 2 : 3; y : z = 4 : 5 **b)** a : b = 5 : 2; b : c = 3 : 4 **c)** u : v = 4 : 1; v : w = 3 : 5

6.180 **a)** a : b = 3 : 5; b : c = 3 : 5 **b)** x : y = 4 : 3; y : z = 5 : 7 **c)** u : v = 5 : 6; v : w = 7 : 5

6.181 Schreibe die fortlaufende Proportion in einfache Proportionen um und vereinfache diese:

a) a : b : c = 5 : 3 : 6

b) a : b : c = 0,8 : 0,3 : 1

c) $F_1 : F_2 : F_3$ = 100 N : 150 N : 80 N

d) $R_1 : R_2 : R_3$ = 8 Ω : 10 Ω : 30 Ω

e) $t_1 : t_2 : t_3$ = 0,1 s : 0,08 s : 0,05 s

f) $I_1 : I_2 : I_3$ = 0,6 mA : 20 µA : 0,005 A

6.182 Schreibe die fortlaufende Proportion in einfache Proportionen um und vereinfache diese:

a) a : b : c = 3 : 5 : 6

b) x : y : z = 1 : 4 : 6

c) u : v : w = 2 : 5 : 9

d) x : y : z = 1 : 2 : 5

6.183 Für die Winkel eines Dreiecks gilt folgende Proportion $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. Wie groß sind die einzelnen Winkel?

6.184 In einem Dreieck gilt für die Seiten: a : b : c = 3 : 4 : 5. Der Umfang beträgt 96 cm. Wie groß sind die Seiten?

6.185 In einem Trapez beträgt der Winkel $\alpha = 60°$. Für die anderen Winkel gilt: $\beta : \gamma : \delta = 1 : 5 : 4$. Wie groß sind die Winkel?

6.186 Drei Widerstände sind parallel geschaltet und liegen an einer Spannung U von 32 Volt; der Gesamtwiderstand R beträgt 4 Ω. Für die Teilströme gilt: $I_1 : I_2 : I_3 = 2 : 4 : 10$. Berechne die Teilströme! In welchem Verhältnis stehen die Teilwiderstände? (Es gilt: $U = R \cdot I = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = R_3 \cdot I_3$)

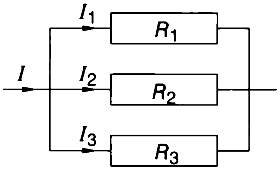


Abb. 6.7 Parallelschaltung

6.187 In einem Quader mit dem Volumen V = 240 cm^3 gilt: l : b : h = 2 : 3 : 5. Berechne die Bestimmungsstücke (l, b, h)!

6.188 Die Oberfläche eines Quaders beträgt 1 152 cm^2. Es gilt: l : b : h = 3 : 2 : 6. Berechne die Länge, Breite und Höhe des Quaders!

6.189 Drei Widerstände sind in Serie geschaltet. Der Gesamtwiderstand beträgt 60 Ω. Für die Teilwiderstände gilt: $R_1 : R_2 : R_3 = 3 : 4 : 5$.

a) Wie groß sind die einzelnen Widerstände?

b) In welchem Verhältnis stehen die Spannungen an den Teilwiderständen?

6.190 Ein Gewinn von € 1 000 000,– wird auf drei Personen A, B und C aufgeteilt. Der Aufteilungsschlüssel wird nach dem Einsatz ermittelt. Die Einsätze verhalten sich wie 3 : 3 : 4. Wie viel erhält jeder der drei Personen?

6.191 In einer Serienschaltung mit drei Widerständen verhalten sich die Teilspannungen $U_1 : U_2 : U_3 = 2 : 4 : 5$. Die Gesamtspannung U beträgt 22 V. Wie groß sind die Teilspannungen?

6.7 Schlussrechnungen

Schlussrechnungen werden angewandt, wenn man

a) von der Einheit einer Größe auf eine Mehrheit dieser Größe,

b) von einer Mehrheit auf die Einheit oder

c) von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit schließt.

Eine Schlussrechnung kann allerdings nur geführt werden, wenn die auftretenden Größen direkt oder indirekt proportional zueinander sind.

Beispiele:

Zu **a)** 1 kg einer Ware kostet € 12,–. Wie viel kosten 12 kg?

Zu **b)** 35 m Draht haben einen Widerstand von 248 Ω. Wie groß ist der Widerstand von 1 m Draht?

Zu **c)** Ein Körper mit der Masse m = 35 kg hat ein Gewicht von 343 N. Wie groß ist das Gewicht eines Körpers, dessen Masse 67 kg beträgt?

Beispiel, wo keine Schlussrechnung möglich ist: Ein Quadrat mit der Seite a = 2 cm hat den Flächeninhalt A = 4cm^2. Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat mit der Seite 6 cm?

Beispiel 6.22 : Einführendes Beispiel – Direkte Proportionalität

Mit 23 Fuhren konnte ein Transportunternehmer 92 m^3 Schotter liefern. Wie viele Fuhren der gleichen Art sind notwendig, um 188 m^3 Schotter zu liefern?

Lösung

Die gelieferte Schottermenge ist direkt proportional zur Anzahl der Fuhren. Je größer die Anzahl der Fuhren, desto größer ist auch die gelieferte Schottermenge. Man sagt auch, dass die Schottermenge und die Anzahl der Fuhren in einem *direkten Verhältnis* stehen. Zur Lösung schreibt man die beiden in der Formulierung der Aufgabe enthaltenen Sätze in zwei Zeilen an:

↑ 92 m^3 .... 23 Fuhren ↑	"Bedingungssatz"
188 m^3 .... x Fuhren	"Fragesatz"

Diese Vorgangsweise ist kennzeichnend für die *Schlussrechnung*. Dabei kann auch eine Pfeilsymbolik helfen. Man zieht zuerst einen Pfeil von x nach oben. Da die gelieferte Schottermenge zur Anzahl der Fuhren *direkt* proportional ist, zieht man einen zweiten Pfeil in *gleicher* Richtung bei den Schottermengen. Die nun ablesbare Proportion lautet: "Pfeilanfang : Pfeilspitze = Pfeilanfang : Pfeilspitze", d. h.

$x : 23 \; = \; 188 : 92;$ daraus: $x = \frac{23 \cdot 188}{92} = 47.$

Die über x stehende Zahl steht im Zähler, ebenso die Größe 188 m^3 am Pfeilanfang. Es sind also 47 Fuhren notwendig, um 188 m^3 Schotter zu liefern.

Beispiel 6.23 : Einführendes Beispiel – Indirekte Proportionalität

Ein Heizölvorrat reicht bei einem täglichen durchschnittlichen Verbrauch von 25 *l* für eine Heizdauer von 120 Tagen. Wie lange würde der gleiche Vorrat reichen, wenn man täglich nur mehr 20 *l* braucht?

Lösung

Die Heizdauer ist indirekt proportional zum täglichen Verbrauch. Bei einer Vergrößerung des täglichen Verbrauchs verkleinert sich die Heizdauer. Man sagt nun auch, dass die Heizdauer und der tägliche Verbrauch in einem *indirekten Verhältnis* stehen.

Wir lösen wieder mit Hilfe einer Schlussrechnung:

25 *l* .... 120 Tage ↑ "Bedingungssatz"
↓ 20 *l* .... x Tage "Fragesatz"

Bei der Kennzeichnung durch Pfeile zieht man zuerst wieder einen Pfeil von x nach oben. Da Verbrauch und Heizdauer *indirekt* proportional sind, zieht man nun den Pfeil bei den Verbrauchswerten in *entgegengesetzter* Richtung. Es gilt wieder:

"Pfeilanfang : Pfeilspitze = Pfeilanfang : Pfeilspitze", d.h.

$x : 120 = 25 : 20$; daraus $x = \frac{25 \cdot 120}{20} = 150$.

Die über x stehende Zahl steht im Zähler, ebenso wieder die Größe 25 *l* am Pfeilanfang. Der Heizölvorrat würde also 150 Tage reichen, wenn man täglich nur mehr 20 *l* braucht.

Aufgaben

6.192 Zum Bau eines Gerüstes brauchen 4 Arbeiter 6 Tage. Wie lange brauchen 6 Arbeiter?

6.193 Um 40 m^3 Wasser mit einer Pumpe zu fördern, wird eine Zeit von 50 Minuten benötigt. Welche Wassermenge kann man in 32 Minuten fördern?

6.194 Ein 20 x 30 Flacheisen (h = 20 mm, b= 30 mm) von einer bestimmten Länge hat eine Masse von 23,7 kg. Welche Masse besitzt ein 40 x 50 Flacheisen mit der gleichen Länge?

6.195 Bei einer chemischen Reaktion setzen 146 g HCl 71 g Cl_2 frei. Wie viel Gramm HCl sind notwendig um 15 g Cl_2 freizusetzen?

6.196 Für einen Kettenantrieb werden 2 Kettenräder benötigt. Wie viele Umdrehungen pro Minute macht das eine Kettenrad mit 15 Zähnen, wenn das andere mit 45 Zähnen 21 Umdrehungen pro Minute ausführt?

6.197 In einem einstufigen Getriebe sind zwei Stirnräder. Das eine Stirnrad hat bei einem Durchmesser von 36 mm 12 Zähne. Wie viele Zähne besitzt das zweite Stirnrad, wenn es einen Durchmesser von 72 mm hat?

6.198 Zwei Widerstände sind parallel geschaltet. Wie groß ist die elektrische Stromstärke durch einen Widerstand von 5 Ω, wenn durch einen Widerstand von 10 Ω ein Strom von 2 A fließt?

6.199 Das Volumen eines Quaders mit einer Höhe von 2 dm beträgt 120 cm^3. Wie groß ist das Volumen (bei gleich bleibender Grundfläche), wenn die Höhe 45 mm beträgt?

6.200 Bei einem Riementrieb beträgt der Durchmesser der einen Scheibe 120 mm und die Umdrehungszahl 3 300 Upm. Wie groß ist die Umdrehungszahl der anderen Scheibe, wenn der Durchmesser 180 mm ist?

6.8 Ungleichungen – Grundlagen

Beispiel 6.24 : Einführendes Beispiel

Ein Jugendlicher steht vor der Wahl zwischen zwei Varianten mobilen Telefonierens in einem bestimmten Netz:

(1) Mit Wertkarte, d.h. kein monatliches Grundentgelt, Verbindungsentgelt € 0,30 pro Minute.

(2) Mit monatlichem Grundentgelt von € 10, Verbindungsentgelt € 0,07 pro Minute.

Unter welcher Anzahl von Minuten muss man beim Telefonieren bleiben, damit die Wertkartenvariante günstiger ist?

Lösung

t ist die Gesprächszeit in Minuten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0{,}30 \cdot t &< 10 + 0{,}07 \cdot t \\ 0{,}23 \cdot t &< 10 \\ t &< \frac{10}{0{,}23} = 43{,}4\ldots \approx 43. \end{aligned}$$

Telefoniert man also weniger als 43 Minuten pro Monat, ist die Wertkartenvariante günstiger.

Eine **Ungleichung** besteht aus zwei Termen, die durch eines der Zeichen $<, \leqslant, >, \geqslant$ in Beziehung gesetzt sind.

Die Begriffe Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungen und Lösungsmenge haben die gleiche Bedeutung wie bei den Gleichungen. Wenn nicht anders vereinbart, gilt: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

Beispiel 6.25 : Vergleich von Zahlen auf der Zahlengeraden

Wir betrachten die Zahlen 2 und 4 bzw. die mit (–1) multiplizierten Zahlen –2 und –4 auf der Zahlengeraden. Stelle eine Größenbeziehung zwischen den beiden positiven Zahlen und eine Beziehung zwischen den beiden negativen Zahlen her!

Lösung

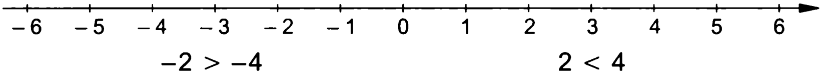


Abb. 6.8 Zahlengerade

Auf der Zahlengeraden kann man leicht erkennen: $2 < 4$, aber $-2 > -4$.

Das Gleiche gilt auch für die Division durch eine negative Zahl, da eine Division eine Multiplikation mit dem Kehrwert der Zahl ist.

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl oder dividiert sie durch diese, so muss das Ungleichheitszeichen zwischen den Termen umgekehrt werden.

Äquivalenzumformungen

Es tritt kein Unterschied zwischen den Äquivalenzumformungen einer Gleichung und einer Ungleichung auf, wenn auf beiden Seiten derselbe Term addiert oder subtrahiert wird oder beide Seiten mit einer positiven Zahl multipliziert oder durch diese dividiert werden. Zusätzlich ist aber zu beachten:

> Das Ungleichheitszeichen muss **umgekehrt** werden, wenn man
> (1) beide Seiten vertauscht,
> (2) beide Seiten mit derselben negativen Zahl multipliziert oder durch diese dividiert.

Multipliziert man beide Seiten mit einem Term oder dividiert man sie durch diesen, muss man wegen (2) zwei Fälle unterscheiden: Man muss jene Menge von Zahlen ermitteln, die bei Einsetzung der Variablen den Term in eine positive oder negative Zahl überführen. Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ bei der Lösung von Ungleichungen soll wieder die "größtmögliche" Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sein.

Beispiel 6.26 : Äquivalenzumformungen

Löse die Ungleichung $2x + 3 > 5x - 7$ durch Äquivalenzumformungen.

Lösung

$$\begin{aligned} 2x+3 &> 5x-7 && |-3 \\ 2x+3-3 &> 5x-7-3 && \\ 2x &> 5x-10 && |-5x \\ 2x-5x &> 5x-10-5x && \\ -3x &> -10 && |:(-3) \\ \frac{-3x}{-3} &< \frac{-10}{-3} && \\ x &< \frac{10}{3} && \mathbb{L} = \left\{x \middle| x < \frac{10}{3}\right\} \end{aligned}$$

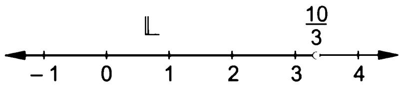


Abb. 6.9 Graphische Darstellung der Lösungsmenge

Alle Zahlen, die kleiner sind als $\frac{10}{3}$, sind somit Lösungen. Wir können eine Zahlenprobe (keine echte Probe!) mit etwa $x = 2$ machen: $2 \cdot 2 + 3 > 5 \cdot 2 - 7$ oder $7 > 3$.

Beispiel 6.27 : Betragsungleichung

Löse die Ungleichung $|x| \leqslant 2$ und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.

Lösung

Aufgrund der Definition von $|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$, muss bei Betragsungleichungen eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

Fall 1: $x \geqslant 0$ $x \leqslant 2$	Wenn $x \geqslant 0$ ist, so gilt aufgrund der Betragsdefinition: $|x| = x$. Somit ergibt sich die Ungleichung $x \leqslant 2$.
$\mathbb{L}_1 = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\} = [0, 2]$	Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ ist die Menge aller x, die größer oder gleich 0 sowie kleiner oder gleich 2 ist. Die Bedingung $x \geqslant 0$ in $\mathbb{L}_1$ ist die Voraussetzung des Falles 1.

Fall 2: $x < 0$

$$-x \leqslant 2 \quad | \cdot(-1)$$
$$x \geqslant -2$$
$$\mathbb{L}_2 = \{x \mid -2 \leqslant x < 0\} = [-2, 0[$$

Wenn $x < 0$ ist, so gilt auf Grund der Betragsdefinition: $|x| = -x$. Somit ergibt sich die Ungleichung $-x \leqslant 2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ ist die Menge aller x, die kleiner als 0 sowie größer oder gleich −2 ist. Die Bedingung $x < 0$ in $\mathbb{L}_2$ ist die Voraussetzung des Falles 2.

Da sowohl alle Elemente von $\mathbb{L}_1$ als auch von $\mathbb{L}_2$ die Ungleichung $|x| \leqslant 2$ erfüllen, ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$, dieVereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [0, 2] \cup [-2, 0[= [-2, 2]$$

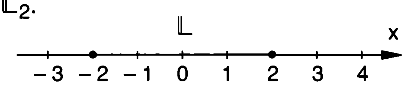


Abb. 6.10 Lösungsmenge

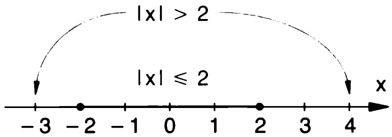


Abb. 6.11 Graphische Darstellung

Die Ungleichung $|x| \leqslant 2$, die gleichwertig der Ungleichung $|x - 0| \leqslant 2$ ist, erfasst alle Punkte x der Zahlengeraden, die vom Punkt 0 höchstens den Abstand 2 haben: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Andererseits würde die Ungleichung $|x| > 2$ alle Punkte x der Zahlengeraden erfassen, die vom Punkt 0 einen größeren Abstand als 2 haben: $x < -2 \vee x > 2$.

Ist $k \geqslant 0$, dann gilt:

(1) $|x| \leqslant k \Leftrightarrow -k \leqslant x \leqslant k$

(2) $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$

(3) $|x| \geqslant k \Leftrightarrow -k \geqslant x \vee x \geqslant k$

(4) $|x| > k \Leftrightarrow -k > x \vee x > k$

Beispiel 6.28 : Betragsungleichung

Löse die Betragsungleichung $|2x - 4| < 5$.

Lösung

Fall 1: $2x - 4 \geqslant 0$

$$2x \geqslant 4$$
$$x \geqslant 2$$

Wir untersuchen also im Fall 1, welche der Zahlen $x \geqslant 2$ Lösungen sind.

$$2x - 4 < 5$$
$$2x < 9$$
$$x < \tfrac{9}{2}$$

$$\mathbb{L}_1 = \left\{x \mid 2 \leqslant x < \tfrac{9}{2}\right\} \text{ oder } \mathbb{L}_1 = \left[2, \tfrac{9}{2}\right[$$

Somit lautet die Lösungsmenge:

Fall 2: $2x - 4 < 0$

$$2x < 4$$
$$x < 2$$

Im Fall 2 untersuchen wir nun, welche der Zahlen $x < 2$ Lösungen sind.

$$-(2x - 4) < 5$$
$$-2x + 4 < 5$$
$$-2x < 1$$
$$x > -\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{x \mid -\tfrac{1}{2} < x < 2\right\} \text{ oder } \mathbb{L}_2 = \left]-\tfrac{1}{2}, 2\right[$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{2}\right[$$

Abb. 6.12 zeigt die graphische Darstellung der Lösungsmenge als Menge aller Punkte x, die vom Punkt 2 einen kleineren Abstand als 2,5 haben.

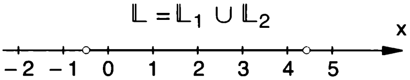


Abb. 6.12 Lösungsmenge

6.9 Bruchungleichungen

Beispiel 6.29 : Einführendes Beispiel

Löse folgende Bruchungleichung $\frac{2 \cdot a}{a + 1} > 3$ und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.

Lösung

Einschränkung für die Definitionsmenge der Ungleichung: $a \neq -1$ (da sonst der Nenner gleich 0 ist). Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. Dadurch ergeben sich 2 Fälle:

$a + 1 > 0$ (Nenner positiv) und $a + 1 < 0$ (Nenner negativ).

Fall 1:

$$\begin{aligned} a+1 &> 0 && \mid -1 \\ a &> -1 \\ \frac{2 \cdot a}{a+1} &> 3 && \mid \cdot (a+1) \\ 2a &> 3(a+1) \\ 2a &> 3a+3 && \mid -2a \\ 0 &> a+3 && \mid -3 \\ -3 &> a \Leftrightarrow a < -3 \end{aligned}$$

Wenn $a > -1$ ist, dann ist der Nenner positiv.

Beide Seiten werden mit $(a + 1)$ multipliziert.

Es gibt keine reelle Zahl, die die Bedingungen $a > -1$ und $a < -3$ erfüllt. Daher $\mathbb{L} = \{\}$.

$\mathbb{L}_1 = \{\}$

Fall 2:

$$\begin{aligned} a+1 &< 0 && \mid -1 \\ a &< -1 \\ \frac{2 \cdot a}{a+1} &> 3 && \mid \cdot (a+1) \\ 2a &< 3(a+1) \\ 2a &< 3a+3 && \mid -2a \\ 0 &< a+3 && \mid -3 \\ -3 &< a \Leftrightarrow a > -3 \end{aligned}$$

Wenn $a < -1$ ist, dann ist der Nenner negativ.

Beide Seiten werden mit $(a + 1)$ multipliziert. Da der Nenner jetzt negativ ist, muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden.

Die Ungleichung wird erfüllt, wenn $a < -1$ *und* $a > -3$ ist. Das heißt, alle reellen Zahlen des Intervalls $]-3, -1[$ erfüllen die Ungleichung.

$\mathbb{L}_1 = \{a \mid -3 < a < -1\} =]-3, -1[$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{\} \cup]-3, -1[=]-3, -1[$

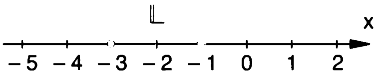


Abb. 6.13 Graphische Darstellung der Lösungsmenge von Beispiel 6.29

Im Überblick: Ungleichungen ●

Eine **Ungleichung** besteht aus zwei Termen, die durch eines der Zeichen $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ verbunden sind.

Äquivalenzumformungen: Gegenüber den Äquivalenzumformungen einer Gleichung muss man bei den Ungleichungen zusätzlich beachten:
Das Ungleichheitszeichen muss umgekehrt werden, wenn man
(1) beide Seiten vertauscht,
(2) beide Seiten mit derselben negativen Zahl multipliziert oder durch diese dividiert.

Aufgaben

Löse folgende Ungleichungen und stelle die Lösungsmenge graphisch dar!

6.201 **a)** $x > 2x - 3$ **b)** $3a + 7(a - 1) \geqslant a - 6(3a + 2)$ **c)** $4b - 2 \leqslant 3b - (2b - 2)$

6.202 **a)** $2x + 3 - (x - 4) + 3x < 5(x - 3) + 2x - (2 - x)$
b) $4x - (5 + x) - (x + 2) > 3x + 3(3 - x) + 4$

6.203 **a)** $3a - 3(a + 3) - 2(a - 1)^2 < -2(a + 1)^2 + 3a$
b) $4b + (b - 1)(b + 1) - 2(b + 2) \geqslant 2b^2 - (b + 1)^2 + 3b$

6.204 **a)** $(2x + 3)(4x - 8) + (x + 1)^2 > 9(x - 1)(x + 1) + 4$
b) $(2 - 3x)^2 - (x + 2)^2 + 26 \leqslant \frac{1}{2}(4x + 2)^2$

6.205 **a)** $(a + 1)^3 - a^3 - (a - 1)^2 > 2(a + 5)^2 - 5$
b) $(2b + 1)^2 - 2(b + 1)^2 \geqslant 2b^2 + b - (2b + 3)$

6.206 **a)** $\frac{3x - 2}{3} \geqslant \frac{4x - 5}{2}$ **b)** $\frac{5x - 3}{3} + \frac{2x - 3}{6} \leqslant \frac{4x - 5}{2}$ **c)** $\frac{3a - 2}{2} - \frac{2a + 1}{3} \geqslant \frac{2a}{3}$

6.207 **a)** $5 + \frac{2x - 6}{5} \leqslant 1$ **b)** $1 - \frac{2x + 4}{3} > \frac{2x - 2}{4}$ **c)** $\frac{2b + 2}{3} - \frac{b}{6} \geqslant \frac{b}{3} - \frac{2b + 6}{4}$

6.208 **a)** $|x| < 3$ **b)** $|x| \geqslant -3$ **c)** $2 \cdot |2x| < 3$ **d)** $|3x| < \frac{4}{5}$

6.209 **a)** $|x - 1| < 3$ **b)** $|x + 1| \geqslant 3$ **c)** $|2 - x| < 3$ **d)** $|\frac{x}{2} - 1| < \frac{3}{4}$

6.210 **a)** $|2a - 4| \geqslant 2$ **b)** $|b - 3| < \frac{3}{5}$ **c)** $|a + \frac{1}{4}| < \frac{1}{8}$ **d)** $|\frac{x}{3} - \frac{5}{6}| \leqslant \frac{2}{3}$

6.211 **a)** $|\frac{x + 1}{2} - \frac{1}{4}| > \frac{3}{4}$ **b)** $|1 - \frac{x + 1}{2}| < 2$ **c)** $|\frac{2x - 1}{2} + 4| > 2$ **d)** $|3\frac{x + 1}{4} - 2| \leqslant 1$

Gib die Einschränkungen für die Definitionsmenge an, löse die Ungleichung und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.

6.212 **a)** $\frac{x}{x + 3} < 4$ **b)** $\frac{3}{x - 2} > 0$ **c)** $\frac{5}{2 + x} < 5$ **d)** $\frac{2x}{x + 1} \geqslant \frac{4}{5}$

6.213 **a)** $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x - 2}{x}$ **b)** $\frac{2}{x - 3} < 4$ **c)** $\frac{5}{4 - x} \geqslant 6$ **d)** $\frac{3x}{1 - x} \leqslant \frac{3}{5}$

6.214 **a)** $\frac{4}{x + 2} < \frac{6}{5}$ **b)** $\frac{a^2}{a + 3} \leqslant \frac{4}{3} + a$ **c)** $\frac{b}{2 - b} > -\frac{b + 1}{b}$

6.215 **a)** $\frac{a}{2 - a} \geqslant \frac{a}{a + 2}$ **b)** $\frac{a - 3}{2 + a} \geqslant \frac{2a - 3}{a + 2}$ **c)** $\frac{4x - 3}{x + 3} \leqslant \frac{2x}{\frac{x}{2} - 1}$

6.216 **a)** $\frac{x}{2x - 2} \leqslant \frac{2x + 1}{4x}$ **b)** $\frac{2a - 3}{3a + 2} > \frac{1 - 4a}{1 - 6a}$ **c)** $\frac{3b}{2 - 3b} \geqslant \frac{-4b}{4b + 1}$

7 Lineare Gleichungssysteme

Wir haben bisher lineare Gleichungen (oder Ungleichungen) mit *einer* Variablen gelöst. Sehr oft treten jedoch in technischen oder wirtschaftlichen Anwendungen Probleme auf, in der mehrere Variablen vorkommen. Typische Beispiele dafür sind die Berechnung elektrischer Netzwerke oder in der Mechanik die Berechnung der Spannungen in einem belasteten Werkstück nach der sogenannten Methode der finiten Elemente. Im letzteren Fall ist das Auftreten von zehntausenden Variablen keine Seltenheit. Glücklicherweise gelingt es oft, mit *linearen* Gleichungen die Situation ausreichend gut zu beschreiben. Die rechnerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen ist daher eine zentrale Aufgabe in der angewandten Mathematik.

Im Wirtschaftsbereich gibt es Aufgabenstellungen, wo man unter vielen möglichen Lösungen die für einen bestimmten Zweck bestmögliche sucht. Dies kann in einem Fall jene sein, die den Gewinn größtmöglich oder in einem anderen Fall die Herstellungskosten minimal macht. Auch hier versucht man, mit *linearen* Gleichungen und Ungleichungen auszukommen.

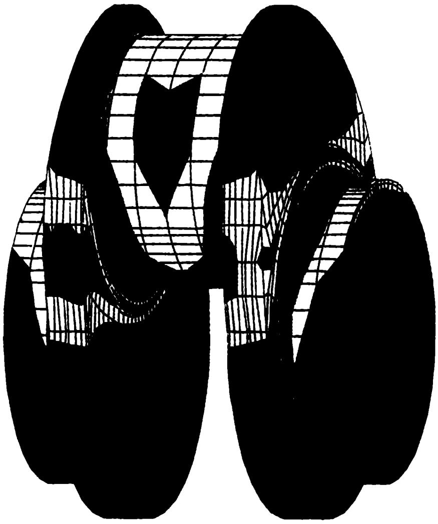


Abb. 7.1 Berechnung der in einer Kurbelwelle auftretenden Spannungen nach der Methode der finiten Elemente

7.1 Eine lineare Gleichung in zwei Variablen

Beispiel 7.1 : Einführendes Beispiel

Ein Rechteck hat einen Umfang u = 60 cm. Wie lang sind die Rechteckseiten?

Lösung

Für den Umfang gilt: u = 2 (l + b). Wir lösen diese Gleichung etwa nach l auf.

$$60\text{ cm} = 2(l + b)$$
$$30\text{ cm} = l + b$$
$$l = 30\text{ cm} - b$$

Da man für b jede Länge zwischen 0 cm und 30 cm einsetzen kann, erkennt man, dass – erwartungsgemäß – diese Aufgabenstellung keine eindeutige Lösung besitzt. Zu jeder Breite b gehört eine bestimmte Länge l. Ist etwa b = 12 cm, so ist l = 18 cm.

Eine Lösung besteht also nun nicht aus einer einzigen Zahl, sondern aus einem **Paar** von Zahlen (wenn wir die Zahlenwerte von l und b nehmen). *Vereinbaren* wir, dass in diesem Paar *immer* die erste Zahl die Rechteckslänge, die zweite Zahl die Breite bedeuten soll, so erhalten wir ein **geordnetes Zahlenpaar**. Die obige Lösung notieren wir dann kurz in der Form (18, 12) oder als Größenpaar (18 cm, 12 cm).

l in cm	…	1	…	5	…	18	…	29	…	29,9	…
b in cm	…	29	…	25	…	12	…	1	…	0,1	…

In dieser Tabelle sind nur einige der möglichen Lösungen dargestellt. Die Gleichung besitzt **unendlich viele** Lösungen, entsprechend der Tatsache, dass es unendlich viele Rechtecke mit dem Umfang 60 cm gibt. Die Lösungen fasst man zu einer Lösungsmenge zusammen:

$\mathbb{L} = \{(l, b) \mid l = 30\text{ cm} - b \wedge l > 0 \wedge b > 0\}$.

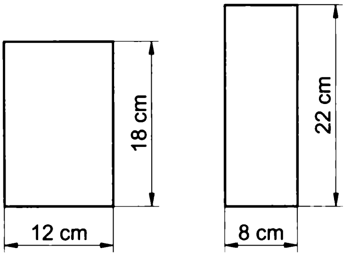


Abb. 7.2 Zwei Lösungen (18 cm, 12 cm), (22 cm, 8 cm)

Anmerkungen:

(1) Grundsätzlich gelten für die Grund- und Definitionsmenge die gleichen Überlegungen wie im Abschnitt 6.1 (Seite 210 ff).

(2) Die Grundmenge bei Zahlenpaaren (x, y) muss Auskunft geben, aus welcher Menge für x und aus welcher Menge für y eingesetzt werden darf. Diese Mengen müssen nicht gleich sein. So kann x für einen Preis, y für eine Stückzahl stehen. Während für x jede positive Zahl (eventuell auch noch 0) denkbar ist, können für y nur natürliche Zahlen eingesetzt werden. Bezeichnet $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, also $\mathbb{R}^+ =]0, \infty[$, so gilt $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{N}$. Man schreibt kurz $\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ (lies: "R plus kreuz N").

Sind beide Zahlenmengen gleich $\mathbb{R}$, so schreibt man dafür $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ("lies R Quadrat"). Wenn nicht anders angegeben wird, vereinbaren wir als Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$.

Graphische Darstellung von Beispiel 7.1:

Im Abschnitt 5.5 (Lineare Funktion und Gerade) haben wir gesehen, dass der Graph einer linearen Funktion ($y = k \cdot x + d$, wobei k und d Konstanten sind) eine Gerade darstellt.

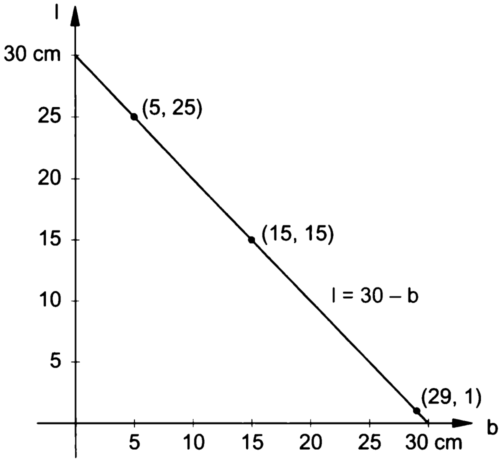


Abb. 7.3 Graphische Darstellung einer linearen Gleichung in zwei Variablen

Die Lösungen der Gleichung $l = 30 - b$ sind alle Punkte, die auf der Geraden mit der Gleichung $l = 30 - b$ liegen (Abb. 7.3). Sinnvolle Lösungen ergeben sich jedoch nur für die Werte von b, die zwischen 0 und 30 liegen. Ist $b = 0$ bzw. $b = 30$ so wird das Rechteck zu einer Strecke (entartetes Rechteck).

Eine Gleichung der Form $ax + by = c$, wobei a, b, c Konstanten sind, nennt man eine **lineare Gleichung** in den zwei Variablen x und y.

7.2 Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen

Beispiel 7.2 : Einführendes Beispiel

An welcher Stelle muss ein 6 m langer zweiseitiger Hebel unterstützt werden, wenn an seinen Enden Kräfte von $F_1 = 200$ N bzw. $F_2 = 400$ N wirken und Gleichgewicht herrschen soll (Abb. 7.4)?

Lösung

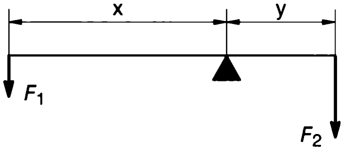


Abb. 7.4 Zweiseitiger Hebel

Aus der Abb. 7.4 kann die erste Gleichung abgelesen werden. Die Summe der Längen beider Hebelarme ergibt 6 m.

I: $x + y = 6$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Hebelbedingung: Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

II: $F_1 \cdot x = F_2 \cdot y$; setzt man die Werte für die Kräfte ein und formt um, so erhält man:

II: $-200 \cdot x + 400 \cdot y = 0$

Die gesuchte Lösung (x, y) muss sowohl die erste als auch die zweite Gleichung erfüllen. Die erste Tabelle gibt einen Teil der möglichen Lösungen der Gleichung I an.

x	1	2	3	4	5	6
y	5	4	3	2	1	0

In der zweiten Tabelle sind ein Teil der Lösungen der Gleichung II angegeben.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5

Jede der Gleichungen I und II hat *unendlich viele* Lösungen. Das geordnete Zahlenpaar (4, 2) erfüllt als einziges sowohl die erste als auch die zweite Gleichung. Die gesuchte Lösungsmenge ist der Durchschnitt der Lösungsmenge von Gleichung I mit der Lösungsmenge von Gleichung II. Wir schreiben: $\mathbb{L} = \{(4, 2)\}$ oder auch $x = 4$, $y = 2$.

Der Hebel muss 4 m von seinem linken Ende entfernt unterstützt werden.

Probe :

I: $x + y = 6$
$4 + 2 = 6$

II: $-200 \cdot x + 400 \cdot y = 0$
$-200 \cdot 4 + 400 \cdot 2 = 0$
$-800 + 800 = 0$

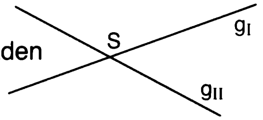
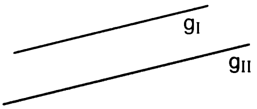
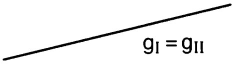
Die beiden linearen Gleichungen I und II bilden ein *System von Gleichungen*; in diesem Fall ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen in 2 Variablen.

Ein System von Gleichungen der Form

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

bezeichnet man als ein **lineares Gleichungssystem** von 2 Gleichungen in 2 Variablen (Unbekannten) x und y, wobei die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} und die Konstanten b_1 und b_2 reelle Zahlen sind.

Nun stellt sich die Frage nach der **Lösbarkeit eines linearen Gleichungssytems**. Geometrisch betrachtet stellt ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen in 2 Variablen zwei Geradengleichungen dar. Die Frage nach den möglichen Lösungen eines solchen Systems kann man aus den möglichen Lagen zweier Geraden in der Ebene beantworten.

	Lage der Geraden	Lösung
1.	schneidende Geraden 	*Eindeutige Lösung.* Die beiden Koordinaten des Schnittpunktes entsprechen der Lösung. Es gibt **genau eine Lösung**.
2.	parallele, nicht zusammenfallende Geraden 	Die beiden Geraden haben keinen Punkt gemeinsam. Das bedeutet, die Lösungsmenge ist die *leere Menge*. Das Gleichungssystem besitzt **keine Lösung**.
3.	zusammenfallende Geraden 	Die beiden Geraden haben alle Punkte gemeinsam. Das heißt, die Lösungsmenge besteht aus *unendlich* vielen Zahlenpaaren. Es gibt **unendlich viele Lösungen**.

Beispiel 7.3: Genauigkeitsprobleme bei linearen Gleichungssystemen

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + 2y = 3 \\ \text{II:} & 0{,}499x + 1{,}001y = 1{,}5 \end{array}$$

Lösung

Durch Nachrechnen erkennt man, dass die Lösung lautet: $x = 1$ und $y = 1$.

Nehmen wir nun an, jemand ersetzt den Koeffizienten 1,001 in der zweiten Gleichung durch 1, was hier nur eine kleine Ungenauigkeit bedeutet:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + 2y = 3 \\ \text{II:} & 0{,}499x + y = 1{,}5 \quad | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + 2y = 3 \\ \text{II:} & -0{,}998x - 2y = -3 \end{array}$$

Addiert man die Gleichungen, so erhält man $0{,}002x = 0$; daraus $x = 0$ und weiter nach Einsetzen in eine der beiden Gleichungen $y = 1{,}5$. Die kleine Ungenauigkeit führt zu einer großen Ungenauigkeit in der Lösung!

Geometrisch wird dieses Gleichungssystem durch zwei Geraden veranschaulicht, die einander unter einem sehr kleinen Winkel schneiden; es entsteht ein *schleifender Schnitt*. In einem solchen Fall wirkt sich eine kleine Änderung der Geradensteigung wesentlich auf den Schnittpunkt aus.

Gleichungssysteme wie im Beispiel 7.3 heißen **schlecht konditioniert** (veranlagt). Glücklicherweise ist eine so empfindliche Abhängigkeit der Lösungswerte von den Angaben häufig nicht gegeben. Es empfiehlt sich jedoch, die Rechnung stets genau und auch mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit zu führen. Werden zur Kontrolle Zwischenergebnisse angeschrieben, so sollte nicht mit diesen gerechnet werden.

Aus den vorherigen Überlegungen bietet sich zunächst die graphische Lösung an. Wir werden später auch numerische Methoden kennenlernen.

Graphische Lösung

Im Kapitel 5.5 haben wir unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten einer Geraden durchbesprochen. Sie werden an dieser Stelle nicht mehr wiederholt.

Beispiel 7.4 : Eindeutige Lösbarkeit

Löse das lineare Gleichungssystem graphisch.

I: $-2x + y = -2$

II: $\frac{1}{2}x + y = 3$

Lösung

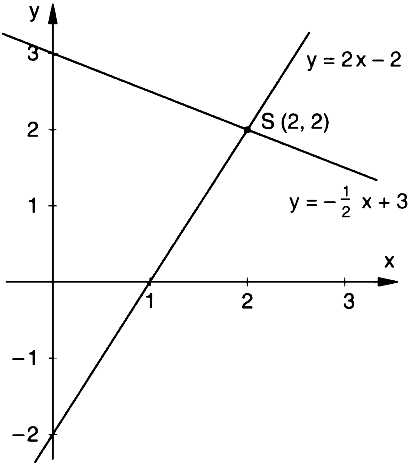


Abb. 7.5 Graphische Lösung

Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt S (2/2). Es gibt genau eine Lösung.

$\mathbb{L} = \{(2, 2)\}$

Beispiel 7.5 : Die weiteren Lösungsfälle

Was muss man am Beispiel 7.4 an der zweiten Gleichung ändern, damit das Gleichungssystem **a)** unlösbar wird, **b)** unendlich viele Lösungen besitzt?

Lösung

Zu **a)** Das System ist genau dann unlösbar, wenn die *zwei Geraden parallel und nicht zusammenfallend* sind. Wir wissen bereits, dies ist der Fall, wenn die Steigungen der beiden Geraden gleich, jedoch die y-Abschnitte verschieden sind. Das bedeutet, dass die Koeffizienten von x und y in beiden Gleichungen gleich oder proportional und die Konstanten auf der rechten Seite der Gleichung verschieden sind.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -2x + y = -2 \\ \text{II:} & \frac{1}{2}x + y = \ \ 3 \end{array}$$

Gleichungssystem aus Beispiel 7.4

Da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen gleich groß sind, muss dies auch für die Koeffizienten von x gelten. Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem, wenn wir in diesem Sinne die 2. Gleichung ändern:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -2x + y = -2 \\ \text{II:} & -2x + y = \ \ 3 \end{array}$$

Die Unlösbarkeit erkennt man hier ganz leicht daraus, dass Gleichung I und Gleichung II unterschiedliche Summenwerte für $-2x + y$ verlangen!

Zu **b)** Mit ähnlichen Überlegungen kann man erkennen, dass ein lineares Gleichungssystem eine *unendliche* Lösungsmenge besitzt, wenn beide Gleichungen übereinstimmen oder die entsprechenden Koeffizienten *und* Konstanten in beiden Gleichungen proportional sind.

In diesem Fall könnte man eine der beiden Gleichungen weglassen, wodurch *eine* Gleichung mit *zwei* Variablen übrigbleibt.

Rechnerische (numerische) Verfahren:

Das Ziel beim Lösen eines linearen Gleichungssystems in 2 Variablen ist es, durch bestimmte Verfahren das Gleichungssystem in *eine* lineare Gleichung mit *einer* Variablen umzuformen. Wir besprechen 4 verschiedene Verfahren:

1. Gleichsetzungsverfahren,
2. Einsetzungsverfahren,
3. Additionsverfahren,
4. Cramer'sche Regel.

Beispiel 7.6 : Gleichsetzungsverfahren

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 5x - 3y = -2 \\ \text{II:} & 2x + \ \ y = \ \ 8 \end{array}$$

Lösung

Man löst beide Gleichungen des Systems nach derselben Variablen, etwa y, auf.

Aus Gleichung I:

$y = \frac{5x + 2}{3}$

Aus Gleichung II:

$y = 8 - 2x$

Da die linken Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen, müssen auch die rechten Seiten gleich sein.

$\frac{5x + 2}{3} = 8 - 2x$; daraus $x = 2$.

$x = 2$ wird nun in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und man erhält:

$y = 8 - 2x$

$y = 8 - 2 \cdot 2 = 4$

Damit ergibt sich als Lösung: $\mathbb{L} = \{(2, 4)\}$

Probe:

I: T_L: $5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$; T_R: -2;

II: T_L: $2 \cdot 2 + 4 = 8$; T_R: 8.

Das heißt, das Lösungspaar erfüllt die beiden Gleichungen.

Beispiel 7.7 : Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren)

Löse das Gleichungssystem:
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 5x - 3y = -2 \\ \text{II:} & 2x + y = 8 \\ \hline \end{array}$$

Lösung

Man löst eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen auf und setzt den dafür erhaltenen Term für diese Variable in die andere Gleichung ein. Wir lösen etwa Gleichung II nach y auf.

$y = 8 - 2x$

Den für y erhaltenen Term setzen wir in Gleichung I ein:

$5x - 3(8 - 2x) = -2$; daraus $x = 2$.

Mit $x = 2$ erhält man aus Gleichung II den Wert für y: $y = 8 - 2 \cdot 2 = 4$.

Damit: $\mathbb{L} = \{(2, 4)\}$.

Beispiel 7.8 : Additionsverfahren

Löse das Gleichungssystem:
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 5x - 3y = -2 \\ \text{II:} & 2x + y = 8 \\ \hline \end{array}$$

Lösung

Man multipliziert eine der beiden Gleichungen so mit einer Zahl, dass nach anschließender Addition der Gleichungen nur noch eine Variable vorkommt. Gegebenenfalls kann man vor der Addition auch beide Gleichungen geeignet multiplizieren.

$$\begin{array}{lrl} \text{I:} & 5x - 3y = -2 & \\ \text{II:} & 2x + y = 8 & \mid \cdot 3 \\ \hline \text{I:} & 5x - 3y = -2 & \rbrace + \\ \text{II:} & 6x + 3y = 24 & \\ \hline & 11x \quad = 22 & \\ & x = 2 & \end{array}$$

Die Lösung $x = 2$ setzt man in Gleichungen I oder II ein und löst nach y:

$$\begin{array}{l} \text{II: } 2 \cdot 2 + y = 8 \\ \qquad\quad y = 4 \end{array}$$

und damit: $\mathbb{L} = \{(2, 4)\}$.

Wie schon erwähnt, wird beim Lösen eines linearen Gleichungssystems in zwei Variablen dieses auf eine lineare Gleichung in einer Variablen reduziert. Aus der Art dieser Gleichung kann man erkennen, welche Lösbarkeit das Gleichungssystem besitzt.

Beispiel einer Schlusszeile	Lösbarkeit
$x = 5$	*Eindeutige Lösung*
$0 \cdot x = 4$	*Keine Lösung*
$0 \cdot x = 0$	*Unendlich viele Lösungen*

Beispiel 7.9 : Auflagerkräfte bei einem Stützträger

Ein Träger (Abb. 7.6) ist auf einer horizontalen Unterlage in zwei Punkten A und B gestützt. Dabei soll er in A auf der Unterlage verschiebbar sein, während dies in B nicht möglich sei, was in der Abbildung symbolisch dargestellt ist ("Loslager" in A, "Festlager" in B). Der Träger ist durch die Kräfte mit den Beträgen $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 4$ kN und $F_3 = 3$ kN belastet. Weiters ist $l = 2$ m gegeben. Berechne die Beträge der von den Lagern in A und B hervorgerufenen so genannten Auflagerkräfte!

Lösung

Der Rechnung liegt ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der x-Achse parallel zur Trägerachse zugrunde. Es kann ohne Einfluss auf die folgende Rechnung beliebig parallel verschoben werden. In diesem Sinne vorausgesetzt unterbleibt bei Aufgaben dieser Art oft eine besondere Angabe des Koordinatensystems.

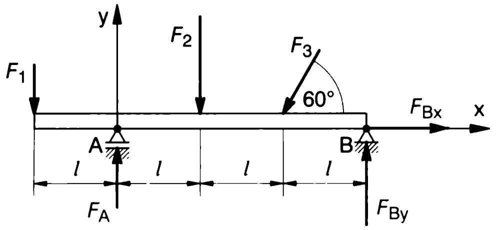


Abb. 7.6 Träger mit Kräften belastet

Durch die Art der Lagerung kann das Lager in A nur durch eine senkrechte Auflagerkraft $\vec{F}_A$ "reagieren", während die Auflagerkraft $\vec{F}_B$ nicht nur eine senkrechte Komponente $\vec{F}_{By}$, sondern auch eine horizontale Komponente $\vec{F}_{Bx}$ haben kann.

In der Technischen Mechanik wird in einer Zeichnung oder in einem Text, der sich auf einen Kraftpfeil in einer Zeichnung bezieht, auf die besondere Kennzeichnung der Kraft als Vektor üblicherweise verzichtet. So schreibt man dort nur den Betrag F statt $\vec{F}$.

Seien $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ die *vektoriellen* Komponenten einer Kraft $\vec{F}$ in x- bzw. y-Richtung, also $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Je nachdem, ob $\vec{F}_x$ in die positive oder negative Richtung der x-Achse weist, hat die *skalare* Komponente F_x von $\vec{F}$ positives oder negatives Vorzeichen. Entsprechendes gilt für die *skalare* Komponente F_y. Siehe auch Seite 275.

In der Physik werden die skalaren **Gleichgewichtsbedingungen für ein ebenes Kräftesystem**, wie im Falle des Stützträgers gegeben, formuliert:

$$\text{I: } \sum F_{ix} = 0; \quad \text{II: } \sum F_{iy} = 0; \quad \text{III: } \sum M_i = 0$$

Die Summe der skalaren Kraftkomponenten in x-Richtung, in y-Richtung sowie der Momente aller Kräfte ist null.

Unter dem Betrag des (Dreh-)**Momentes** einer Kraft bezüglich eines Punktes versteht man das Produkt des Betrages der Kraft mit dem Normalabstand ihrer Wirkungslinie von diesem Punkt. Bei einer Drehrichtung im Gegeuhrzeigersinn (mathematisch positiver Drehsinn) wird es positiv vereinbart, andernfalls negativ (oder null). Der Bezugspunkt für die Momentenbedingung III ist frei in der Ebene der Kräfte wählbar.

Wir wählen dafür den Punt A. Dann ist beispielsweise das Moment der Kraft $\vec{F}_1$ gleich + $F_1 \cdot l$, das Moment der Kraft $\vec{F}_A$ ist null (Normalabstand ist null) und das Moment der Kraft $\vec{F}_2$ ist gleich - $F_2 \cdot l$.

Die Bestimmung des Normalabstandes zur Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_3$ kann umgangen werden (Abb. 7.7). Dafür verschiebt man die Kraft $\vec{F}_3$ (Kräfte sind in der Statik "linienflüchtige" Vektoren) entlang ihrer Wirkungslinie, bis ihr Angriffspunkt im Träger liegt. Die x-Komponente $\vec{F}_{3x}$ besitzt kein Moment bezüglich A. Die y-Komponente $\vec{F}_{3y}$ hat das Moment $-F_3 \cdot \sin 60° \cdot 2l$. Zusammen besitzen die beiden Kraftkomponenten daher das Moment $-F_3 \cdot \sin 60° \cdot 2l$. Die Kraft $\vec{F}_B$ besitzt das Moment $F_{By} \cdot 3l$.

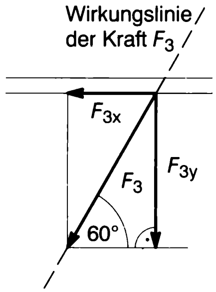


Abb. 7.7

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen für den Träger:

I: $\sum F_{ix} = -F_3 \cdot \cos 60° + F_{Bx} = 0$

II: $\sum F_{iy} = -F_1 + F_A - F_2 - F_3 \cdot \sin 60° + F_{By} = 0$

III: $\sum M_i = F_1 \cdot l - F_2 \cdot l - F_3 \cdot \sin 60° \cdot 2l + F_{By} \cdot 3l = 0$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten F_A, F_{Bx} und F_{By}. Einsetzen der gegebenen Werte ergibt (Kräfte in kN, Längen in m):

I: $-3 \cdot \cos 60° + F_{Bx} = 0$

II: $-2 + F_A - 4 - 3 \cdot \sin 60° + F_{By} = 0$

III: $2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot \sin 60° \cdot 4 + F_{By} \cdot 6 = 0$

I $\Rightarrow$ $F_{Bx} = 1{,}5$ kN; III $\Rightarrow$ $F_{By} = 2{,}399$ kN $\approx 2{,}4$ kN; II $\Rightarrow$ $F_A = 6{,}199$ kN $\approx 6{,}2$ kN.

$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = 2{,}829$ kN $\approx 2{,}8$ kN.

Die Auflagerkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ haben somit die Beträge $F_A = 6{,}2$ kN und $F_B = 2{,}8$ kN.

Beispiel 7.10 : Gleichungssystem mit Bruchtermen

Löse das Gleichungssystem:

I: $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2y+2} = \frac{3}{4}$

II: $\frac{3}{x+1} - \frac{3}{2y+2} = 0$

Lösung

Einschränkung der Grundmenge: $x \neq -1$ und $y \neq -1$.
Beim Lösen von Bruchgleichungen wird mit dem gemeinsamen Nenner multipliziert. Das führt in den meisten Fällen zu x · y-Termen. In einfacher Weise kann man jedoch dieses nichtlineare Gleichungssystem in ein lineares überführen und in der Folge lösen. Wir führen folgende Substitution (Ersetzung) durch:

$u = \frac{1}{x+1}$ und $v = \frac{1}{2y+2}$

Damit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem in den Variablen u und v:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I:} & 2u + v & = & \frac{3}{4} \quad | \cdot 3 \\
\underline{\text{II:}} & \underline{3u - 3v} & \underline{=} & \underline{0} \\
\text{I:} & 6u + 3v & = & \frac{9}{4} \\
\underline{\text{II:}} & \underline{3u - 3v} & \underline{=} & \underline{0} \\
 & 9u & = & \frac{9}{4} \\
 & u & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

Aus der Gleichung II folgt u = v und damit $v = \frac{1}{4}$.

Der nächste Schritt ist die Rücksubstitution:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{x+1} = u & \frac{1}{2y+2} = v \\
\frac{1}{x+1} = \frac{1}{4} & \frac{1}{2y+2} = \frac{1}{4} \\
4 = x + 1 & 4 = 2y + 2 \\
x = 3 & y = 1
\end{array}$$

Probe:

$$\text{I: } T_L\text{: } \frac{2}{3+1} + \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad T_R = \frac{3}{4};$$

$$\text{II: } T_L\text{: } \frac{3}{3+1} - \frac{3}{2 \cdot 1 + 2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0; \quad T_R = 0.$$

$\mathbb{L} = \{(3, 1)\}$

Anmerkung: Die vorgenommene Substitution ist nur dann zielführend, wenn die Nenner dazu geeignet vorliegen.

Um das vierte Lösungsverfahren, die **Cramer'sche Regel**, zu verstehen, brauchen wir zwei neue Begriffe, die wir nun kennen lernen werden. Ähnlich wie bei einem geordnetem Paar, wo es auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt, gibt es in der Mathematik einen Begriff für ein geordnetes Schema von Zahlen, die sogenannte **Matrix** (Mehrzahl: Matrizen). In diesem stets rechteckigen Zahlenschema sind die Zahlen in Zeilen (waagrecht) und Spalten (senkrecht) angeordnet. Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet.

Beispiele von Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die in einer Matrix zusammengefassten Zahlen heißen **Elemente** der Matrix. In der Matrix A befindet sich das Element 3 in der 2. Zeile und 2. Spalte. Man schreibt dafür $a_{22} = 3$; dabei ist der erste Index die Zeilennummer und der zweite die Spaltennummer. In der Matrix B gilt: $b_{31} = 0$. b_{31} ist das Element, das in der 3. Zeile und 1. Spalte steht. Jedes Element in einer Matrix hat einen genau bestimmten Platz, der durch die Angabe der Zeile und Spalte festgelegt wird.

Besitzt eine Matrix gleich viele Zeilen wie Spalten, so bezeichnet man sie als eine **quadratische Matrix**. A und D sind quadratische Matrizen. Die Matrix A ist eine (2,2)-Matrix (gesprochen "2-2-Matrix" oder "2 mal 2 Matrix"); B eine (3,2)-Matrix; C eine (2,3)-Matrix und D eine (3,3)-Matrix.

Allgemein schreibt man beispielsweise für eine (2,3)-Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

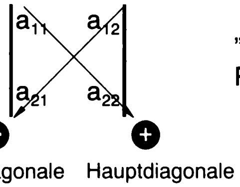
Zu jeder quadratischen Matrix gehört eine bestimmte Zahl, die sogenannte **Determinante** dieser Matrix.

> Als Determinante einer **(2,2)-Matrix**, man schreibt dafür $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ oder kürzer det (A), wird die Zahl $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ bezeichnet.

Beachte den Unterschied zwischen der Schreibweise einer Matrix (runde Klammern) und einer Determinante (senkrechte Striche)!

Merkregel zur Berechnung einer "zweireihigen" Determinante:

det (A) =



"Produkt der Elemente in der Hauptdiagonale minus Produkt der Elemente in der Nebendiagonale."

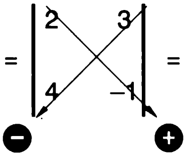
Beispiel 7.11 : Berechnen von Determinanten

Berechne die Determinante von folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zu **a)**

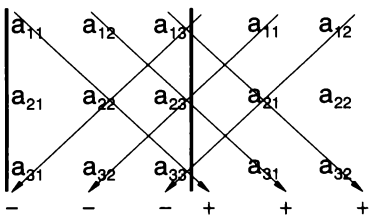
det (A) =



$= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -2 - 12 = -14$

Zu **b)**

Die (hier nicht angegebene) eher umfangreichere Definition einer dreireihigen Determinante kann man sich gut nach der **Regel von Sarrus**[11] (gesprochen: "Sarü") merken:



Man schreibt die ersten beiden Spalten rechts noch einmal an. Dann bildet man die Produkte in Richtung der Hauptdiagonalen und addiert sie. Davon subtrahiert man die Produkte der Elemente in Richtung der Nebendiagonalen.

$$\det(B) = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right. = 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot 0 - [3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1)] = -28$$

---

[11] P. F. SARRUS (1798 - 1861); Französischer Mathematiker

Aufgaben

Berechne die Determinanten folgender Matrizen.

7.1 **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

7.2 **a)** $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

7.3 **a)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -6 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

7.4 **a)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ 6 & 8 & -8 \\ 3 & 5 & -9 \end{bmatrix}$ **c)** $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jedem linearen Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ \text{II:} & a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \\ \hline \end{array}$$

kann man zwei Matrizen zuordnen, die **Koeffizientenmatrix** $A_K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und die **erweiterte Matrix** $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$.

Das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{ll} \text{I:} & a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ \text{II:} & a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \\ \hline \end{array}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von 0 verschieden ist.

Dann gilt die **Cramer'sche Regel**[13]: $x = \frac{D_x}{D}$ bzw. $y = \frac{D_y}{D}$, wobei

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Begründung: Wir lösen das Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens nach x.

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 & \mid \cdot a_{22} \\ \text{II:} & a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 & \mid \cdot (-a_{12}) \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & a_{22} \cdot a_{11} \cdot x + a_{22} \cdot a_{12} \cdot y = a_{22} \cdot b_1 \\ \text{II:} & -a_{12} \cdot a_{21} \cdot x - a_{12} \cdot a_{22} \cdot y = -a_{12} \cdot b_2 \\ \hline \end{array}\right\} +$$

$$x\,(a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}) = a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2$$

$$x = \frac{a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

---

[13] G. CRAMER (1704 – 1752); Schweizer Mathematiker

Der Nenner ist gleich der Determinante D der Koeffizientenmatrix A_K. Ersetzt man in der Koeffizientenmatrix A_K die erste Spalte durch die Konstanten b_1 und b_2, so erhält man eine neue Matrix A_x.

$$A_K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Im Zähler steht die Determinante D_x der Matrix A_x. Damit erhält man $x = \frac{D_x}{D}$; was zu zeigen war. Mit den gleichen Überlegungen kommt man zu $y = \frac{D_y}{D}$.

Aus den Werten der Determinanten D, D_x und D_y kann man nun **Aussagen über die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems** treffen:

Lösbarkeit	D	D_x, D_y
Eindeutige Lösung	ungleich 0	beliebig
Keine Lösung	0	mindestens eine ungleich 0
Unendlich viele Lösungen	0	beide 0

Beispiel 7.12 : Cramer'sche Regel

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad 5x - 3y &= -2 \\ \text{II:} \quad 2x + y &= 8 \end{aligned}$$

Lösung

$$A_K = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \det(A_K) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 11$$

Man erhält 2 neue Matrizen A_x und A_y, wenn die Spalte der Koeffizienten von x bzw. von y durch die Spalte der Konstanten ersetzt wird.

$$D_x = \det(A_x) = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 - (-3) \cdot 8 = 22;$$

$$D_y = \det(A_y) = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - (-2) \cdot 2 = 44;$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{44}{11} = 4; \qquad \mathbb{L} = \{(2, 4)\}.$$

Beispiel 7.13 : Bewegungsaufgabe

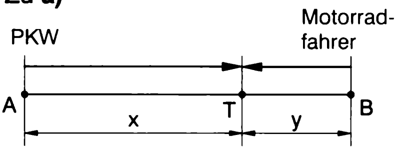
Zwei Ortschaften A und B sind 100 km voneinander entfernt. Um 9 Uhr fährt ein PKW von A in Richtung B mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 kmh^{-1}. Um 9.30 Uhr fährt von B aus ein Motorradfahrer mit einer Geschwindigkeit von 120 kmh^{-1} in Richtung A.

a) In welcher Entfernung von A und wann treffen die beiden einander?

b) Wann haben sie einen Abstand von 20 km?

Lösung

Zu **a)**



T Treffpunkt
x Fahrweg des PKW
y Fahrweg des Motorradfahrers bis zum Treffpunkt, jeweils in km

Aus *Weg = Geschwindigkeit durch Zeit* folgt *Zeit = Weg durch Geschwindigkeit.*

Daher ist $\frac{x}{80}$ die Fahrzeit des PKW und $\frac{y}{120}$ die Fahrzeit des Motorradfahrers bis zum Treffpunkt, jeweils in Stunden. Damit ergibt sich:

I: $x + y = 100$
II: $\frac{x}{80} = \frac{y}{120} + \frac{1}{2}$

Gleichung II besagt, dass die Fahrzeit des PKW um eine halbe Stunde länger ist als jene des Motorradfahrers.

Wir lösen mit dem Einsetzungsverfahren: Aus folgt $y = 100 - x$; in eingesetzt:

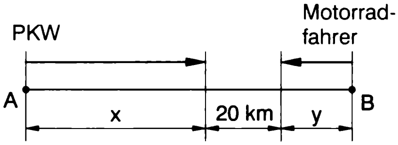
$\frac{x}{80} = \frac{100 - x}{120} + \frac{1}{2}$. Draus: $x = 64$ km. $\frac{x}{80} = \frac{64}{80} = 0{,}8$ h = 48 min.

PKW und Motorradfahrer treffen einander um 9.48 Uhr in einer Entfernung von 64 km von A.

Anmerkung: Man hätte mit x und y auch die Fahrzeiten des PKW und des Motorradfahrers, jeweils in Stunden, bezeichnen können. Man erhält dann:

I: $80 \cdot x + 120 \cdot y = 100$ und II: $x = y + \frac{1}{2}$. Daraus: $x = 0{,}8$ h usw.

Zu **b)** *1. Möglichkeit*: Entfernung von 20 km *vor* ihrer Begegnung.



x, y Fahrwege bis zur erstmaligen gegenseitigen Entfernung von 20 km

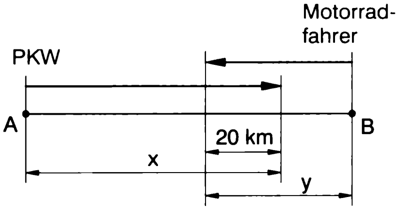
I: $x + y + 20 = 100$
II: $\frac{x}{80} = \frac{y}{120} + \frac{1}{2}$

Gleichung II wie in a).

Daraus: $x = 56$ km. $\frac{x}{80} = \frac{56}{80} = 0{,}7$ h = 42 min.

Um 9.42 Uhr sind PKW und Motorradfahrer noch 20 km voneinander entfernt.

2. Möglichkeit: Entfernung von 20 km *nach* ihrer Begegnung.



x, y Fahrwege bis zur erstmaligen gegenseitigen Entfernung von 20 km

I: $x - 20 + y = 100$
II: $\frac{x}{80} = \frac{y}{120} + \frac{1}{2}$

Daraus: $x = 72$ km. $\frac{x}{80} = \frac{72}{80} = 0{,}9$ h = 54 min.

Um 9.54 Uhr sind PKW und Motorradfahrer wieder 20 km voneinander entfernt.

Eine **Matrix** ist ein geordnetes Schema von Zahlen. In diesem stets rechteckigen Zahlenschema sind die Zahlen in Zeilen (waagrecht) und Spalten (senkrecht) angeordnet.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Als **Determinante der (2,2)-Matrix A**, man schreibt dafür $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ oder kürzer det (A), wird die Zahl $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ bezeichnet.

Ein System von Gleichungen der Form

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$

II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

bezeichnet man als ein **lineares Gleichungssystem** von 2 Gleichungen in 2 Variablen (Unbekannten) x und y, wobei die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} und die Konstanten b_1 und b_2 reelle Zahlen sind. Wenn nicht anders vereinbart, ist die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Lösungsverfahren: Graphische Lösung, Gleichsetzungs-, Einsetzungs-, Additionsverfahren und Cramer'sche Regel.

Lösbarkeit: Ist $D = \det(A) \neq 0$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Ist $D = 0$, so gibt es entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Aufgaben

Löse folgende linearen Gleichungssysteme graphisch.

7.5

a) I: $2x - y = 0$
II: $\frac{1}{2}x + y = \frac{5}{2}$

b) I: $3x - 2y = 2$
II: $-\frac{3}{2}x + y = 3$

c) I: $\frac{1}{2}x + y = -2$
II: $x - y = -1$

d) I: $2x + y = -1$
II: $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}$

e) I: $3x + y = 5$
II: $-x + 3y = -5$

f) I: $\frac{1}{2}x - y = 2$
II: $-\frac{3}{2}x + 3y = 4$

Löse folgende lineare Gleichungssysteme:

7.6

a) I: $x - y = 4$
II: $x + y = 2$

b) I: $2x - y = 2$
II: $3x + 4y = 14$

c) I: $-x + 3y = -2$
II: $2x - 2y = 0$

7.7

a) I: $2x + 3y = \frac{11}{4}$
II: $\frac{1}{2}x + 5y = \frac{7}{4}$

b) I: $3r - 5s = -\frac{11}{2}$
II: $2r + 3s = -\frac{1}{2}$

c) I: $3a + 4b = -\frac{11}{6}$
II: $2a = -1$

7.8

a) I: $5x + 2y = 16$
II: $3x - 5y = 22$

b) I: $\frac{2}{3}u - \frac{4}{5}v = -\frac{2}{5}$
II: $\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}v = -\frac{13}{6}$

c) I: $4x - 3y = \frac{7}{2}$
II: $3x + 4y = -\frac{1}{2}$

7.9 **a)** I: $a : b = 4 : 1$

II: $\frac{2a+3}{4b-1} = 7$

b) I: $\frac{4x+3}{6} + \frac{8y-2}{7} = \frac{5}{2}$

II: $\frac{2x+1}{3} - \frac{4y+1}{9} = -\frac{2}{3}$

c) I: $\frac{2v}{3} + \frac{5w}{6} = \frac{11}{18}$

II: $\frac{2v-w}{3} + \frac{3w-v}{2} = \frac{53}{36}$

7.10 **a)** I: $\frac{2x-5}{3y-12} = \frac{1}{3}$

II: $(x+y) : (2x-y) = 14 : 12$

b) I: $\frac{3a+b}{3} - \frac{4a-b}{2} = \frac{a+8}{6}$

II: $-\frac{2a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{a-3b}{2}$

7.11 **a)** I: $\frac{2x-2}{3} + \frac{2y+2}{4} = 0$

II: $\frac{4x+3y}{8} + 2x - y = \frac{1}{2}(4x-2y) + \frac{1}{8}$

b) I: $\frac{4y-2x}{10} = \frac{y+2}{2} - \frac{x-2}{3}$

II: $\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} = \frac{4+2x-4y}{6}$

7.12 **a)** I: $\frac{x+1}{2} - \frac{y+2}{3} = 0$

II: $\frac{2(x-1)}{3} + \frac{y-2}{4} = \frac{11}{6}$

b) I: $\frac{2a+3}{5} - \frac{b-6}{3} = \frac{12}{5}$

II: $\frac{3b+1}{4} - \frac{a-6}{3} = \frac{23}{6}$

c) I: $\frac{2a+3}{4} - \frac{b+6}{3} = -\frac{9}{4}$

II: $-\frac{(a+1)^2}{2} + \frac{3b-2}{3} = -\frac{a^2}{2} + \frac{11}{6}$

7.13 **a)** I: $\frac{u+v}{3} - \frac{2u+3v}{6} = \frac{3u-v}{6} - \frac{5v-1}{3}$

II: $\frac{v+u}{2} + 3\frac{v-u}{4} = -\frac{3u+1}{4}$

b) I: $\frac{5x+3y+2}{3} - \frac{5y-3x+1}{2} = \frac{2x-4y}{3}$

II: $\frac{3y+8x-7}{5} + \frac{8x-2y+1}{3} = \frac{3x-2y-4}{5} + \frac{1}{15}$

7.14 **a)** I: $(x-1)^2 + y = (x+1)^2 - 10$

II: $x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$

b) I: $(2x+1)^2 + (y-3)^2 = (2-y)^2 + 4x^2 + 18$

II: $(3x-4)(3x+5) + 3y = 9x^2 - 2$

7.15 **a)** I: $(3x-1)^2 - (3x+1)^2 - 4y + 24 = 8(x+3)$

II: $(x-1)(x+1) + (2y-2)^2 = 4y^2 + x^2 + 3$

b) I: $(2u+1)^2 - (2u+v)^2 = -[v(v+4u) + 4v - 1]$

II: $(u+v)(u-v) - (u+2)^2 = 3v - (v+2)^2 - 1$

7.16 **a)** I: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$

II: $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$

b) I: $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 4$

II: $\frac{5}{x} - \frac{8}{y} = 3$

c) I: $\frac{1}{y} + \frac{3}{x} = -\frac{5}{2}$

II: $\frac{4}{x} - \frac{2}{y} = 0$

7.17 **a)** I: $x + \frac{1}{y} = 1$

II: $2x - \frac{3}{y} = 7$

b) I: $\frac{5}{x} + 3y = -11$

II: $\frac{3}{x} - 4y = 5$

c) I: $5a - \frac{4}{b} = 8$

II: $3a + \frac{3}{b} = \frac{15}{2}$

7.18 **a)** I: $\frac{1}{a+3} - \frac{2}{b-3} = \frac{11}{6}$

II: $\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b-3} = -\frac{5}{2}$

b) I: $\frac{5}{x-2} + \frac{4}{4-y} = \frac{7}{3}$

II: $-\frac{2}{x-2} - \frac{3}{4-y} = -\frac{7}{3}$

c) I: $\frac{3}{6-a} + \frac{2}{5-b} = 4$

II: $\frac{6}{6-a} + \frac{4}{5-b} = 8$

Löse folgende Gleichungssysteme nach x und y (ohne Fallunterscheidungen) auf.

7.19 **a)** I: $ax - by = a^2 + b^2$

II: $bx + ay = a^2 + b^2$

b) I: $ax - by + 2ab = 0$

II: $ax + by = 0$

c) I: $ax + 2by = -ab$

II: $2ax - by = 3ab$

7.20 **a)** I: $x - ay - 1 = 0$
II: $bx + y = -1$

b) I: $3x + 5y = 36b - 7a$
II: $3y - 2x = 11a - 5b$

c) I: $bx + ay = 2b$
II: $b^2x - a^2y = a^2 + b^2$

7.21 **a)** I: $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a} = 2b - a$
II: $\frac{x}{b} + \frac{y}{a-b} = b$

b) I: $b(x + y) = 2ax - 2ay$
II: $2a - 5b = 3y - 2x$

c) I: $\frac{y}{a+b} = 1 - \frac{x}{b-a}$
II: $\frac{x}{a+b} = 1 - \frac{y}{b-a}$

7.22 **a)** I: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b}$
II: $1 - \frac{y}{a+b} = \frac{x}{a+b}$

b) I: $bx - ay = a^2 + b^2$
II: $\frac{bx + ay}{ax - by} = \frac{(b-a)(a+b)}{2ab}$

7.23 Von einem linearen Gleichungssystem ist die erweiterte Matrix gegeben.

a) Gib die Art der Lösung an (Erklärung!), ohne dass das Gleichungssystem gelöst wird.

b) Löse das lineare Gleichungssystem.

(1) $A_{erw} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -\frac{9}{2} & -6 & -7 \end{pmatrix}$ (3) $A_{erw} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -3 & 6 & 7{,}5 \end{pmatrix}$

(4) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -2{,}5 & 3 \\ 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ (5) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2{,}5 & -3 & -3{,}5 \end{pmatrix}$ (6) $A_{erw} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7.24 Setze für r und s solche Zahlenwerte ein, dass das lineare Gleichungssystem
a) keine, **b)** eine eindeutige, **c)** unendlich viele Lösungen besitzt.

(1) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & r \\ 3 & s & 2 \end{pmatrix}$ (2) $A_{erw} = \begin{pmatrix} r & -2 & 3 \\ 4 & 4 & s \end{pmatrix}$ (3) $A_{erw} = \begin{pmatrix} r & s & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

7.25 Es sind die Determinaten D, D_x und D_y eines linearen Gleichungssystems in 2 Variablen gegeben.

a) Welchen Wert muss a annehmen, damit das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung hat?

b) Welchen Wert muss b haben, damit die Lösungsmenge leer bzw. unendlich ist?

(1) $D = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 5 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & b \end{vmatrix}$ (2) $D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ a & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} b & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & b \\ a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

(3) $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & a \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & a \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & b \end{vmatrix}$ (4) $D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ a & 5 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} b & -2 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} 4 & b \\ a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

Geometrische Aufgaben

7.26 Der Umfang eines Rechteckes beträgt 32 cm. Die Seiten stehen im Verhältnis 3 : 1. Wie lang sind die Seiten des Rechteckes?

7.27 Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis um 4 cm länger als ein Schenkel; der Umfang beträgt 28 cm. Wie groß sind die Seiten?

7.28 Die Punkte P(3/10) und Q(–9/–2) liegen auf einer Geraden.

a) Wie lautet die Gleichung der Geraden in Normalform und allgemeiner Form?

b) Wie groß ist der Neigungswinkel?

7.29 Verkürzt man die Länge eines Rechteckes um 3 cm und verlängert man dessen Breite um 1 cm, so erhält man ein Quadrat. Der Umfang des Quadrates beträgt 20 cm. Wie lang sind die Rechteckseiten?

7.30 Von einem Dreieck ABC [A (−6/1); B (6/−3); C (9/6)] kennt man die Gleichungen der Winkelsymmetralen w_β: $2x + y = 9$ und w_γ: $x - y = 3$.

a) Bestimme die Koordinaten des Inkreismittelpunktes!

b) Wie groß ist der Inkreisradius?

7.31 Die Punkte A (−3/−1) und B (5/−1) sind Eckpunkte eines Dreiecks. Der dritte Punkt ist der Schnittpunkt der Geraden g_1: $4y - 3x = 5$ und der Geraden g_2: $x = 5$.

a) Um welches Dreieck handelt es sich? (Erklärung!)

b) Welche Koordinaten besitzt der Eckpunkt C?

c) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt!

7.32 Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 bilden ein Dreieck: g_1: $2y + x = -4$; g_2: $3y + x = 24$; g_3: $y = 2x + 3$.

a) Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte!

b) Ermittle den Umfang und den Flächeninhalt!

7.33 Gegeben ist das Dreieck ABC [A (−7/1); B (8/4); C (5/7)].

a) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, auf denen die Seiten des Dreiecks liegen.

b) Bestimme die Koordinaten des Umkreismittelpunktes!

7.34 Von einem Dreieck ABC kennt man zwei Eckpunkte A (−4/−2) und C (2/4). Der Eckpunkt B liegt im Schnittpunkt der zwei Geraden $y = -2x + 8$ und $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

a) Bestimme die Koordinaten von B!

b) Ermittle die Koordinaten des Höhenschnittpunktes!

7.35 Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 bilden ein Dreieck: g_1: $x + 8y = 12$; g_2: $y = -2x + 9$; g_3: $7y - x = 18$.

a) Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte!

b) Stelle die Gleichungen der drei Schwerlinien auf!

c) Welche Koordinaten besitzt der Schwerpunkt?

Allgemeine Aufgaben

7.36 Wirken zwei Kräfte in gleicher Richtung, so ist die Resultierende 1800 N; wirken sie in entgegengesetzter Richtung, so ist sie 200 N. Wie groß sind die beiden Kräfte?

7.37 Zwei Massen unterscheiden sich um 30 kg. Beide erfahren die gleiche Beschleunigung, wenn auf die kleinere eine Kraft von 120 N und auf die größere eine Kraft von 300 N ausgeübt wird. Wie groß sind die beiden Massen und welchen Wert hat die Beschleunigung? (Hinweis: $F = m \cdot a$)

7.38 Erhöht man die Spannung um 10 Volt und verringert den Widerstand um 5 Ω, so fließt ein Strom von 6 A. Verringert man die Spannung um 20 V und erhöht den Widerstand um 10 Ω, so fließen 2 A durch den Widerstand. Wie hoch war die Ausgangsspannung, wie groß der ursprüngliche Widerstand? (Hinweis: $U = R \cdot I$)

7.39 In einer Werkstätte werden zwei unterschiedliche Arten von Spezialzangen produziert. Im Warenlager sind insgesamt 1000 Zangen vorhanden. Die Zange höherer Qualität kostet € 150,–; die andere € 100,–. Wie viele Zangen sind von jeder Sorte vorhanden, wenn der Gesamtpreis € 120000,– beträgt?

7.40 Ein Betrag von € 5000,– wird mit 100-Euro- und 50-Euro-Banknoten bezahlt, insgesamt mit 70 Banknoten. Wie viele sind es von jeder Sorte?

7.41 Die Gesamtkosten K eines Betriebes lassen sich annähernd durch eine lineare Kostenfunktion beschreiben. Bei einer Produktionsmenge von 20 Stück betragen die Gesamtkosten € 70000,–; bei einer Stückzahl von 80 betragen sie € 130000,–. Wie groß sind die Fixkosten und die (variablen) Kosten pro Stück?

7.42 2 Abteilungen einer Firma produzieren am Tag insgesamt 150 Motorersatzteile. Um 1200 Ersatzteile herzustellen, wurde in der 1. Abteilung 5 und in der 2. Abteilung 10 Tage gearbeitet. Wie viel produziert davon jede Abteilung?

7.43 $\frac{3}{5}$ der Masse des Körpers A ist um 334 kg geringer als $\frac{5}{8}$ der Masse des Körpers B. $\frac{5}{8}$ der Masse des Körpers A ist um 49 kg größer als $\frac{1}{5}$ der Masse des Körpers B. Wie groß sind die beiden Massen?

7.44 Eine Firma setzt die erzeugten Produkte P_1 und P_2 mit einem Aufschlag von 20% bzw. 30% ab. Ein Käufer nimmt beide Produkte zu einem Gesamtpreis von € 3700,–. Nach einer neuen Kalkulation müssen auf beide Verkaufspreise nochmals 20% bzw. 30% aufgeschlagen werden. Dadurch ergibt sich ein neuer Verkaufspreis von € 4570,–. Wie groß sind die Erzeugungskosten beider Produkte?

7.45 Die Telefongebühr setzt sich aus einer Grundgebühr und einer Gesprächsgebühr zusammen. Telefoniert man 500 Minuten, so ergeben sich Kosten von € 235,24; für 800 Minuten betragen die Kosten € 347,44. Wie groß ist die Grundgebühr bzw. das Verbindungsentgelt je Minute, wenn stets zum selben Tarif telefoniert wird?

7.46 Bei einer linearen Abschreibung ist nach 2 Jahren der Buchwert € 60000,– und nach 4 Jahren € 20000,–.

a) Wie groß ist der Anschaffungswert?

b) Wie lange ist die Nutzungsdauer?

Mischungsaufgaben

7.47 Durch Mischen von 12 Liter einer Spiritussorte mit 8 Liter einer anderen Spiritussorte erhält man 48%igen Spiritus. Gibt man jedoch zur ersten Spiritussorte 8 Liter Wasser hinzu, so erhält man 36%igen Spiritus. Wie viel prozentig sind beide Spiritussorten?

7.48 Es soll eine Legierung aus zwei Metallen mit einer Masse von 1210 kg hergestellt werden. Die Massen der beiden Metalle verhalten sich wie 9 : 2. Wie groß sind die Massen beider Metalle?

7.49 Wie viel ml 20%igen und 45%igen Alkohol muss man mischen, um 500 ml 35%igen Alkohol herzustellen?

7.50 Durch Mischen von 6 kg einer Salzlösung mit 4 kg einer anderen Salzlösung erhält man eine 52%ige Lösung. Mischt man hingegen 4 kg der ersten Salzlösung mit 5 kg der anderen Salzlösung, so ist die Mischung 45%ig. Wie viel prozentig sind die beiden Salzlösungen?

7.51 Wie viel 20%ige und 45%ige Salzlösungen muss man mischen, um 25 kg 35%ige Salzlösung zu erhalten?

7.52 Ein Messingwürfel (ϱ_{Cu} = 8,93 kgdm^{-3}, ϱ_{Zn} = 7,14 kgdm^{-3}) mit der Seitenkante a = 15 cm hat eine Masse von 28,86 kg. Wie viel kg Kupfer und Zink enthält der Messingwürfel?

7.53 Eine Platte aus Zinnbronze (Legierung aus Kupfer und Zinn; ϱ_{Cu} = 8,93 kgdm^{-3}, ϱ_{Sn} = 7,2 kgdm^{-3}) mit den Abmessungen (l = 3 m, b = 2 m und h = 5 cm) hat eine Masse von 2649 kg.

a) Wie viel kg Kupfer und Zinn sind in der Legierung?

b) Wie viel % Kupfer sind in der Legierung?

7.54 Ein 3,92 m^2 großes Messingblech mit einer Stärke von 1 mm hat eine Masse von 33,5 kg (ϱ_{Cu} = 8,93 kgdm^{-3}, ϱ_{Zn} = 7,14 kgdm^{-3}). Wie viel kg Kupfer und Zink sind in diesem Blech enthalten?

Bewegungsaufgaben

7.55 Zwei Ortschaften A und B liegen 60 km voneinander entfernt. Fährt PKW 1 von A nach B und gleichzeitig PKW 2 von B nach A, so treffen sie sich nach einer Fahrzeit von $t = \frac{3}{7}$ h. Die Ortschaft C liegt über B hinaus auf der Geraden AB. Fährt nun PKW 2 von B in Richtung C und gleichzeitig PKW 1 von A in Richtung C, so wird PKW 2 von PKW 1 nach 3 Stunden überholt.

a) Wie groß sind die mittleren Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge?

b) In welcher Entfernung von B findet die Begegnung bzw. der Überholvorgang statt?

7.56 Drei Ortschaften A, B und C liegen auf einer Geraden. Die Entfernung zwischen A und B beträgt 80 km. Von den Ortschaften A und B fahren zwei Fahrzeuge in Richtung C (C liegt über B hinaus). Das Fahrzeug von B fährt 6 Minuten nach dem Fahrzeug von A ab. Nach 1,5 Stunden Fahrzeit ist das Fahrzeug aus A genau 60 km hinter jenem aus B. Nach 7,5 Stunden Fahrzeit überholt das Fahrzeug aus A jenes aus B.

a) Wie groß sind die mittleren Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge?

b) In welcher Entfernung von B findet der Überholvorgang statt?

7.57 Zwei PKW starten aus zwei 150 km entfernten Städten und fahren einander entgegen. Fahren beide gleichzeitig weg, so sind sie nach einer Fahrzeit von 45 Minuten noch 15 km voneinander entfernt. Erhöht jedoch der erste PKW die Geschwindigkeit um 25% und fährt der zweite PKW, bei gleichbleibender Geschwindigkeit, um 15 Minuten später ab, so sind sie nach einer Fahrzeit von 30 Minuten des zweiten PKW noch 25 km voneinander entfernt.

a) Wie groß sind die ursprünglichen mittleren Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge?

b) In welcher Entfernung von A würden sie einander bei gleicher Abfahrtszeit begegnen?

7.58 Zwei Ortschaften A und B sind 180 km voneinander entfernt. Gleichzeitig starten ein Kleinmotorrad von A nach B und ein Motorrad von B nach A. Sie treffen einander nach 1 Stunde und 12 Minuten. Erhöht das Kleinmotorrad seine Geschwindigkeit um 25% und startet es außerdem um 12 Minuten früher als das Motorrad, so treffen sie einander eine Stunde nach Abfahrt des Motorrades. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Motorrades sowie die ursprüngliche Geschwindigkeit des Kleinmotorrades?

Leistungsaufgaben

7.59 Zur Produktion von 600 m^3 eines Gemisches werden zwei Mischer eingesetzt. Ist der erste Mischer 30 Minuten und der zweite Mischer 40 Minuten in Betrieb, so erzeugen sie zusammen 36 m^3. Ist hingegen der erste Mischer 40 Minuten und der zweite Mischer 30 Minuten in Betrieb, so werden insgesamt 34 m^3 hergestellt.

a) Wie viel m^3 pro Minute erzeugen die einzelnen Mischer?

b) Wie lange brauchen beide Mischer zusammen, um die geforderte Menge zu erzeugen?

7.60 Ein Wasserbehälter mit 700 Liter Inhalt kann durch zwei Abflüsse entleert werden. Ist das erste Abflussrohr 3 Minuten und das zweite 10 Minuten geöffnet, so fließen 350 Liter aus. Dies trifft auch zu, wenn beide 5 Minuten geöffnet sind.

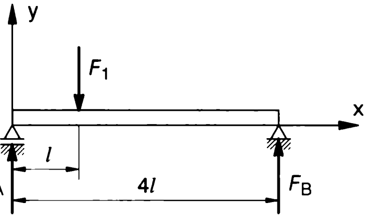
a) Wie viel Liter pro Minute fließen durch das erste Abflussrohr, wie viel durch das zweite?

b) Nach welcher Zeit ist der Wasserbehälter leer, wenn beide Abflüsse gleichzeitig geöffnet sind?

7.61 Ein Hochbehälter wird durch zwei Rohre gespeist. Sind beide Zuflüsse 6 Minuten in Betrieb, so wird der Behälter halb gefüllt. Ist der erste Zufluss 3 Minuten und der zweite 2 Minuten geöffnet, so wird der Behälter nur zu 20% gefüllt. Wie verhalten sich die Volumenströme (l/min) in den beiden Rohren zueinander?

7.62 Ein Träger ist zweifach gelagert. Berechne die Auflagerkräfte F_A und F_B.

a)

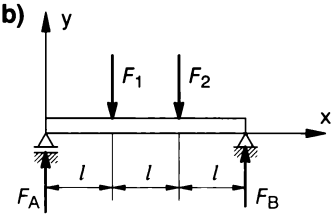


$F_1 = 50$ kN; $l = 2$ m.

I: $F_A - F_1 + F_B = 0$

II: $--F_1 \cdot l + F_B \cdot 4l = 0$

b)

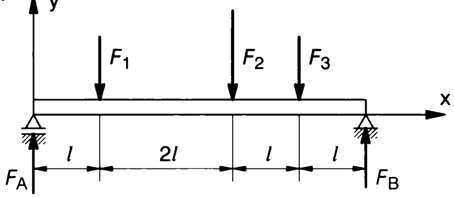


$F_1 = 20$ kN; $F_2 = 20000$ N; $l = 1$ m.

I: $F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$

II: $-F_1 \cdot l - F_2 \cdot 2l + F_B \cdot 3l = 0$

c)

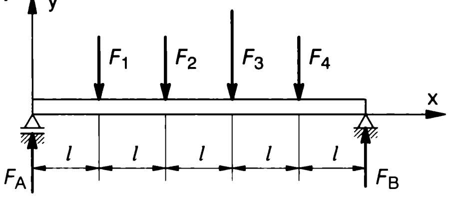


$F_1 = 10$ kN; $F_2 = 20000$ N; $F_3 = 10000$ N; $l = 2$ m.

I: $F_A - F_1 - F_2 - F_3 + F_B = 0$

II: $-F_1 \cdot l - F_2 \cdot 3l - F_3 \cdot 4l + F_B \cdot 5l = 0$

d)



$F_1 = 10$ kN; $F_2 = 10000$ N; $F_3 = 20$ kN; $F_4 = 10000$ N; $l = 1$ m.

I: $F_A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + F_B = 0$

II: $-F_1 \cdot l - F_2 \cdot 2l - F_3 \cdot 3l - F_4 \cdot 4l + F_B \cdot 5l = 0$

7.3 Lineare Gleichungssysteme in drei oder mehr Variablen

Die Vorgangsweise ist grundsätzlich gleich wie bei Gleichungssystemen mit zwei Variablen. Liegt beispielsweise ein Gleichungssystem in 3 Variablen vor, so eliminiert (beseitigt) man zunächst eine Variable und erhält danach ein Gleichungssystem in 2 Variablen. Daraus eliminiert man wieder eine Variable und erhält schließlich eine Gleichung mit nur noch einer Variablen. Diese Gleichung löst man; schrittweise werden dann die früher eliminierten Variablen bestimmt. Entsprechend geht man bei mehr als drei Variablen vor.

Beispiel 7.14 : Lösung eines linearen Gleichungssystems in drei Variablen

a) Berechne die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Löse folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x + 5y - z = 11 \\ \text{II:} & 2x + 3y + 2z = 14 \\ \underline{\text{III:}} & \underline{x - y + 3z = 8} \end{array}$$

Lösung

Zu **a)**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 5 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right. = 4\cdot3\cdot3 + 5\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot2\cdot(-1) - [(-1)\cdot3\cdot1 + 4\cdot2\cdot(-1) + 5\cdot2\cdot3] = 29$$

Zu **b)**

Da die Matrix A in a) die Koeffizientenmatrix unseres Gleichungssystems ist, können wir wegen $\det(A) \neq 0$ sicher sein, dass eine eindeutige Lösung vorliegt.

In der Regel unterbleibt ein Nachweis der Lösbarkeit; denn man erkennt auch im Verlauf des Lösungsverfahrens, ob dies der Fall ist. Bei anwendungsorientierten Aufgaben kann man auch aus "technischen" Gründen in der Regel eine eindeutige Lösung erwarten.

Wir reduzieren beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren auf ein Gleichungssystem in 2 Variablen. Aus Gleichung III: $x = 8 + y - 3z$. Einsetzen in I und II ergibt:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4(8 + y - 3z) + 5y - z = 11 \\ \underline{\text{II:}} & \underline{2(8 + y - 3z) + 3y + 2z = 14} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I*:} & 32 + 4y - 12z + 5y - z = 11 \\ \underline{\text{II*:}} & \underline{16 + 2y - 6z + 3y + 2z = 14} \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} \text{I*:} & 9y - 13z = -21 & |\cdot(-5) \\ \underline{\text{II*:}} & \underline{5y - 4z = -2} & |\cdot 9 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I**:} & -45y + 65z = 105 \\ \underline{\text{II**:}} & \underline{45y - 36z = -18} \end{array}\right\}+$$

Zur Auflösung des Gleichungssystems wählen wir das Additionsverfahren.

$$\begin{aligned} 29z &= 87 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Einsetzen in I*: $9y - 13 \cdot 3 = -21 \Rightarrow y = 2$
Einsetzen in III: $x = 8 + 2 - 3 \cdot 3 \Rightarrow x = 1$

Probe: I: T_L: $4 + 10 - 3 = 11$ $T_R = 11$
II: T_L: $2 + 6 + 6 = 14$ $T_R = 14$
III: T_L: $1 - 2 + 9 = 8$ $T_R = 8$

Besonders zur Lösung größerer Systeme dient der sogenannte **Gauß'sche Algorithmus**. Damit wird bei der Durchführung des Additionsverfahrens eine übersichtliche Vorgangsweise erreicht.

Beispiel 7.15 : Gauß'sches Eliminationsverfahren

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x + 5y - z = 11 \\ \text{II:} & 2x + 3y + 2z = 14 \\ \text{III:} & x - y + 3z = 8 \\ \hline \end{array}$$

Lösung

Der Algorithmus besteht aus zwei Teilen: Zuerst wird das lineare Gleichungssystem in eine "Dreiecksform" gebracht. Dies ist der Ausgangspunkt für eine leichte Berechnung der Variablen durch "Rückwärtseinsetzen" im zweiten Teil des Algorithmus.

1.Teil: Umformen des Systems auf Dreiecksform:

$$\begin{array}{llr} \text{I:} & 4x + 5y - z = 11 & \\ \text{II:} & 2x + 3y + 2z = 14 & | \cdot (-2) \\ \text{III:} & x - y + 3z = 8 & | \cdot (-4) \\ \hline \end{array}$$

Gleichung I wird im 1. Teil stets unverändert weiter angeschrieben. Danach werden die Gleichungen so multipliziert, dass nach Addition der ersten zur zweiten und dritten Gleichung die Koeffizienten von x gleich 0 sind.

$$\begin{array}{llr} \text{I:} & 4x + 5y - z = 11 & \\ \text{II*:} & -y - 5z = -17 & | \cdot 9 \\ \text{III*:} & 9y - 13z = -21 & \\ \hline \end{array}$$

Ab nun wird auch II* unverändert weiter angeschrieben. Danach werden Gleichung II* und III* so multipliziert (im Beispiel nur für II* nötig), dass nach Addition dieser beiden Gleichungen der Koeffizient von y gleich 0 ist.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x + 5y - z = 11 \\ \text{II*:} & -y - 5z = -17 \\ \text{III**:} & -58z = -174 \\ \hline \end{array}$$

Damit ist die Dreiecksform des Gleichungssystems erreicht; Teil 1 des Algorithmus ist abgeschlossen.

2.Teil: Rückwärtseinsetzen (Rückrechnung von unten nach oben):

III**: $-58z = -174 \Rightarrow z = 3$

Einsetzen für z in II*: $-y - 5 \cdot 3 = -17 \Rightarrow y = 2$

Einsetzen für y und z in I: $4x + 5 \cdot 2 - 3 = 11 \Rightarrow x = 1$

Bemerkungen:

(1) Bei eindeutiger Lösung garantiert der Gauß-Algorithmus grundsätzlich ein sicheres Erreichen der Lösung.

(2) Hätte die Gleichung I im Beispiel 7.15 gelautet: $5y - z = 11$, fehlte also der x-Term, so müsste man etwa die Gleichung II zur Gleichung I machen. Eine solche Zeilenvertauschung kann auch in einem späteren Stadium des Algorithmus notwendig sein.

(3) Sind die Koeffizienten Näherungswerte (Messwerte, Rechnen mit gerundeten Zahlen statt mit Bruchzahlen), so kann es zu erheblichen Genauigkeitsproblemen kommen. Aus diesem Grund wurden Versionen des Gauß-Algorithmus entwickelt, die numerisch bessere Ergebnisse bringen. Praktische Aufgabenstellungen führen oft zu Gleichungssystemen mit Eigenschaften, die Vereinfachungen des Rechenverfahrens erlauben.

Beispiel 7.16 : Gleichungssystem in fünf Variablen

Löse das Gleichungssystem:

I: $3u + v = -1$
II: $4u + 3w - x = 7$
III: $3v + y = 9$
IV: $v - 2w - y = -7$
V: $w + x - y = -2$

Lösung

Bei Gleichungssystemen, in denen nicht in jeder Gleichung alle Variablen vorkommen, ist meistens die Anwendung des Einsetzungs- und Additionsverfahrens von Vorteil. Dabei kann man wie folgt vorgehen:

Aus Gleichung I: $v = -1 - 3u$ (*)
Aus Gleichung III: $y = 9 - 3v = 12 + 9u$ (**)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II:} & 4u + 3w - x \qquad = 7 \\ \text{V:} & \qquad\quad w + x - y = -2 \end{array}\right\} +$$

I*: $4u + 4w \quad - y = 5$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III:} & 3v \qquad + y = 9 \\ \text{IV:} & v - 2w - y = -7 \end{array}\right\} +$$

II*: $4v - 2w \quad = 2$

Für v und y werden die vorher ermittelten Werte in die Gleichungen I* und II* eingesetzt; so erhält man ein Gleichungssystem nur noch in den Variablen u und w.

I*: $4u + 4w - (12 + 9u) = 5$
II*: $4(-1 - 3u) - 2w \quad = 2$

Daraus ergibt sich $u = -1$ und $w = 3$. Durch Einsetzen von u in die Beziehungen (*) und (**) erhält man für $v = 2$ und für $y = 3$. Aus der Gleichung V ergibt sich für $x = -2$.
Zusammengefasst gilt für die Lösung: $u = -1$; $v = 2$; $w = 3$; $x = -2$; $y = 3$.

Analog zu den linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen gilt auch bei linearen Gleichungssystemen mit drei oder mehr Variablen die Cramer'sche Regel. Aus den Werten der Determinanten kann man Aussagen über die Lösbarkeit treffen.

Lösbarkeit	D	D_x, D_y, D_z, …
Eindeutige Lösung	ungleich 0	beliebig
Keine Lösung	0	mindestens eine ungleich 0
Unendlich viele Lösungen	0	alle sind 0

Aufgaben

Löse folgende lineare Gleichungssysteme in der größtmöglichen Definitionsmenge:

7.63 a) I: $3x - 7y + 8z = 4$
II: $x + y - 3z = -1$
III: $2x + 3y - 9z = -4$

b) I: $2a + b + c = 7$
II: $4a - 3b - 2c = 2$
III: $3a - 3b + 5c = 21$

7.64 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 5x - y + z = 22 \\ \text{II:} & 3x + 2z = 14 \\ \text{III:} & 2y - 3z = -5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3k + 4l + 5m = -3 \\ \text{II:} & 2k - 3l - 2m = -2 \\ \text{III:} & -8k + 7l - m = 8 \end{array}$$

7.65 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3a - 2b + c = 2 \\ \text{II:} & 4a + 2b - 3c = -11 \\ \text{III:} & 6a - 2b + 2c = 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 4u - v - w = 11 \\ \text{II:} & u + 2v - 3w = -9 \\ \text{III:} & 2u + 3v - w = -2 \end{array}$$

7.66 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & -3x + 2y - z = 2 \\ \text{II:} & 4x - 3y + 2z = -3 \\ \text{III:} & 2x + y + 3z = -6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 7u + 3v - 3w = -18 \\ \text{II:} & 2v + 4w = 6 \\ \text{III:} & u + v + w = 0 \end{array}$$

7.67 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 1 \\ \text{II:} & \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = \frac{15}{2} \\ \text{III:} & \frac{2}{x} - \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = -3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b-2} - \frac{1}{c+4} = 1 \\ \text{II:} & \frac{2}{a+1} - \frac{3}{b-2} + \frac{2}{c+4} = -3 \\ \text{III:} & \frac{3}{a+1} - \frac{2}{b-2} + \frac{1}{c+4} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

7.68 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = 6 \\ \text{II:} & \frac{1}{v} - \frac{3}{w} = -9 \\ \text{III:} & \frac{2}{u} + \frac{1}{v} = 7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{2}{x+1} - \frac{1}{z+2} = \frac{3}{4} \\ \text{II:} & \frac{1}{y+1} - \frac{2}{z+2} = \frac{1}{2} \\ \text{III:} & \frac{3}{x+1} + \frac{3}{y+1} = \frac{9}{2} \end{array}$$

7.69 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x - \frac{3}{y+1} + \frac{1}{z} = -\frac{5}{3} \\ \text{II:} & 4x + \frac{2}{y+1} - \frac{3}{z} = -\frac{13}{3} \\ \text{III:} & -2x + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z} = 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{x+1} + 3y - \frac{1}{z-1} = 7 \\ \text{II:} & \frac{3}{x+1} - 4y + \frac{3}{z-1} = -8 \\ \text{III:} & -\frac{1}{x+1} + y - \frac{2}{z-1} = \frac{5}{2} \end{array}$$

7.70 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & (a+2) : (b+3) : (c+5) = 1 : 1 : 2 \\ \text{II:} & 3a - 4b + 2c = 8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & (u+v) : (u-v) : (v-w) = 2 : 1 : 5 \\ \text{II:} & 3u + 2v - 4w = 47 \end{array}$$

7.71 **a)**
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{x+2} : \frac{2}{y+2} : \frac{3}{4+z} = 4 : 8 : 3 \\ \text{II:} & \frac{3}{x+2} - \frac{4}{4+z} = 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{a+1} : \frac{1}{b+3} : \frac{2}{c+4} = 1 : 1 : 6 \\ \text{II:} & \frac{2}{a+1} - \frac{3}{b+3} - \frac{3}{c+4} = -\frac{5}{3} \end{array}$$

7.72 Von einem linearen Gleichungssystem in 3 Variablen ist die erweiterte Matrix A_{erw} gegeben. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 12 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & 18 \end{pmatrix}$ **c)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -9 & -4 \end{pmatrix}$

7.73 Von einem linearen Gleichungssystem in 3 Variablen ist die erweiterte Matrix gegeben. Bestimme die Konstanten a und b, sodass das Gleichungssystem
a) eine eindeutige Lösung, **b)** keine Lösung, **c)** unendlich viele Lösungen besitzt.

(1) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & b \end{pmatrix}$ (2) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & -1 & a & -2 \\ -1 & 0 & 2 & b \end{pmatrix}$ (3) $A_{erw} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -12 & 6 \\ -4 & a & -11 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & b \end{pmatrix}$

7.74 Verlängert man in einem Dreieck die kürzeste Seite um 3 cm und verkürzt die längste Seite um 3 cm, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Das Vierfache der längsten Seite ist um 25 cm länger als das Dreifache der mittleren Seite. Welche Abmessungen besitzt das Dreieck?

7.75 Zur Erzeugung eines Drehteiles werden drei Drehautomaten mit unterschiedlicher Leistung eingesetzt. Ist der Automat I 2 Stunden, der Automat II 1 Stunde und der Automat III 3 Stunden in Betrieb, so werden 37 Drehteile angefertigt. Wenn der Automat II 3 Stunden und der Automat III 4 Stunden in Betrieb sind, so werden 31 Teile fertig; ist der Automat I 3 Stunden und der Automat II 1 Stunde in Betrieb, so werden 35 Drehteile angefertigt. Wie viele Drehteile produziert jeder der drei Drehautomaten pro Stunde?

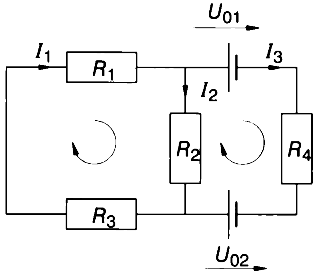
7.76 Drei LKW werden mit drei unterschiedlichen Behältern A, B und C beladen. Auf dem ersten LKW befinden sich 2 Behälter B und 4 Behälter C. Auf dem zweiten 1 Behälter A, 2 Behälter B und 2 Behälter C; auf dem dritten LKW befinden sich 4 Behälter A, 1 Behälter B und 4 Behälter C. Bei allen 3 LKW wird die Nutzlast von 4000 kg ausgenutzt. Wie schwer sind die einzelnen Behälter?

7.77 Drei Elektriker A, B und C brauchen für die Installation einer Werkhalle zusammen 6 Tage. Arbeitet der Elektriker C zunächst 4 Tage alleine und arbeiten anschließend alle drei noch 4 Tage, so wird die Installation ebenfalls fertig. Wenn der Elektriker A 3 Tage, der Elektriker B 9 Tage und der Elektriker C 7 Tage arbeitet, wird die Installation ebenfalls abgeschlossen. Wie lange würde jeder einzelne Elektriker brauchen, um die Installation abzuschließen?

7.78 Vergrößert man die Länge eines Quaders um 1 cm, so nimmt die Oberfläche um 26 cm^2 zu; vergrößert man hingegen die Breite um 1 cm, so vergrößert sich die Oberfläche um 24 cm^2. Vergrößert man die Länge um 2 cm, die Breite um 1 cm und die Höhe um 2 cm, so nimmt die Oberfläche um 128 cm^2 zu. Wie sind die ursprünglichen Abmessungen des Quaders?

7.79 Berechne die Stromstärken in den folgenden Schaltkreisen.

a)



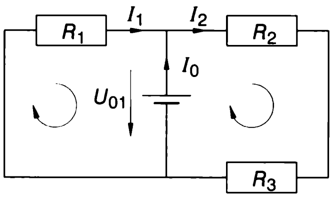
$R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 30\ \Omega$; $R_3 = 25\ \Omega$;
$R_4 = 15\ \Omega$; $U_{01} = 20$ V; $U_{02} = 40$ V.

I: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

II: $I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 = 0$

III: $\underline{I_3 \cdot R_4 - I_2 \cdot R_2 = -U_{01} + U_{02}}$

b)



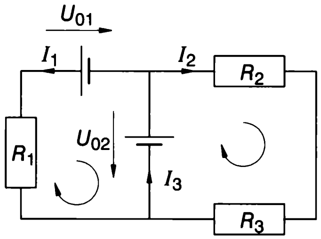
$R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 8\ \Omega$;
$U_{01} = 10$ V.

I: $I_1 + I_0 - I_2 = 0$

II: $I_1 \cdot R_1 = -U_{01}$

III: $\underline{I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_3 = U_{01}}$

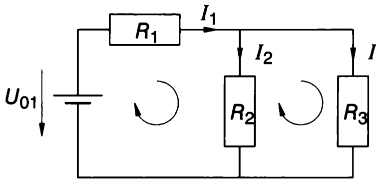
c)



$R_1 = 25\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 15\ \Omega$;
$U_{01} = 10$ V; $U_{02} = 25$ V.

I: $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$
II: $-I_1 \cdot R_1 = -U_{01} - U_{02}$
III: $I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_3 = U_{02}$

d)



$R_1 = 8\ \Omega$; $R_2 = 12\ \Omega$; $R_3 = 15\ \Omega$;
$U_{01} = 20$ V.

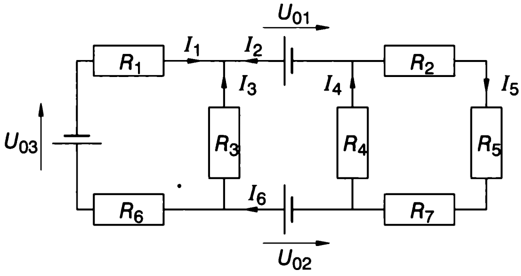
I: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
II: $I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = U_{01}$
III: $I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$

7.80 **a)** I: $2u - v = 1$
II: $w + x = 5$
III: $u + v - w = -3$
IV: $3u + 2x = 6$

b) I: $3a + 4c = 14$
II: $a + b + c = 6$
III: $4b + d = 7$
IV: $2b + 3c - d = 14$

c) I: $2u + 2x - y = -5$
II: $u - w = -1$
III: $u + x - 2y = 2$
IV: $x + y = 1$
V: $u + v + w = 2$

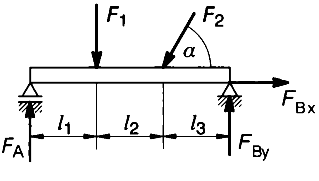
7.81 Versuche nun selbst mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gesetze die Gleichungen für das Netzwerk aufzustellen! Überlege, wie viele lineare Gleichungen man für die Auflösung benötigt!



$R_1 = 40\ \Omega$; $R_2 = 45\ \Omega$; $R_3 = 50\ \Omega$;
$R_4 = 55\ \Omega$; $R_5 = 25\ \Omega$; $R_6 = 50\ \Omega$;
$R_7 = 60\ \Omega$;
$U_{01} = 20$ V; $U_{02} = 30$ V; $U_{03} = 20$ V.

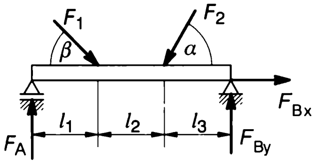
7.82 An einem Stützträger wirken die Kräfte F_1 und F_2. Berechne die Kräfte F_A und F_B!

I: $F_A + F_{By} - F_1 - F_2 \cdot \sin \alpha = 0$
II: $F_{Bx} - F_2 \cdot \cos \alpha = 0$
III: $-F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l_1 + l_2) + F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$



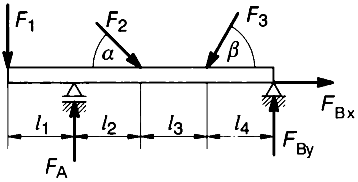
	a)	b)	c)	d)
F_1	300 N	250 N	500 N	400 N
F_2	250 N	300 N	600 N	500 N
α	40°	50°	60°	45°
l_1	0,7 m	60 cm	50 cm	0,85 m
l_2	40 cm	60 cm	70 cm	50 cm
l_3	30 cm	0,6 m	0,8 m	0,9 m

7.83 An einem Stützträger wirken die Kräfte F_1 und F_2. Berechne die Kräfte F_A und F_B! Versuche die einzelnen Gleichungen selbst aufzustellen!



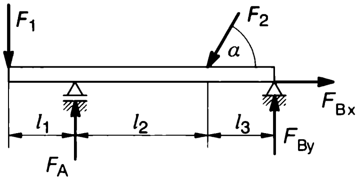
	a)	b)	c)	d)
F_1	300 N	250 N	500 N	400 N
F_2	250 N	300 N	600 N	500 N
α	45°	55°	30°	20°
β	35°	60°	55°	60°
l_1	0,75 m	80 cm	90 cm	0,95 m
l_2	30 cm	40 cm	60 cm	50 cm
l_3	20 cm	0,5 m	0,85 m	0,8 m

7.84 An einem Stützträger wirken die Kräfte F_1, F_2 und F_3. Berechne die Kräfte F_A und F_B! Versuche die einzelnen Gleichungen selbst aufzustellen!



	a)	b)	c)	d)
F_1	350 N	200 N	700 N	400 N
F_2	450 N	350 N	300 N	500 N
F_3	200 N	400 N	500 N	400 N
α	45°	55°	60°	45°
β	30°	25°	40°	55°
l_1	0,7 m	65 cm	30 cm	0,85 m
l_2	55 cm	65 cm	75 cm	50 cm
l_3	35 cm	0,4 m	0,7 m	0,6 m
l_4	30 cm	0,6 m	0,8 m	0,9 m

7.85 An einem Stützträger wirken die Kräfte F_1 und F_2. Berechne die Kräfte F_A und F_B! Versuche die einzelnen Gleichungen selbst aufzustellen!



	a)	b)	c)	d)
F_1	350 N	200 N	700 N	400 N
F_2	450 N	350 N	300 N	500 N
α	45°	55°	60°	45°
l_1	0,7 m	65 cm	30 cm	0,85 m
l_2	1,2 m	1,5 m	75 cm	1 m
l_3	35 cm	0,4 m	0,7 m	0,6 m

8 Vektorrechnung

8.1 Einführung

Unter den physikalischen Größen gibt es zahlreiche, wie Geschwindigkeit, Kraft, elektrische Feldstärke, die nicht nur einen **Betrag**, sondern auch eine **Richtung** haben. Für ihre geometrische Beschreibung wird ein Pfeil verwendet. Durch einen Pfeil wird aber auch die Verschiebung einer Figur in der Ebene oder im Raum beschrieben. Es zeigt sich, dass Größen wie Geschwindigkeit, Kraft und dgl. sowie geometrische Verschiebungen gemeinsame Eigenschaften besitzen und *gemeinsam* rechnerisch behandelt werden können. Dies ist Aufgabe der **Vektorrechnung**.

Physikalische Größen, die Betrag und Richtung haben, heißen **vektorielle Größen**. So spricht man etwa vom Geschwindigkeitsvektor. Entsprechend spricht man bei einer geometrischen Verschiebung vom zugehörigen Verschiebungsvektor. Will man den Unterschied zwischen Vektoren und Zahlen hervorheben, so nennt man Zahlen auch **Skalare**. Skalare Größen der Physik, etwa Zeit, Masse, Temperatur, sind nur durch Angabe einer Zahl (bei festgelegter Einheit) bestimmt.

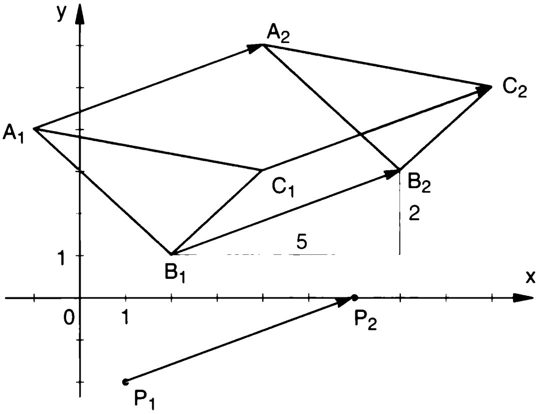


Abb. 8.1 Verschiebung in der Ebene

In der Ebene (Abb. 8.1) sind das Dreieck $A_1B_1C_1$ sowie ein Punkt P_1 gegeben. Wir verschieben nun jeden Punkt der Ebene um 5 Einheiten in x-Richtung und 2 Einheiten in y-Richtung. Damit geht der Punkt P_1 in P_2 und das Dreieck $A_1B_1C_1$ in $A_2B_2C_2$ über.

Zur Festlegung einer solchen Verschiebung genügt es, die Lage eines einzigen Punktes vor und nach der Verschiebung zu kennen. Ein solches Punktepaar, etwa P_1 als Anfangspunkt und P_2 als Endpunkt der Verschiebung, legt einen Pfeil fest, der **Verschiebungspfeil** genannt wird. Durch die Verschiebung wird die gesamte Ebene mit Pfeilen der gleichen Länge und Richtung überdeckt, weshalb sie als *verschiebungsgleich* bezeichnet werden.

Die Verschiebung "**5** Einheiten längs der x-Achse und **2** Einheiten längs der y-Achse" kann abgekürzt als Zahlenspalte $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ notiert werden. Durch die Angabe einer solchen Zahlenspalte ist die Verschiebung vollständig beschrieben. Wir definieren:

Eine Zahlenspalte $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ nennt man einen (zweidimensionalen) **Vektor**. Er wird kurz mit $\vec{a}$ bezeichnet. a_x und a_y heißen **Koordinaten** oder **skalare Komponenten** des Vektors.

Diese Definition ist noch durch gewisse Rechenoperationen und -regeln zu ergänzen, was auf den nächsten Seiten erfolgen wird.

Das Wort "Vektor" (vom lat. vehere = fahren) wurde vom englischen Astronomen W. R. HAMILTON (1805 – 1865) eingeführt. Dieser und unabhängig von ihm der deutsche Gymnasiallehrer H. G. GRASSMANN (1809 – 1877) begründeten die Vektorrechnung.

Die Bezeichnung von Vektoren erfolgt häufig durch lateinische Kleinbuchstaben mit darübergesetztem Pfeil wie beispielsweise $\vec{a}$, $\vec{b}$ usw. oder auch durch Fettdruck wie **a**, **b**.

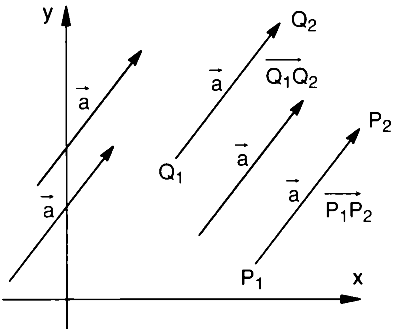


Abb. 8.2 Jeder Pfeil stellt denselben Verschiebungsvektor dar

In Abb. 8.2 legt der Pfeil von P_1 nach P_2 dieselbe Verschiebung fest wie der Pfeil von Q_1 nach Q_2 oder alle zu ihm verschiebungsgleichen Pfeile. *In diesem Sinne* kann jeder dieser (verschiedenen!) Pfeile mit derselben Vektorbezeichung $\vec{a}$ gekennzeichnet werden; jeder stellt denselben Verschiebungsvektor dar oder repräsentiert ihn.

So werden verschiebungsgleiche Pfeile im Parallelogramm ABCD der Abb. 8.3 mit demselben Vektorzeichen versehen.

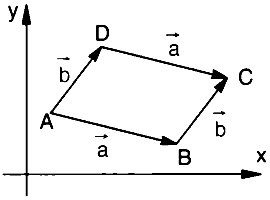


Abb. 8.3 Zwei Verschiebungsvektoren

Auch wertgleiche Brüche stellen, trotz verschiedener Form, dieselbe Zahl dar: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \ldots$. Hier stellen verschiebungsgleiche Pfeile denselben Verschiebungsvektor dar.

Darüber hinaus sind auch die Bezeichnungen $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ für $\vec{a}$ üblich: $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$.

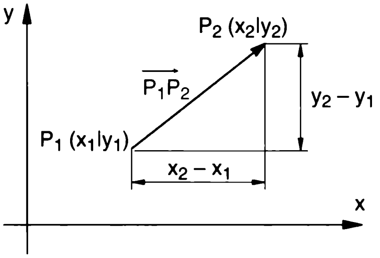


Abb. 8.4 Merkregel: "Spitze minus Schaft"

Sind $P_1\,(x_1|y_1)$ und $P_2\,(x_2|y_2)$ zwei Punkte im Koordinatensystem, dann gilt nach Abb. 8.4:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.1 : Ermitteln von Vektoren

A (1|1), B (5|7) und C (–3|6) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Ermittle die "Seitenvektoren" $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$.

Lösung

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, so heißt $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ **Betrag** oder **Länge** von $\vec{a}$. Ist der Betrag eines Vektors gleich 1, so heißt er **Einheitsvektor** $\vec{a}_0$ oder normierter Vektor.
Der Betrag von $\vec{a}$ wird auch mit a bezeichnet.

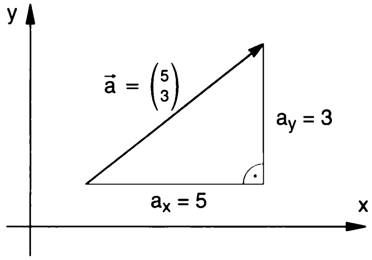


Abb. 8.5 Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist – geometrisch veranschaulicht – gleich (dem Zahlenwert) der Länge eines Pfeiles, der den Vektor darstellt. Dies kann unmittelbar aus Abb. 8.5 bei Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes abgelesen werden.

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5{,}83.$$

Die Lage eines Pfeiles *und* der Durchlaufsinn (durch die Pfeilspitze angegeben) bestimmen die **Richtung** des Vektors. In Abb. 8.6 besitzen beispielsweise

$\vec{a}, \vec{b}$	ungleichen Betrag und ungleiche Richtung;
$\vec{b}, \vec{c}$	ungleichen Betrag, jedoch gleiche Richtung;
$\vec{c}, \vec{d}$	gleichen Betrag und gleiche Richtung;
$\vec{c}, \vec{e}$	gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung.

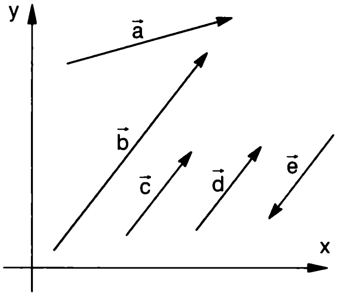


Abb. 8.6 Betrag und Richtung von Vektoren

Wann sind zwei Vektoren gleich? Deuten wir sie als Verschiebungsvektoren, so werden wir natürlich verlangen, dass sie die gleiche Verschiebung beschreiben. Man wird daher vereinbaren:

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ sind **gleich**, wenn sie **koordinatenweise übereinstimmen**; d.h. wenn $a_x = b_x \wedge a_y = b_y$.

Man erkennt leicht, dass zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie **in Betrag und Richtung übereinstimmen**.

Beispiel 8.2 : Gleichheit von Vektoren

Gegeben ist das Viereck ABCD durch A (0|0), B (5|1), C (6|5) und D (1|4). Zeige, dass es sich um ein Parallelogramm handelt. Wie lang sind seine Seiten?

Lösung

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten *sowohl* parallel *als auch* gleich lang sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; d.h. die Seiten AB und DC sind gleich lang und parallel.

Seitenlängen (entprechend genaue Angaben vorausgesetzt):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5{,}10 \text{ Längeneinheiten;}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6-5)^2 + (5-1)^2} = 4{,}12 \text{ Längeneinheiten.}$$

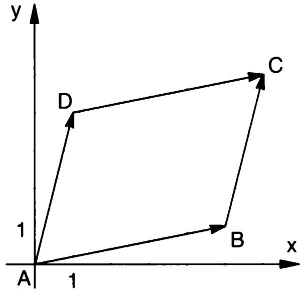


Abb. 8.7

Eine gleichartige Rolle wie die Zahl 0 unter den Zahlen spielt unter den Vektoren der Nullvektor.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird als **Nullvektor** $\vec{0}$ bezeichnet.

Deutet man $\vec{0}$ als Verschiebungsvektor, so beschreibt er die "Verschiebung", bei der Anfangs- und Endlage zusammenfallen.

Wir vereinbaren, was unter dem Vektor $-\vec{a}$ zu verstehen ist:

Der Vektor $-\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$ wird als **Gegenvektor** oder **inverser Vektor** zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Wird $\vec{a}$ als Verschiebungsvektor gedeutet, so beschreibt $-\vec{a}$ offensichtlich die "Gegenverschiebung".

Die Pfeile, die $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ darstellen, sind gleich lang und parallel, besitzen aber entgegengesetzte Richtung.

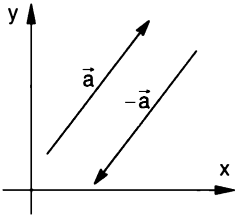


Abb. 8.8 Vektor und Gegenvektor

Ortsvektoren

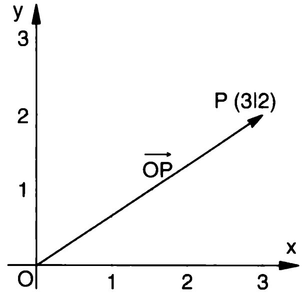


Abb. 8.9 Ortsvektor des Punktes P (3|2)

Wir betrachten den Punkt P (3|2) in der Koordinatenebene. Vom Ursprung O ziehen wir nun einen Pfeil zum Punkt P und bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{OP}$ (Abb. 8.9).

Legt man fest, dass die Zahlenspalte $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *nur* durch den Pfeil $\overrightarrow{OP}$ dargestellt wird (und nicht durch andere verschiebungsgleiche zu OP), so nennt man sie **Ortsvektor (Koordinatenvektor, Zeiger)** von P (3|2). Man schreibt: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ sind somit einfach die Koordinaten des Punktes P. Eine weitere Schreibung des Ortsvektors von P ist $\vec{r}(P)$.

Beispiel 8.3 : Ortsvektor eines Punktes

a) Wie lautet der Ortsvektor von P (1|3)?

b) Eine Verschiebung ist durch den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt, wobei A (2|4) und B (5|1) ist. Für welchen Punkt ist $\vec{a}$ Ortsvektor?

Lösung

Zu **a)** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zu **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{a}$ ist Ortsvektor von P (3|–3).

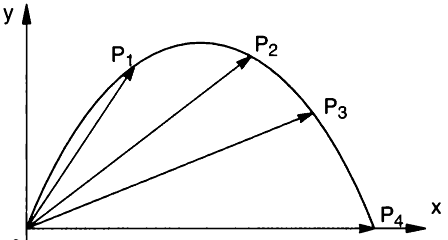


Abb. 8.10 Bahnkurve des schiefen Wurfs

Abb. 8.10 zeigt die Bahnkurve eines im Punkt O schief nach oben geworfenenen kleinen Körpers. Eingezeichnet sind auch die Ortsvektoren der Bahnpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4. $\overrightarrow{OP_4}$ ist der Ortsvektor des Punktes, in dem der Körper wieder auf dem Boden aufschlägt. Die Spitzen der Ortsvektoren "wandern" auf der Bahnkurve des Körpers.

Ortsvektoren zur zeitlichen Beschreibung der Bewegung eines Punktes werden häufig mit $\vec{r}(t)$ bezeichnet.

Wir haben nun *zwei* Möglichkeiten, den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ *geometrisch* zu deuten: als Verschiebungsvektor beschreibt $\vec{a}$ eine Verschiebung und als Ortsvektor einen Punkt.

Man spricht bei Verschiebungsvektoren auch von "freien" Vektoren und bei Ortsvektoren von "gebundenen" Vektoren. In der Physik spricht man weiterhin noch von "linienflüchtigen" Vektoren. Ein Beispiel dafür sind Kräfte, die auf einem starren Körper angreifen. Bei diesen Bezeichnungen nimmt man jeweils auf die darstellenden Pfeile Bezug: der Anfangspunkt ist (1) frei wählbar, (2) an einen festen Punkt gebunden oder (3) längs einer Geraden verschiebbar.

Beispiel 8.4 : Koordinaten, Betrag und Winkel eines Vektors

a) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne seinen Betrag und den Winkel α, den er mit der x-Achse einschließt.

b) Vom Vektor $\vec{b}$ ist der Betrag b = 4 und der Winkel $\beta = 38°$ zur x-Achse, von einem anderen Vektor $\vec{c}$ der Betrag c = 3 und der Winkel $\gamma = 130°$ zur x-Achse bekannt. Wie lauten die Koordinaten der beiden Vektoren?

(Grundlegende Aufgabe beim Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften in der Mechanik.)

Lösung

Wir zeichnen die Vektoren als Ortsvektoren.

Zu **a)** $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}61$;

$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33{,}7°$.

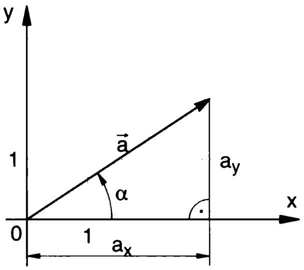


Abb. 8.11

Zu **b)**

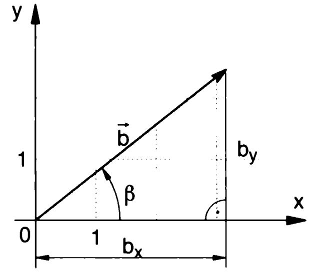


Abb. 8.12

$\cos\beta = \frac{b_x}{b} \Rightarrow b_x = b \cdot \cos\beta = 3{,}15;$

$\sin\beta = \frac{b_y}{b} \Rightarrow b_y = b \cdot \sin\beta = 2{,}46;$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3{,}15 \\ 2{,}46 \end{pmatrix}.$

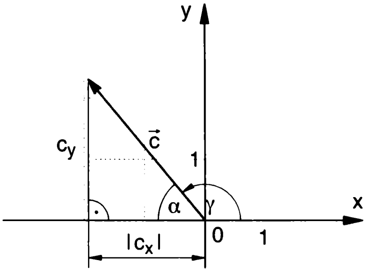


Abb. 8.13

Wir rechnen mit dem spitzen Winkel $\alpha = 180° - \gamma = 50°$, müssen nun aber berücksichtigen, dass c_x negativ ist ($\vec{c}$ weist nach "links"!). Dann können wir genauso rechnen, wie eben beim Vektor $\vec{b}$:

$c_x = -c \cdot \cos\alpha = -3 \cdot \cos 50° = -1{,}93;$
$c_y = c \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \sin 50° = 2{,}30;$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1{,}93 \\ 2{,}30 \end{pmatrix}.$

Aufgaben

Jede der folgenden Aufgaben soll durch eine maßstäbliche Zeichung ergänzt werden, die auch zur Kontrolle der Rechnung dient.

8.1 A_1 (3|1), B_1 (5|4) und C_1 (−1|5) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Es wird einer Verschiebung unterworfen, die durch den Vektor $\vec{a}$ gegeben ist. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte nach der Verschiebung.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8.2 Gegeben sind die Punkte A und B sowie P und Q. Stellt der Pfeil von A nach B und jener von P nach Q denselben Vektor dar?

a) A (3|4), B (1|7), P (1|−1), Q (−1|2) **b)** A (1|1), B (−1|2), P (0|0), Q (−2|−3)

8.3 Gegeben ist die Raute ABCD mit dem Mittelpunkt M. Diese 5 Punkte kann man durch 20 Pfeile verbinden. Wie viele verschiedene Vektoren stellen diese Pfeile dar, wenn man von den jeweiligen Gegenvektoren absieht?

8.4 Was ist richtig? Für die Gleichheit zweier Vektoren ist **a)** notwendig, **b)** hinreichend, **c)** notwendig und hinreichend, dass ihre Beträge gleich sind.

8.5 Ermittle den Betrag des Vektors.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$

8.6 Gegeben sind die Eckpunkte A (1|2), B (5|0) und C (4|6) eines Dreiecks. Ermittle die drei Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$. Wie groß ist die Dreiecksfläche? *(Hinweis:* Berechne zuerst die Länge der Dreiecksseiten und danach mit Hilfe der Heron'schen Formel die Dreiecksfläche.)

8.7 Berechne den Abstand zweier Punkte P und Q als Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$:

a) P(1|2), Q(5|3) **b)** P(–1|3), Q(4|2) **c)** P(–1|1), Q(4|–2)

8.8 Ist das folgende Viereck ABCD ein Parallelogramm? Wenn ja, wie lang sind die Seiten?

a) A(–1|–3), B(3|2), C(–1|5), D(–5|0) **b)** A(–4|–1), B(4|0), C(7|4), D(–1|2)

8.9 Bestimme die Flächeninhalte der Vierecke ABCD in Aufgabe 8.8.
Hinweis: Jedes Viereck lässt sich aus zwei Dreiecken zusammensetzen.

8.10 Gegeben ist der Punkt P. Nenne den entsprechenden Ortsvektor.

a) P(2|1) **b)** P(0|1) **c)** P(–2|–3)

8.11 Gegeben ist ein Ortsvektor. Welche Koordinaten hat der zugehörige Punkt?

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

8.12 Gegeben ist der Punkt A(3|2). Spiegle diesen Punkt sowohl an der x-Achse wie auch an der y-Achse, wodurch die Punkte B bzw. C entstehen. Gib die Ortsvektoren dieser drei Punkte an!

8.13 Auf welcher Ortskurve liegen alle Punkte, deren Ortsvektoren den gleichen Betrag haben?

8.14 Die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks ABC sind $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Berechne die Seitenvektoren und Seitenlängen des Dreiecks!

8.15 Welche Winkel bildet der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit den beiden Koordinatenachsen?

8.16 Von einem Vektor ist der Betrag und der Winkel α zur x-Achse bekannt. Wie lauten die Koordinaten des Vektors?

a) $|\vec{a}| = 5, \alpha = 60°$ **b)** $|\vec{a}| = 1, \alpha = 25°$ **c)** $|\vec{a}| = 3, \alpha = 90°$

d) $|\vec{a}| = 5, \alpha = 160°$ **e)** $|\vec{a}| = 4, \alpha = 230°$ **f)** $|\vec{a}| = 3, \alpha = -15°$

8.17 Von einem Vektor $\vec{a}$ ist eine Koordinate und der Winkel zur x-Achse bekannt. Wie lautet die zweite Koordinate des Vektors?

a) $a_x = 4, \alpha = 40°$ **b)** $a_x = 4, \alpha = -40°$ **c)** $a_x = -4, \alpha = 120°$

d) $a_y = 2, \alpha = 60°$ **e)** $a_y = 2, \alpha = 120°$ **f)** $a_y = 5, \alpha = 30°$

8.18 Ein kleiner Körper wird zum Zeitpunkt $t = 0$ s mit der Geschwindigkeit $v_0 = 100$ kmh^{-1} unter dem Winkel $\alpha = 60°$ schräg nach oben geworfen. Seine Lage wird für jede Flugdauer t durch den Orstvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cdot \cos\alpha \\ v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$ angegeben, wobei $g = 9{,}81$ ms^{-2} ist. Zeichne den Ortsvektor für $t = 2$ s, $t = 3$ s und $t = 4{,}5$ s.

8.2 Rechnen mit Vektoren

8.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Summe zweier Vektoren: $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

Vektoren werden koordinatenweise addiert.

Geometrische Veranschaulichung mit *Verschiebungsvektoren*:

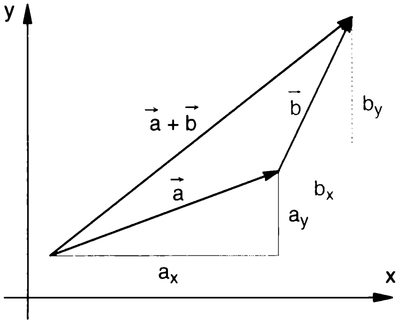


Abb. 8.14 Vektoraddition durch Aneinanderfügen ihrer Pfeile

In Abb. 8.14 wurde eine **Vektorkette** (eigentlich eine Pfeilkette) gebildet: Man fügt an die Spitze eines Pfeiles für $\vec a$ einen Pfeil für $\vec b$ an. Nun entnimmt man, dass der vom Anfangspunkt des ersten Pfeils zur Spitze des zweiten Pfeils weisende "Direktpfeil" gerade den Summenvektor $\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$ darstellt.

Die Vektorkette führt auch bei *Ortsvektoren* $\vec a$, $\vec b$ zum richtigen Ergebnis, obwohl nun der an die Spitze von $\vec a$ angesetzte Pfeil nicht mehr den Ortsvektor $\vec b$ darstellt.

Genauso wie bei der Addition von Zahlen gelten auch bei der Vektoraddition das *Kommutativgesetz* (1) und das *Assoziativgesetz* (2):

(1) $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$ (2) $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$

Dies zeigt man leicht, wenn man die Vektoren als Zahlenspalten schreibt. Das Assoziativgesetz erlaubt es, die Addition mehrerer Vektoren in beliebiger Reihenfolge vorzunehmen. Somit sind die Klammern für das Ergebnis ohne Bedeutung; sie können daher auch weggelassen werden. Wie sieht die geometrische Veranschaulichung dieser Gesetze aus?

Der Nullvektor $\vec 0$ spielt bei der Vektoraddition die gleiche Rolle wie die Zahl 0 bei der Addition von Zahlen: $\vec a + \vec 0 = \vec a$, weil $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + 0 \\ a_y + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

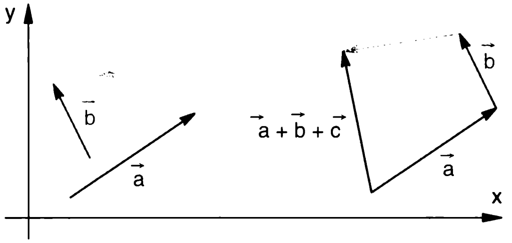


Abb. 8.15 Addition mehrerer Vektoren

Sind mehrere Vektoren (Abb. 8.15) zu addieren, so kann man die Vektoren (eigentlich ihre Pfeile) zu einer Vektorkette zusammensetzen. Dabei fügt man die Pfeile hintereinander an. Der Pfeil vom Anfangspunkt zum Endpunkt der Kette stellt den Summenvektor dar.

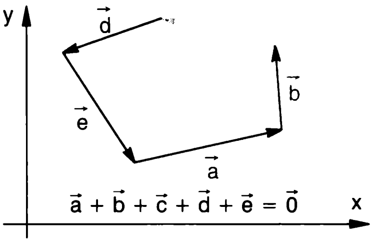


Abb. 8.16 Geschlossene Vektorkette

Für eine **geschlossene Vektorkette** (Abb. 8.16) gilt:

> Die Summe von Vektoren ergibt genau dann den Nullvektor $\vec{0}$, wenn sich eine geschlossene Vektorkette bilden lässt.

Beispiel 8.5 : Geschlossene Vektorkette

Gegeben ist (siehe Abb. 8.17) das Viereck ABCD durch A (1|1), B (4|2), C (6|5) und D (2|6). Die "Seitenvektoren" $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ bilden eine geschlossene Vektorkette. Zeige, dass ihre Summe gleich $\vec{0}$ ist.

Lösung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Für die Summierung kann nach dem Assoziativgesetz beliebig zusammengefasst werden:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 1 + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 - 1 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2 - 4 - 1 \\ 1 + 3 + 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

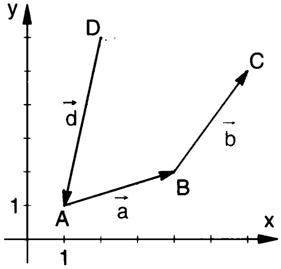


Abb. 8.17

Wir definieren:

> **Differenz zweier Vektoren**
>
> $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
>
> Ein Vektoren wird subtrahiert, indem man seinen Gegenvektor addiert.

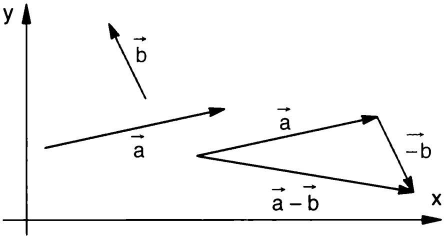


Abb. 8.18 Differenzvektor

Aus der Definition des Differenzvektors folgt unmittelbar:

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - a_x \\ a_y - a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Beispiel 8.6 : Vektorgleichung

Löse die Vektorgleichung $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ nach $\vec{x}$.

Lösung

$$\begin{aligned} \vec{b} + \vec{x} &= \vec{a} \qquad | + (-\vec{b}) \\ \vec{b} + (-\vec{b}) + \vec{x} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ \vec{0} + \vec{x} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ \vec{x} &= \vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

Beispiel 8.7 : Ermitteln eines Vektors

Gegeben ist das Dreieck ABC nach Abb. 8.19; drücke $\vec{x} = \overrightarrow{BC}$ durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

Lösung

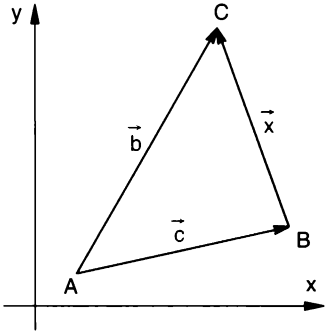


Abb. 8.19

1. Lösungsmöglichkeit:

$\vec{b}$ ist der Summenvektor von $\vec{c}$ und $\vec{x}$: $\vec{c} + \vec{x} = \vec{b}$; daraus $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$.

2. Lösungsmöglichkeit (häufig angewandt):

Man **bildet eine geschlossene Vektorkette** und benützt, dass die Summe der Vektoren gleich $\vec{0}$ ist:

$\vec{c} + \vec{x} + (-\vec{b}) = \vec{0}$; daraus $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$.

Beachte, dass in dieser Vektorkette der Pfeil für $-\vec{b}$ die Kette schließt!

Von besonderer Bedeutung sind Vektoren in Physik und Technik. Sie können geometrisch oft als Verschiebungsvektoren oder Ortsvektoren veranschaulicht werden.

Beispiel 8.8 : Geschwindigkeitsvektor

Ein Fährboot (Abb. 8.20) überquert auf kürzestem Weg einen Fluss von $s = 500$ m Breite, der eine Strömungsgeschwindigkeit von 1,0 ms^{-1} hat. Die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Wasser ist 2,0 ms^{-1}.

a) In welcher Zeitdauer erreicht das Boot das andere Ufer?

b) Welchen Winkel φ schließt die Bootsachse mit der Flussnormalen ein?

Lösung

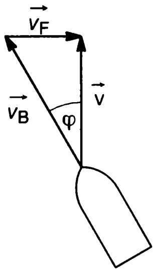


Abb. 8.20

Zu **a)** Damit das Boot nicht von der Flussströmung abgetrieben wird, muss es etwas gegen die Strömung halten.

$\vec{v}_B$ ... Bootsgeschwindigkeit relativ zum Wasser

$\vec{v}_F$ ... Strömungsgeschwindigkeit

$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_F$ ... Geschwindigkeit des Bootes über dem Flussgrund

Bezeichnen v_B, v_F und v die Beträge der drei Geschwindigkeitsvektoren, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz $v_F^2 + v^2 = v_B^2$; daraus folgt mit $v_F = 1\ \text{ms}^{-1}$ und $v_B = 2\ \text{ms}^{-1}$ für die Geschwindigkeit über dem Grund: $v = 1{,}7\ \text{ms}^{-1}$. Ist t die Fahrzeit des Bootes bis zum anderen Ufer, so folgt aus $s = v \cdot t$ die Fahrzeit $t \approx 290$ s oder $t \approx 4$ min 50 s.

Zu **b)** $\sin\varphi = \frac{v_F}{v_B} = \frac{1\ \text{ms}^{-1}}{2\ \text{ms}^{-1}} \Rightarrow \varphi = 30°$.

Da die Geschwindigkeiten als Pfeile gezeichnet werden, muss ein geeigneter Maßstab gewählt werden; beispielsweise 1 cm $\hat{=}$ 1 ms^{-1}.

Beispiel 8.9 : Resultierende eines ebenen Kräftesystems

Das ebene Kräftesystem in Abb. 8.21 soll reduziert werden, d.h. die Resultierende der Kräfte nach Betrag und Richtung bestimmt werden. Folgende Angaben liegen vor:

$F_1 = 200$ N, $F_2 = 300$ N, $F_3 = 150$ N sowie $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 50°$, $\alpha_3 = 60°$.

Lösung

Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ ist die Summe der Vektoren $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Sind F_{Rx}, F_{Ry}, usw. die Koordinaten oder skalaren Komponenten, so gilt:

$$\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix}.$$

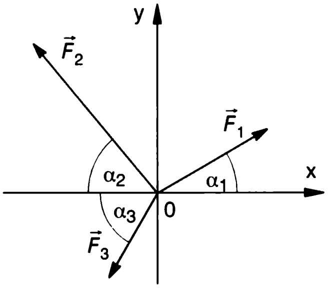


Abb. 8.21 Ebenes Kräftesystem

Nach Addition der skalaren Komponenten auf der rechten Seite folgen aus der Vektorgleichung die beiden skalaren Gleichungen:

$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$;

$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$.

Nach dem Beispiel 8.4, Seite 279, folgt:

$F_{1x} = 200 \text{ N} \cdot \cos 30° = 173{,}2$ N; $F_{1y} = 200 \text{ N} \cdot \sin 30° = 100{,}0$ N;

$F_{2x} = -300 \text{ N} \cdot \cos 50° = -192{,}8$ N; $F_{2y} = 300 \text{ N} \cdot \sin 50° = 229{,}8$ N;

$F_{3x} = -150 \text{ N} \cdot \cos 60° = -75{,}0$ N; $F_{3y} = -150 \text{ N} \cdot \sin 60° = -129{,}9$ N.

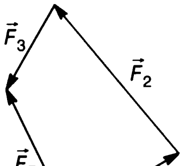


Abb. 8.22 Zeichnerische Lösung

Damit lauten die skalaren Komponenten der resultierenden Kraft: $F_{Rx} = -94{,}6$ N und $F_{Ry} = 199{,}9$ N.

Betrag der resultierenden Kraft: $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 221{,}2$ N.

Abb. 8.22 zeigt die zeichnerische Lösung durch einen "Kräfteplan". Darin werden alle Kräfte maßstabs- und richtungsgerecht gezeichnet.

Zur Berechnung des spitzen Winkels α zwischen $\vec{F}_R$ und der x-Achse benützen wir das rechtwinklige Dreieck in Abb. 8.23. Hiebei kommt es nur auf die Beträge der skalaren Komponenten von $\vec{F}_R$ an:

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ry}}{|F_{Rx}|} = 2{,}11\ldots \quad \Rightarrow \quad \alpha = 64{,}7°.$$

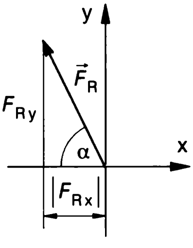


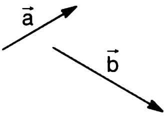
Abb. 8.23

Anmerkung: Sind die Richtungen der Kräfte nicht durch ihre spitzen Winkel zur x-Achse gegeben, so berechnet man zuerst diese Winkel und setzt dann wie in diesem Beispiel fort.

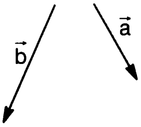
Aufgaben

8.19 Übertrage ins Heft und bestimme sodann die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ und die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$:

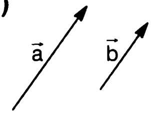
a)



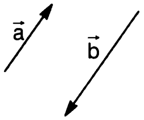
b)



c)



d)



8.20 Ermittle rechnerisch und graphisch den Summenvektor:

a) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ **d)** $-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

8.21 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$. Ermittle rechnerisch $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$. Zeichne die gesuchten Vektoren und vergleiche zur Kontrolle mit der Rechnung.

a) A (2|2), B (5|3), C = B, D (1|4) **b)** A (0|0), B (3|4), C = B, D (5|2)
c) A (−1|−1), B (3|−4), C (2|2), D (5|1) **d)** A (−5|1), B (−3|−2), C (2|4), D (0|6)

8.22 Ermittle die Koordinaten des Punktes C des Parallelogramms ABCD. Benütze dazu die Beziehung $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$.

a) A (0|2), B (6|4), D (1|6) **b)** A (2|2), B (6|3), D (−2|5)

8.23 Löse die Vektorgleichungen

a) $\vec{x} - \vec{b} = \vec{a}$ **b)** $\vec{b} + \vec{x} - \vec{a} = \vec{b}$ **c)** $\vec{a} - (\vec{x} - \vec{b}) = \vec{b}$

8.24 Gegeben sind die Ortsvektoren der Punkte A und B. Berechne $\overrightarrow{AB}$. Kontrolliere durch eine Zeichnung.

a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

8.25 Gegeben sind der Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ und der Vektor $\overrightarrow{AB}$. Ermittle die Koordinaten von A!

a) $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

8.26 Das Fährboot mit sonst gleichen Angaben wie in Beispiel 8.8 wird nun so gesteuert, dass seine Achse normal zur Flussrichtung steht.

a) Wie groß ist der Winkel, den die tatsächliche Fahrtrichtung mit der Flussnormalen einschließt?

b) Wie groß ist die Fahrtgeschwindigkeit des Bootes gegenüber dem Grund?

c) Wie weit ist das Boot beim Anlegen am anderen Ufer abgetrieben worden?

d) In welcher Zeit überquert es den Fluss?

8.27 Ein Flugzeug (Abb. 8.24), dessen Geschwindigkeit gegenüber Luft 500 km/h beträgt, fliegt einen genauen Westkurs. Während des Fluges weht ein Wind mit 20 km/h von Norden. Berechne die Geschwindigkeit gegenüber dem Boden.

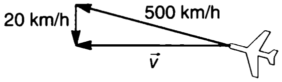


Abb. 8.24

8.28 Ein Flugzeug (Abb. 8.25), dessen Geschwindigkeit gegenüber Luft 900 km/h beträgt, fliegt in östlicher Richtung eine Strecke von 1600 km. Es weht ein Wind mit 40 km/h aus Nordost.

a) Berechne die Fluggeschwindigkeit v_1 über dem Boden sowie die Flugdauer.

b) Wie groß sind beim Rückflug (Abb. 8.26) bei gleichen Windverhältnissen die Fluggeschwindigkeit v_2 über dem Boden sowie die Flugdauer?

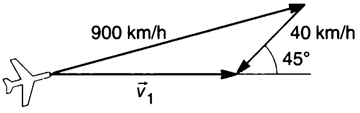


Abb. 8.25

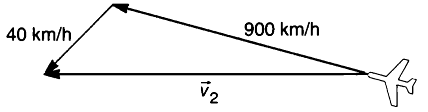


Abb. 8.26

8.29 Zwei Fahrzeuge starten vom gleichen Ort in zwei normal zueinander stehende Richtungen. Ihre mittleren Geschwindigkeiten sind 80 km/h und 110 km/h. Der Lenker des einen Fahrzeugs möchte nun wissen, mit welcher Geschwindigkeit sich das andere Fahrzeug von ihm wegbewegt. (*Hinweis*: Der Vektor der Relativgeschwindigeit ist die Differenz der beiden Geschwindigkeitsvektoren. Gefragt ist sein Betrag.)

8.30 Gegeben ist ein ebenes Kräftesystem, dessen Resultierende hinsichtlich Betrag und Richtung bestimmt werden soll.

a)

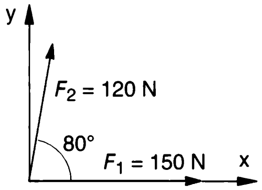


Abb. 8.27

b)

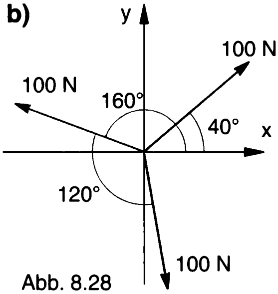


Abb. 8.28

c)

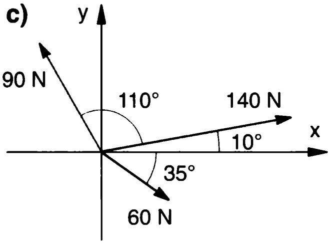


Abb. 8.29

8.2.2 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

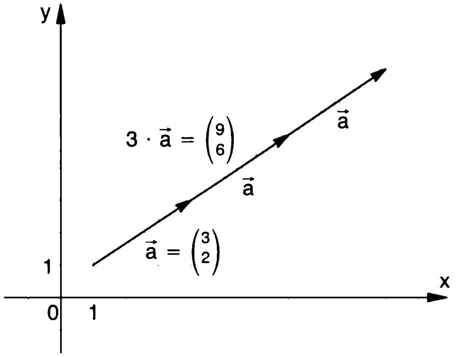


Abb. 8.30 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Unter der Zahl 3 · a verstehen wir die Summe a + a + a. Es ist daher naheliegend, wenn wir unter dem Vektor $3 \cdot \vec{a}$ auch die Summe $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ verstehen. Nach Abb 8.30 erhalten wir $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$, wenn wir die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ mit 3 multiplizieren.

Wir definieren daher allgemein:

> Multiplikation eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ mit einer Zahl (einem Skalar) $k \in \mathbb{R}$:
>
> $$k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Wir halten fest, dass ein den Vektor $3 \cdot \vec{a}$ darstellender Pfeil gleiche Richtung wie ein solcher für $\vec{a}$ hat, jedoch dreimal so lang ist.

Beispiel 8.10 : Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne: **a)** $4 \cdot \vec{a}$; **b)** $(-1) \cdot \vec{a}$; **c)** $(-3) \cdot \vec{a}$.
Veranschauliche die Lösung durch Verschiebungsvektoren im Koordinatensystem.

Lösung

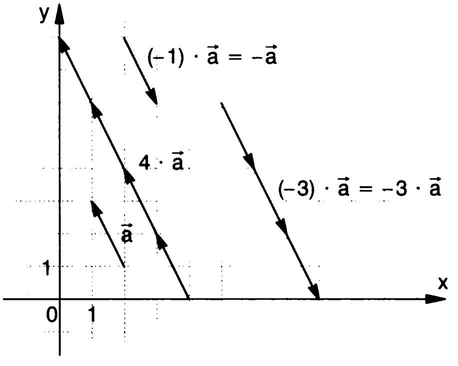


Abb. 8.31 Graphische Veranschaulichung

Zu **a)** $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zu **b)** $(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
Multiplikation mit (–1) hat als Ergebnis den Gegenvektor.

Zu **c)** $(-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
Die Pfeillänge verdreifacht sich, die Richtung ist entgegengesetzt.

Wir können verallgemeinern ($k \neq 0$):

> $k \cdot \vec{a}$ ist $|k|$-mal so lang wie $\vec{a}$.
> $k \cdot \vec{a}$ besitzt gleiche Richtung wie $\vec{a}$ bei $k > 0$, entgegengesetzte Richtung bei $k < 0$.

Jemand rechnet: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$; ist dies richtig? Die Richtigkeit dieser Umformung soll im nächsten Beispiel bestätigt werden.

Beispiel 8.11 : Bestätigung eines einfachen Rechengesetzes

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $k = 2$. Bestätige graphisch das Rechengesetz $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ mit Hilfe von Ortsvektoren.

Lösung

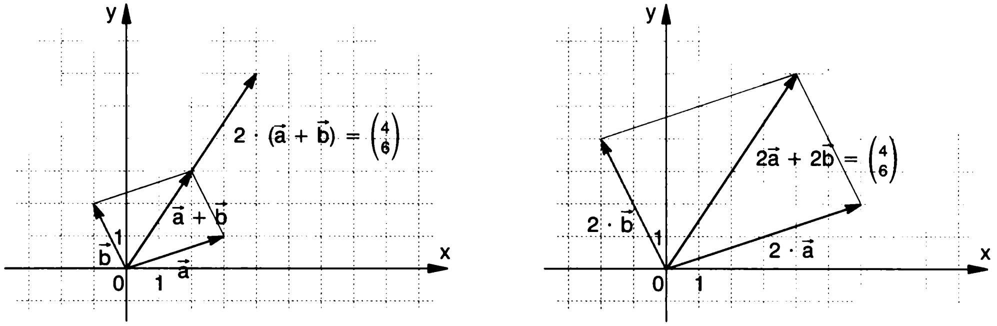


Abb. 8.32 $2 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

Abb. 8.33 $2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

Einheitsvektoren als Richtungsvektoren

Vektoren werden oft verwendet, um Richtungen anzugeben. Dabei ist der Betrag eines solchen Richtungsvektors meist ohne Bedeutung. Fallweise ist es aber günstig, statt des Vektors $\vec{a}$ den entsprechenden Einheitsvektor $\vec{a}_0$ zu verwenden. Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a}_0$ her:

Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so gilt für den Einheitsvektor $\vec{a}_0$: $\boldsymbol{\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}}$.

Beispiel 8.12 : Einheitsvektor eines Vektors

Wie lauten die Koordinaten des Einheitsvektors $\vec{a}_0$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$?

Lösung

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,894\\0,447\end{pmatrix}$.

Beispiel 8.13 : Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

Gegeben ist die Strecke AB durch A (1|5) und B (4|4).

a) Verdopple die Länge der Strecke AB über B hinaus. Wie lauten die Koordinaten des Endpunktes C?

b) Verlängere die Strecke AB über B hinaus um 4 Längeneinheiten. Wie lauten nun die Koordinaten des Endpunktes D?

Lösung

Zu **a)** $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$;

also: C (7|3).

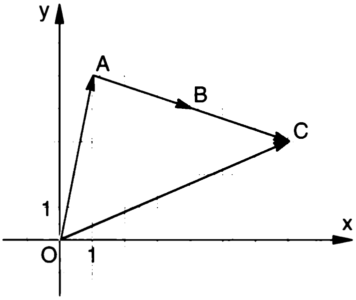


Abb. 8.34

Zu **b)** Wir müssen von B aus das Vierfache des Einheitsvektors von $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4-1\\4-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ abtragen.

Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$ ist wegen

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ der Vektor $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BD} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Damit: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7,79\\2,74\end{pmatrix}$;

also D (7,79|2,74).

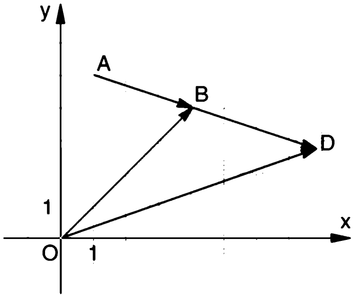


Abb. 8.35

Beispiel 8.14 : Mittelpunkt einer Strecke

Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke PQ, wobei P $(x_1|y_1)$ und Q $(x_2|y_2)$.

Lösung

Wir bestimmen den Vektor $\overrightarrow{OM}$ aus der geschlossenen Vektorkette von O nach P, dann nach M und zurück nach O (Abb. 8.36):

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Daraus: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$.

Aus Abb. 8.36 erkennt man auch unmittelbar, dass $\overrightarrow{OM}$ der Summenvektor von $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{PM}$ ist.

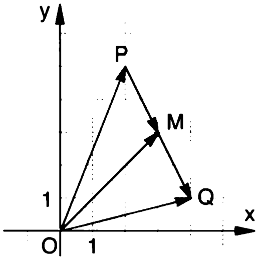


Abb. 8.36 Mittelpunkt einer Strecke

Nun ist $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$. Damit erhalten wir nach

Einsetzen: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$;

Damit: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \middle| \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Ist P(2|5) und Q(4|1), so ist M(3|3).

Beispiel 8.15 : Wirtschaftsmathematische Anwendung

In einer Sandgrube fördert ein Bagger pro Stunde 20 t eines Sandgemisches, das durchschnittlich aus 6 t feinem Sand und 14 t grobem Sand besteht.

Benützen wir die Vektorschreibweise, so können wir einen "Vektor der stündlichen Fördermenge" einführen: $\vec{h} = \binom{6\,t}{14\,t}$, wobei die erste Koordinate von $\vec{h}$ die stündlich geförderte Menge an feinem Sand, die zweite Koordinate jene an grobem Sand bedeuten soll. Wir stellen nun folgende Fragen:

a) Wie lautet der Vektor $\vec{d}$ der täglichen Fördermenge (Tag mit 8 Stunden)?

b) Der Lagerbestand vor Beginn der Tagesförderung bestehe aus 100 t feinem Sand und 50 t grobem Sand. Ermittle den Vektor $\vec{s}$ der Lagermenge am Ende des Tages (es soll an diesem Tag kein Sand wegtransportiert werden).

Lösung

Zu **a)** $8 \cdot 6\,t = 48\,t$ feiner Sand; $8 \cdot 14\,t = 112\,t$ grober Sand; wir können auch schreiben:

$\vec{d} = 8 \cdot \vec{h} = 8 \cdot \binom{6\,t}{14\,t} = \binom{48\,t}{112\,t}$.

Zu **b)** $100\,t + 48\,t = 148\,t$ feiner Sand;
$50\,t + 112\,t = 162\,t$ grober Sand.

In Vektorform geschrieben: $\vec{s} = \binom{100\,t}{50\,t} + \vec{d} = \binom{148\,t}{162\,t}$.

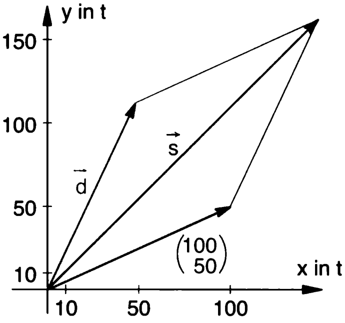


Abb. 8.37

Die Addition kann auch graphisch (Abb. 8.37) geführt werden, wenn wir die auftretenden Vektoren (beispielsweise) als Ortsvektoren veranschaulichen.

Der Vorteil der Vektorrechnung zeigt sich erst, wenn die Vektoren nicht nur 2 Koordinaten haben, sondern bedeutend mehr.

Beispiel 8.16 : Komponenten eines Vektors

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Ermittle die Koordinaten von $\vec{c} = 3\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$.

Lösung

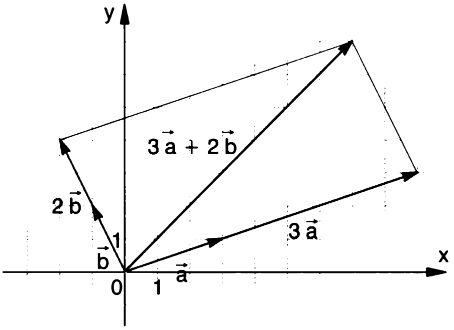


Abb. 8.38

$$\vec{c} = 3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}.$$

Man nennt $3\,\vec{a}$ und $2\,\vec{b}$ **Komponenten** des Vektors $\vec{c}$ bezüglich der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

In Beispiel 8.16 waren die Komponenten von $\vec{c}$ bezüglich $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorgegeben. Eine häufige Aufgabe der Vektorrechnung verlangt aber umgekehrt, einen *gegebenen* Vektor $\vec{c}$ in Komponenten bezüglich $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu "zerlegen"; man spricht auch von der **Zerlegung** eines Vektors in zwei vorgegebene Richtungen (z.B. Zerlegung einer Kraft).

Beispiel 8.17 : Zerlegung eines Vektors in zwei Richtungen

Zerlege den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Lösung

Graphische Lösung:

Man stellt $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch einen Pfeil mit gemeinsamem Anfangspunkt dar; dies erreicht man, wenn man diese Vektoren gleich als Ortsvektoren zeichnet. Durch die Spitze von $\vec{c}$ zieht man je eine Parallele zur Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ergänzt man zu einem Parallelogramm, so geben dessen Seiten die Komponenten von $\vec{c}$ an; diese wurden in Abb. 8.39 mit $k_1 \cdot \vec{a}$ und $k_2 \cdot \vec{b}$ bezeichnet.

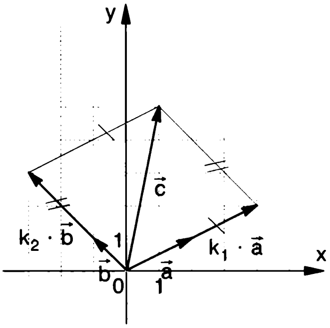


Abb. 8.39

Rechnerische Lösung:

Es muss gelten: $\vec{c} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$, wobei wir nun k_1 und k_2 bestimmen müssen.

$$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2k_1\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-k_2\\k_2\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1 = 2k_1 - k_2 \\ 5 = k_1 + k_2. \end{array}$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die beiden Variablen k_1 und k_2. Um es zu lösen, kann man etwa beide Gleichungen addieren und erhält $6 = 3 \cdot k_1$ und $k_1 = 2$. Setzt man dafür in eine der beiden Gleichungen ein, so ergibt sich $k_2 = 3$.

Wir erhalten somit die Zerlegung $\vec{c} = 2\,\vec{a} + 3\,\vec{b}$.

Aufgaben

8.31 Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechne und veranschauliche durch einen Pfeil:

a) $-2\vec{a}$ **b)** $3\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $2(\vec{b} - 2\vec{a})$

d) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ **e)** $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ **f)** $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

8.32 Welchen Wert hat die unbekannte Koordinate des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 6 \end{pmatrix}$, der gleichgerichtet zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist?

8.33 Im Rhombus ABCD wird die Seite AB halbiert, die Seite AD über D hinaus verdoppelt. Die dabei erhaltenen Punkte sind H bzw. E. Drücke $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{BE}$ und $\overrightarrow{CE}$ durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ aus.

8.34 Sind irgendzwei der folgenden Vektoren parallel (gleich oder entgegengesetzt gerichtet)?
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

8.35 Untersuche, ob das folgende Viereck PQRS ein Trapez ist. Prüfe dabei, ob zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind!

a) P(1|0), Q(6|0), R(6|3), S(2|4) **b)** P(2|–1), Q(5|0), R(5|3), S(2|5)

8.36 Wie lauten die Koordinaten jener beiden Punkte auf der Geraden durch A(–1|7) und B(5|4), die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B?

8.37 Gegeben ist die Strecke AB durch A(1|1) und B(4|3). Verlängere diese Strecke über B hinaus um 3 Längeneinheiten. Wie lauten die Koordinaten des neuen Endpunktes?

8.38 Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte A(1|3), B(6|1) und C(4|5). Wie lauten die Koordinaten des Einheitsvektors $\vec{e}_0$ in Richtung der Winkelsymmetrale des Winkels α?
Hinweis: Sind $\vec{b}_0$ und $\vec{c}_0$ die Einheitsvektoren in Richtung der Seitenvektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ bzw. $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, so ist $\vec{b}_0 + \vec{c}_0$ ein Vektor in der gesuchten Richtung.

8.39 Zerlege den Vektor $\vec{c}$ in Richtung der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und überprüfe die Rechnung durch eine Zeichnung.

a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

8.40 Eine Kugel (Abb. 8.40) vom Gewicht 10 N wird über eine schiefe Ebene nach oben gerollt. Berechne die zu überwindende Hangabtriebskraft $|\vec{Z}|$.

8.41 Ein Körper vom Gewicht G = 50 N ist durch eine Aufhängevorrichtung (Abb. 8.41) befestigt. Welche Kräfte müssen die beiden Stäbe aufnehmen?

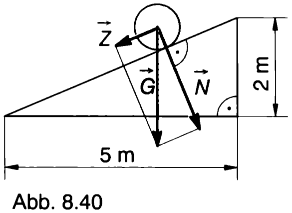


Abb. 8.40

8.42 Ein Beleuchtungskörper vom Gewicht G = 150 N hängt an einem Seil (Abb. 8.42). Welche Kräfte wirken in den Befestigungspunkten A und B, wenn α = 130°?

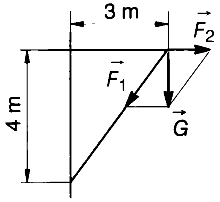


Abb. 8.41

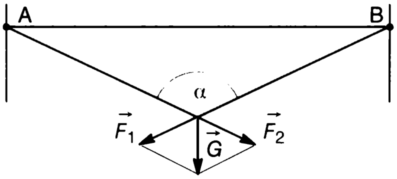


Abb. 8.42

Im Überblick: Vektorrechnung

Eine Zahlenspalte $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ nennt man einen (zweidimensionalen) **Vektor**. Die Zahlen a_x und a_y heißen **Koordinaten** oder **skalare Komponenten** des Vektors.

$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ heißt **Betrag** oder **Länge** von $\vec{a}$. Ist der Betrag eines Vektors gleich 1, so heißt er **Einheitsvektor**.

Die Lage eines Pfeiles *und* der Durchlaufsinn (durch die Pfeilspitze angegeben) bestimmen die **Richtung** des Vektors.

Zwei Vektoren sind **gleich**, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen. In diesem Fall stimmen sie auch in Betrag und Richtung überein.

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$ heißt **Gegenvektor** oder **inverser Vektor** zu $\vec{a}$; er besitzt den gleichen Betrag wie $\vec{a}$, ist aber entgegengesetzt gerichtet.

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ heißt **Ortsvektor** des Punktes P (x|y).

Vektoren werden koordinatenweise **addiert**.

Die Vektoraddition kann bei *Verschiebungsvektoren* durch eine **Vektorkette** veranschaulicht werden. Eine Vektorkette ist genau dann **geschlossenen**, wenn die Summe der Vektoren der Nullvektor ist.

Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer Zahl k: $k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a_x \\ k\,a_y \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{a}$ ist $|k|$-mal so lang wie $\vec{a}$ und besitzt gleiche Richtung wie $\vec{a}$ bei $k > 0$, entgegengesetzte Richtung bei $k < 0$.

Einheitsvektor $\vec{a}_0$ **in Richtung des Vektors** $\vec{a}$: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

$\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$ (wobei $m, n \in \mathbb{R}$): **Zerlegung** des Vektors $\vec{c}$ in zwei vorgegebene Richtungen $\vec{a}$, $\vec{b}$; $m \cdot \vec{a}$ und $n \cdot \vec{b}$ heißen **Komponenten** des Vektors $\vec{c}$ bezüglich der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

9 Stereometrie

Die Stereometrie befasst sich mit der Berechnung von Längen (Kanten, Diagonalen, usw.), Winkeln, besonders aber von Oberflächen und Rauminhalten **geometrischer Körper**. Der "Rauminhalt" oder das "Volumen", Formelzeichen V, ist ein Maß für den vom Körper ausgefüllten Raum. Als Volumseinheit ist das Kubikmeter (m^3) festgelegt. Im Folgenden wird kurz auf die wichtigsten Grundkörper eingegangen.

9.1 **Prisma und Zylinder** (Körper mit gleichbleibendem Querschnitt)

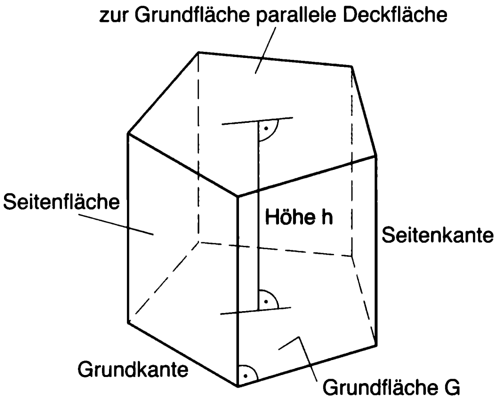


Abb. 9.1 Gerades Prisma

Ein **Prisma** wird von zwei kongruenten und zueinander parallelen Vielecken als Grundfläche und Deckfläche sowie von Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt. Stehen die Seitenflächen normal zur Grundfläche, so liegt ein **gerades** Prisma vor (Abb. 9.1). In diesem Fall stehen die Seitenflächen normal auf der Grundfläche. Ist dies nicht der Fall, so spricht man auch von einem **schiefen** Prisma.

Für *jedes* Prisma gilt:

Volumen $\mathbf{V = G \cdot h}$
"Grundfläche G mal Höhe h"

Dass diese Formel auch für ein *schiefes* Prisma gilt, lässt sich folgendermaßen verständlich machen. In Abb. 9.2 ist ein gerades, rechteckiges Prisma in viele dünne Platten zerschnitten. Durch Verschiebung der Platten im Raum entsteht ein Körper, dessen Volumen sich dabei nicht ändert. Bei abnehmender Plattendicke wird der treppenförmige Körper immer mehr zu einem glatten schiefen Prisma, das somit inhaltsgleich dem geraden Prisma ist.

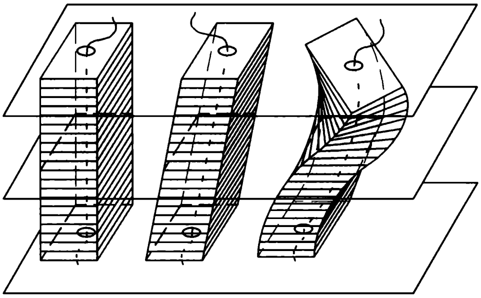


Abb. 9.2 Zum Satz von Cavalieri

Wir haben an einem einfachen Beispiel den sogenannten **Satz von Cavalieri**[14], einen grundlegenden Satz der Stereometrie, veranschaulicht. Er lautet:

Wenn zwei Körper in gleicher Höhe stets flächengleiche Querschnitte haben, so ist auch ihr Volumen gleich.

---

[14] Bonaventura CAVALIERI, ital. Mathematiker, 1598 – 1647.

Quader und **Würfel** (Abb. 9.3) sind Sonderfälle gerader Prismen:

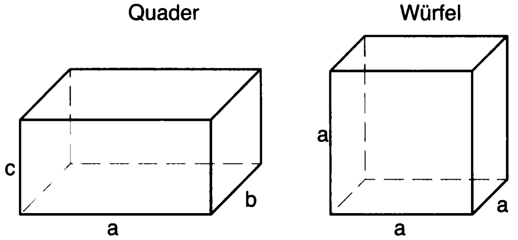


Abb. 9.3 Quader und Würfel

Quader:
Volumen **$V = a \cdot b \cdot c$**
Oberfläche **$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$**

Würfel:
Volumen **$V = a^3$**
Oberfläche **$O = 6 \cdot a^2$**

Beispiel 9.1 : Würfel und Quader

Ein Bleiwürfel (Dichte $\varrho = 11{,}3\text{ kg/dm}^3$) der Masse 18,3 kg wird in einen 14,0 cm langen und 12,0 cm breiten Quader umgegossen. Berechne

a) die Länge a der Würfelkante;

b) die Höhe c des Quaders.

Lösung

Zu **a)** $m = \varrho \cdot V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\varrho} = \frac{18{,}3\text{ kg}}{11{,}3\text{ kg/dm}^3} = 1{,}62\text{ dm}^3.$

$V = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{V} = 1{,}17\text{ dm}.$

Zu **b)** $V = abc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{1{,}62\text{ dm}^3}{1{,}40\text{ dm} \cdot 1{,}20\text{ dm}} = 0{,}964\text{ dm} = 9{,}64\text{ cm}.$

Beispiel 9.2 : Gerades Prisma

Auf waagrechtem Gelände ist ein Bahndamm der Höhe h = 3,0 m und der oberen Breite c = 6,5 m aufzuschütten. Die Neigung der Böschungsfläche beträgt 1 : 1,5. Berechne das Volumen V des Bahndammes pro 1 m Länge.

Lösung

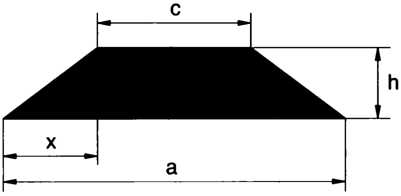


Abb. 9.4

Der Bahndammkörper ist ein gerades Prisma mit einem gleichschenkligen Trapez als Grundfläche. Da die Neigung (Steigung) gleich der Höhenzunahme durch die dazugehörige waagrechte Distanz ist, folgt:

$\frac{h}{x} = \frac{1}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5 \cdot h = 4{,}5\text{ m}.$

Daher: $a = 2x + c = 15{,}5\text{ m}.$

Die Trapezfläche beträgt $A = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{15{,}5\text{ m} + 6{,}5\text{ m}}{2} \cdot 3\text{ m} = 33\text{ m}^2.$

Schließlich: $V = A \cdot 1\text{ m} = 33\text{ m}^3.$

Beispiel 9.3 : Schiefes Prisma

Berechne das Volumen des schiefen Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nach Abb. 9.5, wobei a = 24,3 cm, s = 53,0 cm und der Neigungswinkel α der Seitenkanten zur Grundfläche 72° beträgt.

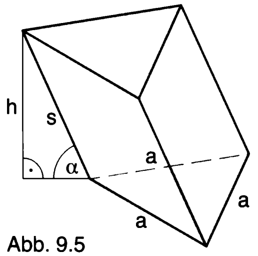


Abb. 9.5

Lösung

$\sin\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin\alpha = 50{,}4\text{ cm};$

$V = G \cdot h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h = 12{,}9\text{ dm}^3.$

Einen Körper mit zwei kongruenten und parallelen Kreisflächen als Grund- und Deckfläche nennt man **Kreiszylinder**. Er heißt **gerader** Kreiszylinder (Abb. 9.6) oder **Drehzylinder**, wenn die Zylinderachse (= Gerade durch die Kreismittelpunkte) normal zur Grundfläche ist, sonst **schiefer** Kreiszylinder. Der Abstand von Grund- und Deckfläche heißt Zylinderhöhe h.

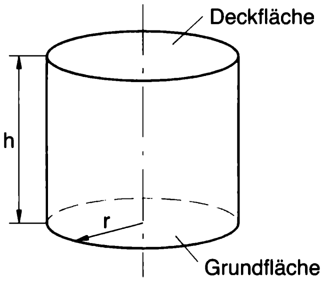


Abb. 9.6 Gerader Kreiszylinder oder Drehzylinder

Wie beim Prisma gilt für jeden Kreiszylinder:

Volumen $\mathbf{V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h}$
"Grundfläche G mal Höhe h"

Dies lässt sich beim geraden Kreiszylinder leicht verständlich machen, wenn man diesem ein regelmäßiges Prisma einschreibt. Der Zylinder wird umso besser durch das Prisma ausgefüllt, je höher die Eckenanzahl der Grundfläche des Prismas ist.

Mit Hilfe des Satzes von Cavalieri ergibt sich daraus auch die Behauptung für den schiefen Zylinder.

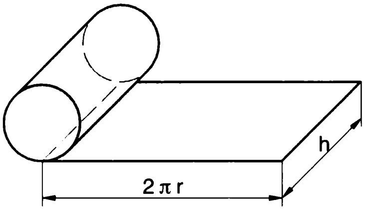


Abb. 9.7 Abwicklung des Zylindermantels

Abb. 9.7 zeigt die Abwicklung des Mantels eines geraden Kreiszylinders in die Ebene: man erhält ein Rechteck mit den Seiten 2 π r und h. Somit gilt für die Mantelfläche M sowie für die Oberfläche O (letzteres nach Herausheben gemeinsamer Faktoren) des geraden Kreiszylinders:

$$\mathbf{M = 2\pi r \cdot h}$$
$$\mathbf{O = M + 2 \cdot G = 2\pi r \cdot (h + r)}$$

Künftig soll der gerade Kreiszylinder (Drehzylinder) kurz Zylinder genannt werden.

Versieht man einen Zylinder mit einer konzentrischen Bohrung (Abb. 9.8), so entsteht ein **Hohlzylinder**. Sein Volumen ist einfach die Differenz der Rauminhalte des äußeren und inneren Zylinders:

$V = \pi R^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h$ oder

$$\mathbf{V = \pi h (R^2 - r^2)}$$

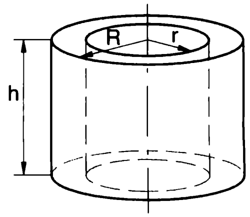


Abb. 9.8 Hohlzylinder

Beispiel 9.4 : Zylinderberechnung mit einer Genauigkeitsbetrachtung

Berechne Volumen, Mantel und Oberfläche eines Zylinders mit dem Durchmesser d = 30 cm und der Höhe h = 16 cm.

Lösung

$V = \pi r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h = \frac{\pi}{4}\, 30^2 \cdot 16\ \text{cm}^3 = 11\,309{,}\ldots\ \text{cm}^3 \approx 11\,300\ \text{cm}^3.$

Sind die Längen d und h millimetergenau angegeben (also d = 30,0 cm und h = 16,0 cm), so liegen drei geltende Ziffern vor; folglich kann auch das Volumen nur mit drei geltenden Ziffern angegeben werden (siehe Seite 111). Dies kommt jedoch bei Verwendung der Einheit "cm^3" nicht klar zum Ausdruck, wohl jedoch bei Verwendung der Einheit "dm^3".

Somit schreiben wir: $V = 11{,}3\ \text{dm}^3$.

Es wird ferner erinnert (siehe Seite 101), dass in der Regel bei technischen Berechnungen nur drei bis höchstens vier geltende Ziffern sinnvoll sind.

$M = 2\pi \frac{d}{2} \cdot h = 2\pi \cdot 15 \cdot 16\ \text{cm}^2 = 1\,507{,}\ldots\ \text{cm}^2 \approx 15{,}1\ \text{dm}^2;$

$O = 2\pi \cdot \frac{d}{2}\,(h + \frac{d}{2}) = 2\pi \cdot 15 \cdot (16 + 15)\ \text{cm}^2 = 2921{,}\ldots\ \text{cm}^2 \approx 29{,}2\ \text{dm}^2.$

Beispiel 9.5 : Hohlzylinder

Können 600 Stahlrohre ($\varrho = 7{,}85\ \text{kg/dm}^3$) von 3 m Länge, einem Außendurchmesser von 40 mm und 2,5 mm Wandstärke mit einem LKW von 5 t Ladekapazität befördert werden?

Lösung

Ein Stahlrohr ist ein Hohlzylinder mit R = 20 mm, r = 20 mm – 2,5 mm = 17,5 mm und h = 3 m.

$V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi \cdot 3000 \cdot (20^2 - 17{,}5^2)\ \text{mm}^3 =$
$= 883\,572{,}\ldots\ \text{mm}^3 \approx 884\ \text{cm}^3 = 0{,}884\ \text{dm}^3.$

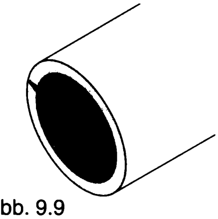


Abb. 9.9

$m = \varrho \cdot V = 7{,}85\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 0{,}883\ldots\ \text{dm}^3 = 6{,}936\ldots\ \text{kg} \approx 6{,}94\ \text{kg}.$

600 Rohre haben eine Masse $600 \cdot 6{,}936\ldots\ \text{kg} \approx 4{,}2$ t. Die Ladekapazität reicht aus.

Hinweis: Die numerischen Berechnungen erfolgen bis zum letzten Ergebnis mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit! Zwischenergebnisse können zur besseren Übersicht angeschrieben werden, sie werden jedoch nicht in den Taschenrechner eingetippt!

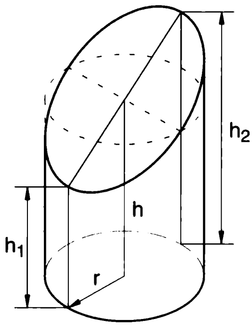


Abb. 9.10 Schief abgeschnittener Zylinder

Wird vom **schief abgeschnittenen Zylinder** in Abb. 9.10 der über h hinausgehende Teil weggenommen und links angesetzt, so entsteht ein Zylinder mit der Höhe h. Dabei ist h die "mittlere" Höhe:

$h = \frac{1}{2}\,(h_1 + h_2).$

Somit gelten für den schief abgeschnittenen Zylinder mit dieser Höhe h die Zylinderformeln:

Schief abgeschnittener Zylinder

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V} &= \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r^2 \cdot h} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r \cdot h} \end{aligned}\right\}\ \text{mit } h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$$

Beispiel 9.6 : Schief abgeschnittener Zylinder

Berechne den Materialbedarf für das in Abb. 9.11 dargestellte beidseitig offene Blechrohr mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d = 30 cm).

Lösung

Das Rohr setzt sich aus drei schief abgeschnittenen Zylindern zusammen; wir berechnen seine Mantelfläche:

$M_1 = 2\pi \cdot 15 \cdot \frac{45+39}{2}\ \text{cm}^2;$

$M_2 = 2\pi \cdot 15 \cdot \frac{55+55}{2}\ \text{cm}^2;$

$x\ = 45\ \text{cm} - 39\ \text{cm} = 6\ \text{cm};$

$M_3 = 2\pi \cdot 15\ \text{cm} \cdot \frac{35\ \text{cm}\ +\ (35\ \text{cm} + x)}{2};$

$M\ = M_1 + M_2 + M_3 = 12723{,}...\ \text{cm}^2 \approx 127\ \text{dm}^2.$

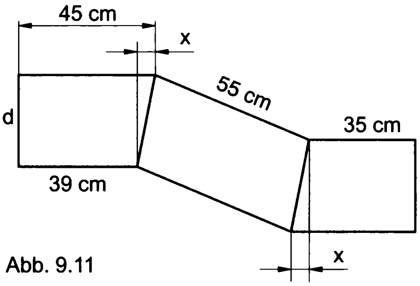


Abb. 9.11

Aufgaben

9.1 Ein Würfel hat die Masse 2,00 kg. Berechne seine Kantenlänge, wenn er aus

- **a)** Eisen (ϱ = 7,87 kg/dm^3)
- **b)** Gold (ϱ = 19,3 kg/dm^3)
- **c)** Kork (ϱ = 0,25 kg/dm^3)
- **d)** Aluminium (ϱ = 2,70 kg/dm^3)
- **e)** trockenem Fichtenholz (ϱ = 0,47 kg/dm^3)
- **f)** Kupfer (ϱ = 8,93 kg/dm^3) besteht.

9.2 Blattgold kann so dünn ausgeschlagen werden, dass es eine Stärke von 0,1 μm besitzt. Welche Masse besitzt ein quadratisches Blattgoldstück der Seitenlänge 10 cm?

9.3 Die Raumdiagonale eines Würfels beträgt 20 cm. Berechne die Würfeloberfläche.

9.4 Berechne die Massen der Formstücke aus Stahl (ϱ = 7,85 kg/dm^3) mit den Querschnitten wie in Abb. 4.18 bzw. 4.19 auf Seite 120 und der Länge 1 m.

9.5 Berechne den Inhalt des umbauten Raumes (Maße in m) in Abb. 9.12.

9.6 Berechne Volumen und Oberfläche des Keils in Abb. 9.13 (Maße in cm).

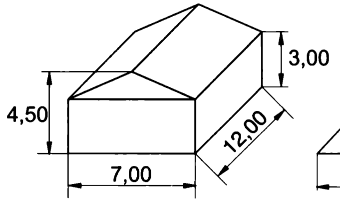


Abb. 9.12

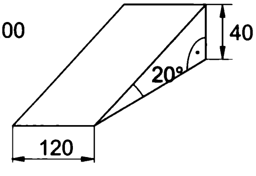


Abb. 9.13

9.7 Berechne die Rauminhalte der Werkstücke (Maße in cm)

a)

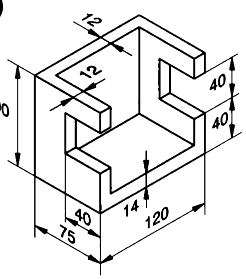


Abb. 9.14

b)

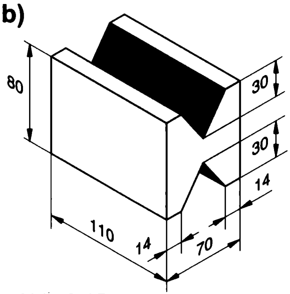


Abb. 9.15

c)

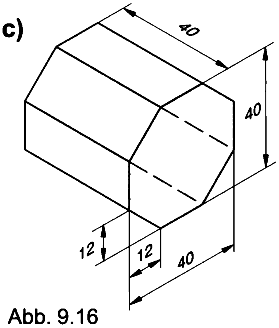


Abb. 9.16

9.8 Berechne die Masse eines **a)** Dreikantstahls **b)** Vierkantstahls **c)** Sechskantstahls (ϱ = 7,85 kg/dm^3) mit der Kantenlänge 12 mm und der Höhe 180 mm.

9.9 Wie lang muss ein 10 cm starkes Brett aus Fichtenholz (ϱ = 0,60 kg/dm^3) von 60 cm Breite mindestens sein, damit es eine Person von 65 kg tragen kann?
Hinweis: Das Gewicht des vom vollständig eingetauchten Brett verdrängten Wasservolumens ist gleich dem Gewicht von Person und Brett.

9.10 Ein Spiegel hat die Form eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seite 30 cm. Berechne seine Masse, wenn er aus 5 mm starkem Glas (ϱ = 2,5 kg/dm^3) hergestellt ist?

9.11 Die Kantenlängen a, b und c eines Quaders stehen im Verhältnis 1 : 2 : 5, d.h. a : b = 1 : 2 und b : c = 2 : 5. Berechne Volumen V und Oberfläche O, wenn a = 6 cm gegeben ist.

9.12 Ein Schwimmbecken ist 10 m breit. Abb. 9.17 zeigt den Längsschnitt. Es soll bis 30 cm unter dem Beckenrand mit Wasser gefüllt werden. Wie viel Wasser muss zugeleitet werden?

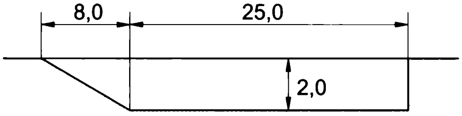


Abb. 9.17

9.13 Der Querschnitt eines 12,5 m breiten Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez; er besitzt die Böschungsneigung (Verhältnis von Tiefe zu Böschungsbreite) 1 : 1,4 und eine Tiefe von 2,3 m. Wie groß ist die Wassermenge je 100 m Kanallänge, wenn die Wasserstandshöhe 2 m ist?

9.14 Abb. 9.18 zeigt den Querschnitt eines Eisenbahndammes auf einer schiefen Geländeebene. Wie viel Aufschüttungsmaterial wird zur Errichtung des Dammes pro 1 m Länge gebraucht?

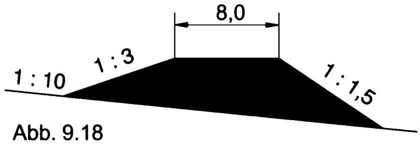


Abb. 9.18

9.15 Zwei chemische Tanks (Abb. 9.19) mit quadratischer Grundfläche (Seitenlängen 2 m und 3 m) sind am Boden durch eine Rohrleitung miteinander verbunden. Sie werden mit 20 hl Flüssigeit gefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit?

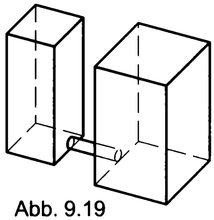


Abb. 9.19

9.16 Ein Vierkantstahl (Abb. 9.20, Maße in mm) wird durch einen 4 mm breiten Schnitt geteilt. Berechne die Volumen der beiden Teile.

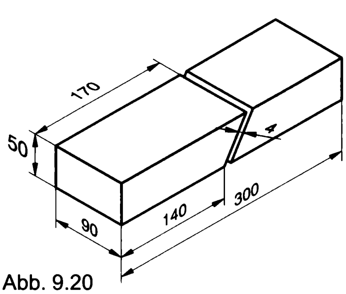


Abb. 9.20

9.17 Berechne den Mantel, die Oberfläche und das Volumen eines Drehzylinders, wenn dessen Radius r = 20 cm und dessen Höhe h = 60 cm ist.

9.18 Die beim Eishockey verwendete zylindrische Scheibe ("Puck") aus Hartgummi (ϱ = 1,8 kg/dm^3) hat einen Durchmesser von 3" und eine Höhe von 1" (1" = 1 Zoll = 2,54 cm). Berechne ihre Masse!

9.19 Ein Zylinder heißt gleichseitig, wenn sein Durchmesser gleich der Zylinderhöhe ist. Berechne den Durchmesser eines gleichseitigen Zylinders, wenn V = 1 m^3 ist.

9.20 Ein zylindrisches Messglas besitzt eine lichte Weite (Innendurchmesser) d = 30 mm. In welchen Abständen sind Teilstriche für je 1 ml anzubringen?

9.21 Eine Rolle Kupferdraht ($\varrho = 8{,}9$ kg/dm^3) hat die Masse 34,4 kg. Welche Länge hat der Draht auf der Spule, wenn der Drahtdurchmesser 3 mm ist?

9.22 Zwei durch einen Kolben abgeschlossene Zylinder mit den Durchmessern 18,0 cm und 5,8 cm sind durch eine Rohrleitung miteinander verbunden. Berechne den Kolbenhub *H* des größeren Zylinders, wenn mit dem Kolben des kleineren Zylinders mit einem Hub von 9,2 cm Flüssigkeit in den größeren Zylinder gedrückt wird.

9.23 Aus einem Rohr mit dem Innendurchmesser d = 100 mm fließt mit 0,5 m/s Wasser in ein Becken. Wie viel Wasser wird in 1 h zugeführt?

9.24 Aus einem Rechteck mit den Seiten 100 mm und 50 mm wird durch Zusammenrollen der Mantel eines Zylinders gebildet. Berechne dessen Inhalt! (2 Lösungen)

9.25 Ein zylindrisches Gefäß ist einseitig durch einen Kolben abgeschlossen. Durch Ausdehnung eines im Gefäß enthaltenen Gases erhöht sich das Zylindervolumen um 280 cm^3. Berechne den Kolbenhub *h*, wenn der Durchmesser des Zylinders 82 mm ist.

9.26 Ein Eisenrohr ($\varrho = 7{,}87$ kg/dm^3) hat einen äußeren Durchmesser von 15 cm, eine Wandstärke von 10 mm und eine Länge von 4 m. Berechne seine Masse.

9.27 Abb. 9.21 zeigt den Querschnitt einer Abflussrinne aus Beton. Berechne den Betonbedarf pro Laufmeter (Maße in mm).

9.28 Berechne die Masse einer Messingbuchse ($\varrho = 8{,}5$ kg/dm^3) in Abb. 9.22 (Maße in mm).

9.29 Berechne den Materialbedarf des knieförmigen Rohrstücks mit kreisförmigem Querschnitt (Maße in cm) in Abb. 9.23.

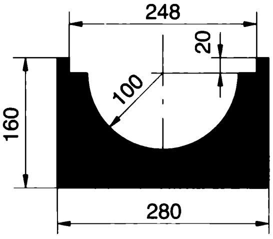


Abb. 9.21

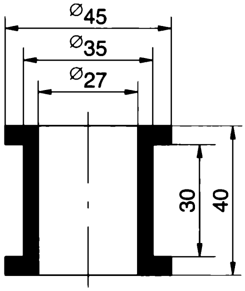


Abb. 9.22

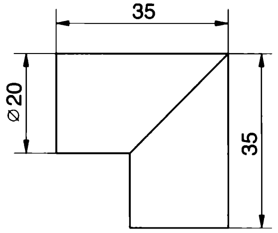


Abb. 9.23

9.30

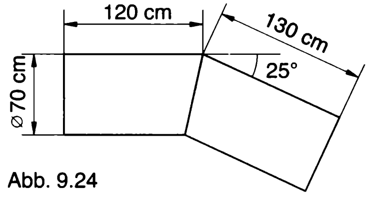


Abb. 9.24

Berechne den Materialbedarf für das in Abb. 9.24 dargestellte beidseitig offene Blechrohr. Welcher Rauminhalt wird eingeschlossen?

9.31 Ein schief abgeschnittener Quader mit quadratischer Grundfläche erhält eine zentrische Bohrung vom Durchmesser d (Abb. 9.25). Berechne das verbleibende Volumen zuerst allgemein und dann für a = 35 mm, h = 50 mm und d = 13 mm.

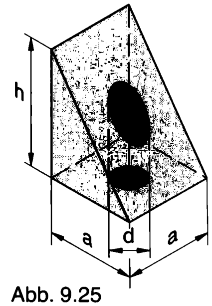


Abb. 9.25

9.32 Durch eine Mauer wird

a) ein Belüftungsschacht errichtet, dessen normal zur Schachtrichtung genommener Querschnitt kreisförmig ist (Abb. 9.26). Berechne die dabei entstehende Innenfläche des Schachtes.

b) Führe die Berechnung durch, wenn der normal zur Schachtrichtung genommene Querschnitt quadratisch mit waagrechter unterer Seite der Länge 20 cm ist.

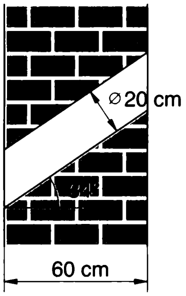


Abb. 9.26

9.33 Berechne den Materialbedarf für die Schutzhaube in Abb. 9.27 (Maße in mm).

9.34 Berechne die Masse des Tonnengewölbes in Abb. 9.28 mit der Weite s = 5,50 m, der Pfeilhöhe p = 1,10 m, der Stärke d = 0,64 m und der Länge l = 6,2 m. Als Dichte des Mauerwerks kann $\varrho = 2{,}3\ \mathrm{kg/dm^3}$ genommen werden.

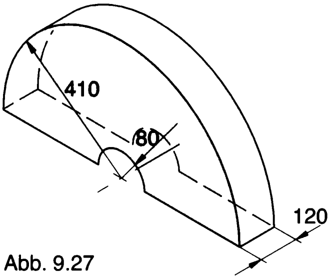


Abb. 9.27

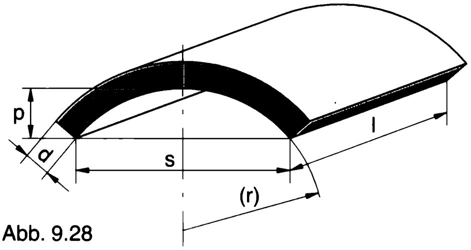


Abb. 9.28

9.35 Ein Quader (Abb. 9.29) besitzt die Kanten a = 680 mm, b = 350 mm und c = 160 mm. Wie lang ist die kürzeste an der Oberfläche verlaufende Verbindung zwischen A und B?

Anmerkung: Die Aufgabe lässt sich bei geschickter Vorgangsweise rasch lösen!

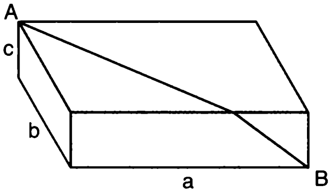


Abb. 9.29

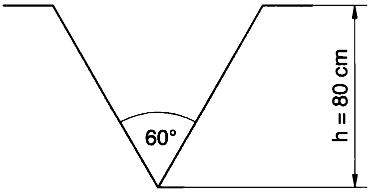


Abb. 9.30

9.36 Ein zylindrischer Wassertank hat einen Durchmesser von 10 m. Er wird durch eine Rinne (Abb. 9.30) mit dreieckförmigem Querschnitt, in der die Wasserhöhe $\frac{3}{4}$ der Höhe h des Querschnitts beträgt, gespeist. Die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers beträgt $0{,}5\ \mathrm{ms^{-1}}$.

a) Wie viel Liter Wasser befinden sich auf einer Länge von 1 m der Rinne?

b) Welche Wasserhöhe wird im Tank erreicht, wenn das Wasser eine Stunde zufließt?

9.2 **Pyramide und Kegel** (spitze Körper)

Die Grundfläche G einer **Pyramide** ist ein Vieleck, die Seitenflächen sind Dreiecke mit gemeinsamer Spitze S. Der Abstand der Spitze S von der Grundfläche G heißt Höhe h.

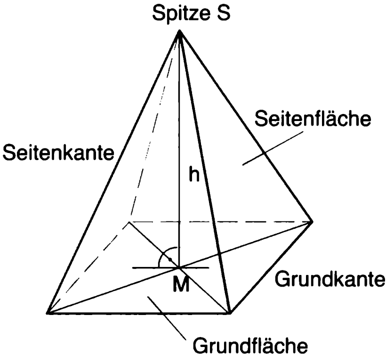


Abb. 9.31 Quadratische gerade Pyramide

Eine Pyramide heißt **regelmäßig**, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und die Pyramidenspitze S senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundfläche liegt. Man spricht dann auch von einer **geraden** Pyramide.

Das Volumen einer Pyramide ist gleich einem Drittel des Produktes aus Grundfläche G und Höhe h:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G\,h}$$

Diese Behauptung gilt für *jede* Pyramide, auch für eine **schiefe** Pyramide; sie soll an einem Sonderfall überprüft werden:

Ein Würfel mit der Kantenlänge a lässt sich in sechs volumsgleiche Pyramiden zerlegen; das Volumen V einer solchen Pyramide ist daher $V = \frac{1}{6}\,a^3$. Für ihre Grundfläche G und Höhe h gilt:

$G = a^2$ und $h = \frac{a}{2}$.

Daher: $V = \frac{1}{6}\,a^3 = \frac{1}{3}\,a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \cdot G\,h$.

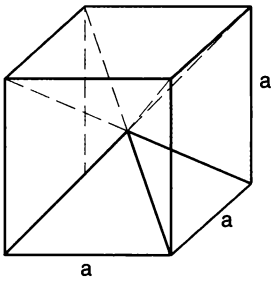


Abb. 9.32 Zerlegung eines Würfels in sechs Pyramiden

Beispiel 9.7 : Gerade quadratische Pyramide

Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man die Grundkante a = 30 cm und die Höhe h = 40 cm. Berechne

a) das Volumen V, die Seitenkante s sowie die Oberfläche O;

b) den Neigungswinkel α zwischen Seitenfläche und Grundfläche;

c) den Neigungswinkel β zwischen Seitenkante und Grundfläche.

Lösung

Zu **a)** $V = \frac{1}{3}\,a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 40\ \text{cm}^3 = 12000\ \text{cm}^3 = 12{,}0\ \text{dm}^3$.

Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf das Dreieck SMF und auf das Dreieck BFS ergibt:

$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 42{,}7$ cm;

$s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{42{,}72...^2 + 15^2}$ cm $= 45{,}3$ cm.

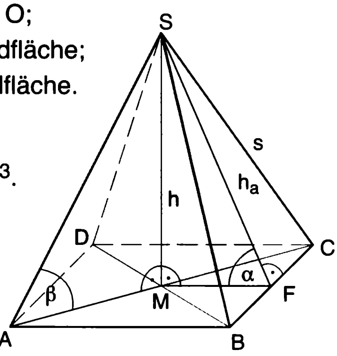


Abb. 9.33

Hinweis: Man könnte h_a und s auch mit Hilfe von Kreisfunktionen berechnen.

Berechnung des Inhaltes A einer Seitenfläche und der Oberfläche O:

$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{30 \cdot 42,72...}{2}\,\text{cm}^2 = 640,80...\,\text{cm}^2 \approx 6,41\,\text{dm}^2;$

$O = G + 4 \cdot A = 34,6\,\text{dm}^2.$

Zu **b)** Dreieck SMF: $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{40}{15} \Rightarrow \alpha = 69,4°.$

Zu **c)** Dreieck SAM: $\sin\beta = \frac{h}{s} = \frac{40}{45,27...} \Rightarrow \beta = 62,1°.$

Beispiel 9.8 : Schiefe Pyramide

Ein waagrecht liegendes rechteckiges Flächenstück ABCD wird nach Abb. 9.34 pyramidenförmig überdacht. Die Seitenfläche DCS steht dabei senkrecht zur Grundfläche. Berechne

a) den Inhalt des umschlossenenen Raumes,

b) die Neigungswinkel α und β der Seitenkanten,

wenn a = 8,4 m, b = 6,2 m und h = 3,8 m ist.

Lösung

Zu **a)** $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h = 66,0\,\text{m}^3.$

Zu **b)** Dreieck FCS: $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a} = 0,905 \Rightarrow \alpha = 42,1°;$

Dreieck BCF: $x = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 7,49\,\text{m};$

Dreieck BFS: $\tan\beta = \frac{h}{x} = 0,507 \Rightarrow \beta = 26,9°.$

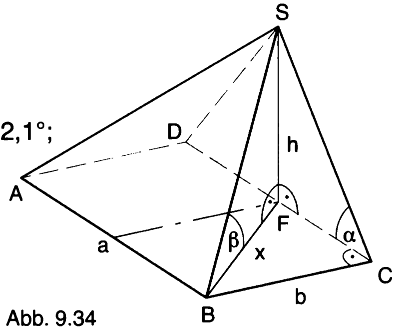


Abb. 9.34

Denkt man sich die Anzahl der Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide über alle Grenzen wachsend, so entsteht ein **(Kreis-)Kegel**. Seine Grundfläche ist ein Kreis; liegt die Kegelspitze S (Abb. 9.35) senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises, so spricht man von einem **geraden Kreiskegel** (auch **Drehkegel** oder kurz **Kegel**), sonst von einem **schiefen** Kegel. Der Abstand der Spitze S von der Grundfläche G heißt Höhe h.

Wie bei der Pyramide ist das Volumen eines Kegels gleich einem Drittel des Produktes aus Grundfläche $G = \pi r^2$ und Höhe h:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h}$$

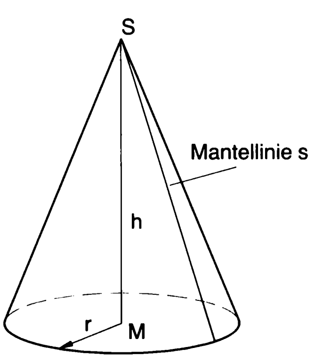


Abb. 9.35 Gerader Kreiskegel

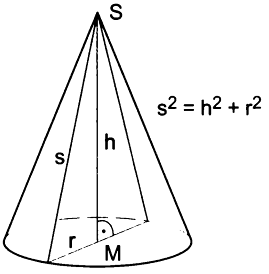


Abb. 9.36 Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels

Einen **Achsenschnitt** erhält man, wenn man den Kegel mit einer Ebene schneidet, in der die *Kegelachse* liegt. Die Kegelachse ist die Gerade durch die Kegelspitze S und den Kreismittelpunkt M. Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels (Abb. 9.36) ist ein gleichschenkliges Dreieck.

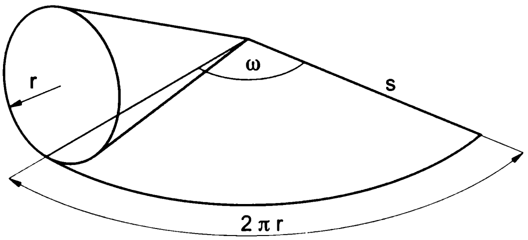


Abb. 9.37 Mantel eines geraden Kreiskegels

Der Mantel eines geraden Kreiskegels lässt sich in die Ebene abwickeln (Abb. 9.37). Man erhält einen Kreisausschnitt mit dem Radius gleich der Mantellinie s, dem Zentriwinkel (Mantelöffnungswinkel) ω und der Bogenlänge $b = 2\pi r$. Da die Fläche eines Kreisausschnitts gleich $\frac{1}{2} \cdot bs$ ist (siehe Seite 158), gilt: $M = \frac{1}{2}\, 2\pi rs = \pi rs$. Für die Oberfläche O muss noch der Inhalt der Grundfläche πr^2 addiert werden.

Zusammengefasst lauten die wichtigsten Formeln für den geraden Kreiskegel:

Gerader Kreiskegel

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $M = \pi rs$; $O = \pi r(r + s)$; $s^2 = h^2 + r^2$; $\omega = \frac{r}{s} \cdot 360°$

Aufgaben

9.37 Eine gerade quadratische Pyramide hat die Höhe 25 cm und das Volumen 3,2 dm^3. Berechne

- **a)** die Grundkante, die Seitenkante sowie die Oberfläche;
- **b)** den Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche;
- **c)** den Neigungswinkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche.

9.38 Eine regelmäßige dreiseitige Pyramide hat das Volumen 72 cm^3 und die Grundkante 5,8 cm. Berechne

- **a)** die Höhe, die Seitenkante sowie die Oberfläche O;
- **b)** den Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche;
- **c)** den Neigungswinkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche.

9.39 Ein Vierkantstahl wird nach Abb. 9.38 an der Stirnseite abgeflacht. Berechne den anfallenden Materialverlust, wenn a = 15 mm.

9.40 Ein Turmdach hat die Form einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide mit der Höhe 4 m und der Grundkante 2 m. Es soll mit Kupferblech belegt werden. Berechne den Blechbedarf, wenn ein Verschnitt von 10 % geschätzt wird.

9.41 Berechne den umbauten Raum des Walmdaches in Abb. 4.92, Seite 147.

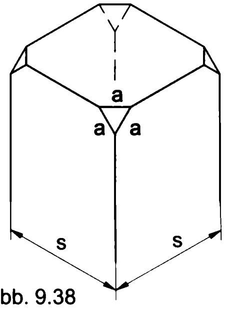


Abb. 9.38

9.42 Berechne den Dachraum eines Walmdachs (Abb. 9.39) mit den Seiten a und b sowie den Dachneigungen α und β zuerst allgemein und dann für $a = 18$ m, $b = 15$ m, $\alpha = 50°$ und $\beta = 45°$.

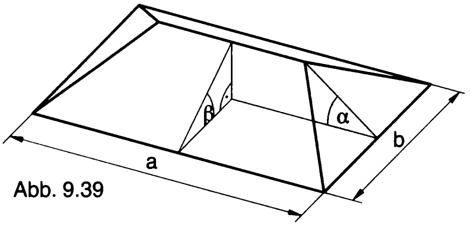


Abb. 9.39

9.43 Berechne das Volumen des Körpers in Aufgabe 4.71, Seite 147.

9.44 Ein Oktaeder (Achtflach) ist eine "Doppelpyramide", die aus 8 gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Berechne allgemein sein Volumen und seine Oberfläche, wenn die Seitenkante a ist.

9.45 Eine rechteckige Baugrube (Abb. 9.40) mit $a = 15$ m und $b = 12$ m (am Boden der Grube gemessen) und der Tiefe 2,5 m soll ausgehoben werden. Dabei werden alle Seitenflächen im Verhältnis 2,5 : 1,5 abgeböscht, d.h. die Seitenflächen haben zum Grubenboden eine Steigung von 2,5 : 1,5. Berechne die Aushubmenge. Wie groß ist der Fehler, wenn man dafür die Näherungsformel $V = Q \cdot h$ benützt, wobei Q den Querschnitt in halber Tiefe bedeutet?

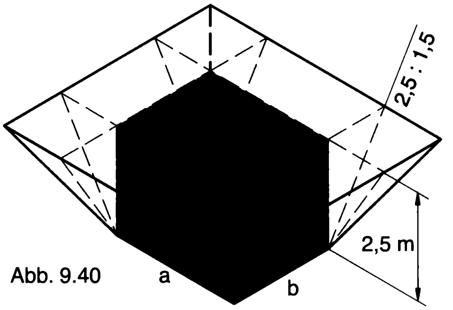


Abb. 9.40

9.46 Ein Stahlmesser ($\varrho = 7{,}85$ kg/dm^3) hat die Form eines Körpers nach Abb. 9.41. Berechne seine Masse, wenn $a = 15$ cm, $b = 18$ cm und $c = 10$ cm ist. Die Schneide CD ist parallel zu AB.

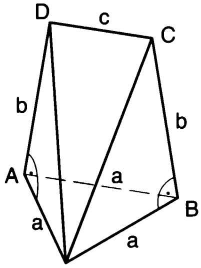


Abb. 9.41

9.47 Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 8$ cm und $b = 15$ cm wird um die längere Kathete gedreht. Berechne das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Kegels sowie den Zentriwinkel des in die Ebene abgewickelten Mantels.

9.48 Ein halbkreisförmiges Blech von 20 cm Durchmesser wird zu einem Kegel gebogen. Berechne das Kegelvolumen.

9.49 Ein kegelförmiges Sektglas wird bis zur halben Höhe angefüllt. Welchen Volumsanteil des randvoll gefüllten Glases bedeutet dies? Wie hoch steht der Sekt, wenn die Hälfte des möglichen Volumens gewünscht wird?

9.50 Mit Hilfe eines Förderbandes wird ein kegelförmiger Sandhaufen (Abb. 9.42) aufgeschüttet.

a) Ermittle allgemein eine Formel zur Bestimmung der Sandmenge in Abhängigkeit von der Haufenhöhe h und des Schüttwinkels α.

b) Berechne mit der in a) aufgestellten Volumsformel die Höhe eines Sandhaufens von 12 m^3 bei einem Schüttwinkel von 35°.

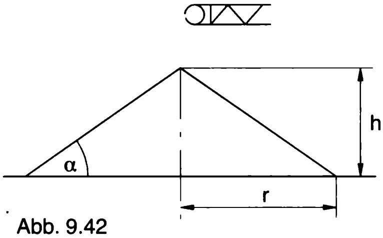


Abb. 9.42

9.51 Ermittle die Dachfläche sowie das Dachraumvolumen des Daches in Abb. 9.43, wenn $a = 15$ m, $r = 5$ m und $\alpha = 60°$ ist.

9.52 Abb. 9.44 zeigt den Achsenschnitt einer kegelförmigen Kunststoffkappe, die in größerer Anzahl für Abdichtzwecke gebraucht werden (Maße in mm). Berechne den Materialbedarf für ein Stück.

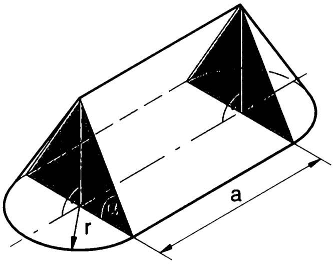


Abb. 9.43

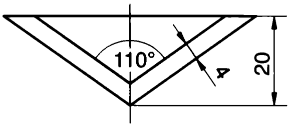


Abb. 9.44

9.53 Aus einem 168 cm langen Draht soll ein Kantenmodell einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche hergestellt werden. Für die Länge l, Breite b und die Seitenkante s gilt: $l : b : s = 3 : 2 : 8$.

a) Berechne die Bestimmungsstücke l, b und s.

b) Für die Bespannung des Modells wird Papier verwendet. Wie viel Papier ist notwendig, wenn man 20% Verschnitt rechnet?

9.54 Aus einem kreisförmigen Blech mit dem Durchmesser $d = 40$ cm wird ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 90° herausgeschnitten. Aus dem Reststück wird ein Kegel gebogen. Berechne seine Höhe, sein Volumen und den Neigungswinkel einer Mantellinie zur Grundfläche.

9.55 Aus einem Holzkegel mit dem Radius $r = 12$ cm und der Höhe $h = 30$ cm soll eine gerade sechseitige Pyramide so hergestellt werden, dass der Materialverlust möglichst klein wird.

a) Welche Abmessungen hat die Pyramide und wie groß ist der Materialverlust?

b) Wie groß ist der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und der Seitenfläche?

9.56 Ein Kegel mit dem Durchmesser 100 mm und der Höhe 150 mm wird gleichmäßig ausgehöhlt. Wie groß ist die Wandstärke des verbleibenden "Hohlkegels", der gerade die halbe Masse des ursprünglichen Kegels besitzt?

9.57 Berechne den Materialbedarf V der Zufahrtsrampe in Abb. 9.45, wenn folgende Vorgaben bestehen: $a = 4{,}0$ m, $b = 2{,}5$ m, $h = 1{,}6$ m, Rampensteigung = 10%.

Hinweis: Überlege, dass die gesuchte Rampe übrigbleibt, wenn man von einem dreiseitigen Prisma zwei Pyramiden wegnimmt.

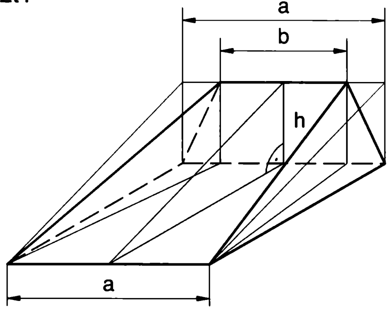


Abb. 9.45

9.3 Stumpfe Körper

Schneidet man eine Pyramide parallel zur Grundfläche ab, so bleibt ein **Pyramidenstumpf** übrig (Abb. 9.46).

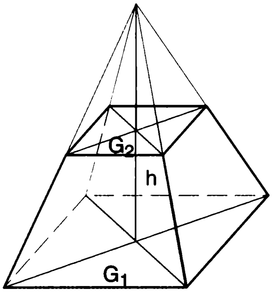


Abb. 9.46 Pyramidenstumpf

Anstatt die Volumen der ursprünglichen Pyramide und der wegfallenden Pyramide zu berechnen, lässt sich eine Volumsformel für jeden beliebigen Pyramidenstumpf angeben, was ohne Herleitung geschehen soll:

$$\boxed{V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)}$$

Dabei bezeichnen G_1 und G_2 die Grundfläche und die Deckfläche und h die Stumpfhöhe.

Eine für praktische Berechnungen manchmal ausreichende Näherungsformel für das Volumen lautet: $V \approx h \cdot \frac{G_1 + G_2}{2}$.

Die Näherung liefert stets etwas zu große Werte. Sie besteht darin, dass der Pyramidenstumpf durch ein Prisma gleicher Höhe genähert wird, dessen Grundfläche gleich dem Pyramidenstumpfquerschnitt in halber Höhe ist. Die Näherungsformel ist daher umso besser, je mehr sich der Pyramidenstumpf dem Prisma annähert, je weniger sich also G_1 und G_2 unterscheiden.

Beispiel 9.9 : Pyramidenstumpf

Ein Betonfundament hat die Form eines quadratischen geraden Pyramidenstumpfes mit der Höhe h = 1,4 m. Grund- und Deckfläche haben die Kantenlängen a = 3,2 m und b = 2,0 m. Berechne:

a) das Volumen V des Fundamentes,

b) die Länge s einer Seitenkante,

c) den Neigungswinkel α einer Seitenfläche.

Lösung

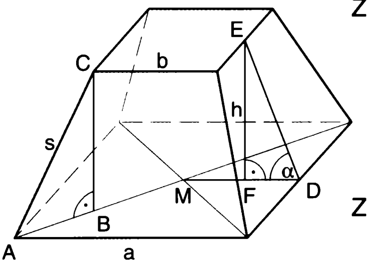


Abb. 9.47

Zu **a)** $V = \frac{1,4}{3} \cdot (3,2^2 + \sqrt{3,2^2 \cdot 2,0^2} + 2,0^2)\ \mathrm{m}^3 = 9,63\ \mathrm{m}^3$.

Näherungsformel: $V \approx 1,4 \cdot \frac{3,2^2 + 2,0^2}{2}\ \mathrm{m}^3 = 9,97\ \mathrm{m}^3$.

Plausibilitätsbetrachtung des Ergebnisses: Wir ersetzen den Pyramidenstumpf in grober Näherung durch einen geeigneten Quader und berechnen für diesen das Volumen!

Zu **b)** Diagonalen der Grundfläche und der Deckfläche:

$d_1 = a\sqrt{2}$; bzw. $d_2 = b\sqrt{2}$;

daraus: $\overline{AB} = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(a - b)$.

Rechtwinkliges Dreieck ABC: $s = \sqrt{h^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2} = 1,64$ m.

Zu **c)** Rechtwinkliges Dreieck FDE: $\tan \alpha = \frac{h}{\overline{FD}} = \frac{h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{1,4\ \mathrm{m}}{0,6\ \mathrm{m}} \Rightarrow \alpha = 66,8°$.

Schneidet man einen Kegel parallel zur Grundfläche ab, so bleibt ein **Kegelstumpf** übrig (Abb. 9.48).

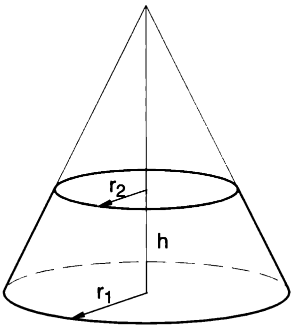


Abb. 9.48 Kegelstumpf

Wie der Kegel als Grenzfall einer Pyramide, so kann der Kegelstumpf als Grenzfall eines Pyramidenstumpfes gedacht werden: die Volumsformeln bleiben dabei erhalten. Setzt man daher $G_1 = \pi\, r_1^2$ und $G_2 = \pi\, r_2^2$ in der Volumsformel für den Pyramidenstumpf, so erhält man als Volumen für den geraden oder schiefen Kegelstumpf:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 . r_2 + r_2^2)}$$

Eine in der Praxis öfters verwendete Näherungsformel für das Volumen lautet: $V \approx \pi\, h\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$.

Die Näherung liefert stets etwas zu kleine Werte. Sie besteht darin, dass der Kegelstumpf durch einen Zylinder gleicher Höhe genähert wird, dessen Grundfläche gleich dem Kegelstumpfquerschnitt in halber Höhe ist. Die Näherungsformel ist daher umso besser, je mehr sich der Kegelstumpf dem Zylinder annähert.

Der Mantel M eines geraden Kegelstumpfes ist die Differenz zweier Kegelmäntel (Abb. 9.49):

$M = \pi\, r_1 \cdot (s + x) - \pi\, r_2 \cdot x = \pi\, r_1 s + \pi\, x (r_1 - r_2)$

Zur Bestimmung von x benützen wir, dass für den gleichen Zentriwinkel ω das Verhältnis von Kreisbogen zu Radius stets gleich ist: $\frac{2\pi r_1}{s + x} = \frac{2\pi r_2}{x}$; daraus: $x = \frac{r_2 s}{r_1 - r_2}$.

Damit ergibt sich als Mantel für den geraden Kegelstumpf:

$$\boxed{M = \pi s (r_1 + r_2)}$$

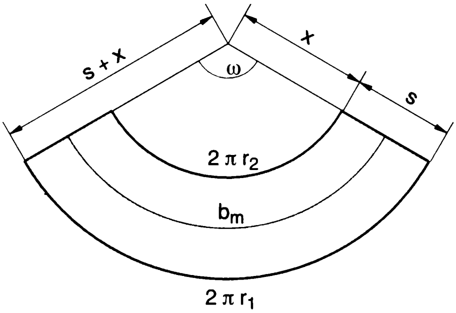


Abb. 9.49 Mantel eines geraden Kegelstumpfs

Merkhilfe: Bezeichnet man mit $b_m = \frac{1}{2}(2\pi r_1 + 2\pi r_2) = \pi\,(r_1 + r_2)$ die "mittlere" Bogenlänge (Abb. 9.49), so ist – wie bei einer Rechtecksfläche – $M = b_m \cdot s$.

Beispiel 9.10 : Kegelstumpf

Von einem (geraden) Kegelstumpf kennt man die Radien $r_1 = 28{,}0$ cm und $r_2 = 15{,}0$ cm sowie die Höhe $h = 32{,}0$ cm. Berechne

a) Volumen, **b)** Mantel und Oberfläche des Kegelstumpfs.

Lösung

Zu **a)** $V = \frac{\pi h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 . r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 32}{3} \cdot (28^2 + 28 . 15 + 15^2) = 47886{,}\ldots \text{ cm}^3 \approx 47{,}9 \text{ dm}^3$.

Näherungsformel: $V \approx \pi\, h\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 = \pi \cdot 32 \left(\frac{28 + 15}{2}\right)^2 = 46470{,}\ldots \text{ cm}^3 \approx 46{,}5 \text{ dm}^3$.

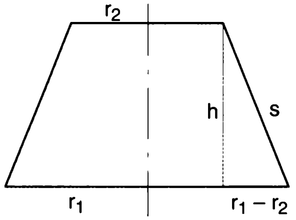


Abb. 9.50

Zu **b)** Abb. 9.50 zeigt einen Achsenschnitt; aus dem rechtwinkligen Dreieck entnimmt man:

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{32,0^2 + 13,0^2}\,\text{cm} = 34,5\text{ cm};$$

Damit:

$$M = \pi \cdot s\,(r_1 + r_2) = \pi \cdot 34,53\ldots \cdot (28,0 + 15,0)\text{ cm}^2 =$$
$$= 4665,9\ldots\text{ cm}^2 \approx 46,7\text{ dm}^2;$$

Schließlich: $O = \pi\, r_1^2 + \pi\, r_2^2 + M = 7835,8\ldots\text{ cm}^2 \approx 78,4\text{ dm}^2$.

Plausibilitätsbetrachtung des Ergebnisses: Man ersetzt den Kegelstumpf in grober Näherung etwa durch einen Quader und berechnet für diesen Volumen und Oberfläche.

Die Kepler'sche Fassregel[14]

Mit dieser Formel können die Rauminhalte aller bisher behandelten Körper und auch die weiterer Körper (wie der eines Fasses) berechnet werden. Darüber hinaus ist die Formel oft eine gute Näherung.

Kepler'sche Fassregel

$$V = \frac{h}{6} \cdot (G_1 + 4 \cdot G_m + G_2)$$

Die Kepler'sche Fassregel ersetzt somit viele Volumsformeln. Zu beachten ist die Berechnung der "Mittelfläche" G_m. Diese ist nicht das arithmetische Mittel von Grund- und Deckfläche, sondern errechnet sich aus den mittleren Seitenlängen (Kanten oder Durchmessern).

Beispiel 9.11 : Kepler'sche Fassregel

Ein Betonfundament hat die Form eines quadratischen geraden Pyramidenstumpfes mit der Höhe h = 1,4 m. Grund- und Deckfläche haben die Kantenlängen a = 3,2 m und b = 2,0 m. Berechne sein Volumen (wie Beispiel 9.9).

Lösung

$$G_m = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2};$$

$$V = \frac{1,4}{6} \cdot \left(3,2^2 + 4 \cdot \frac{(3,2+2,0)^2}{4} + 2,0^2\right)\text{m}^3 = 9,63\text{ m}^3.$$

Aufgaben

9.58 Wie groß sind Volumen und Oberfläche eines Pyramidenstumpfes mit der Höhe 15 cm, dessen Grund- und Deckfläche regelmäßige Sechsecke mit den Seiten $s_1 = 8$ cm und $s_2 = 5$ cm sind?

---

[14] Johannes KEPLER, 1571 – 1630, bedeutender deutscher Naturwissenschaftler, verbrachte einen Großteil seines Lebens in Österreich. Die Keplersche Fassregel wird auch Simpson'sche Regel genannt.

9.59 Ein oben offener Behälter aus Kunststoff hat die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit rechteckigen Grundflächen (Abb. 9.51); seine Innenmaße lauten:
$a = 400$ mm, $b = 500$ mm, $c = 600$ mm, $d = 750$ mm und $h = 800$ mm.

a) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

b) Wie groß ist die Füllmenge, wenn der Behälter nur bis zur halben Höhe gefüllt wird?

c) Wie groß sind die Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche?

d) Um den Materialbedarf für die Herstellung abzuschätzen, ist die gesamte Innenfläche zu berechnen.

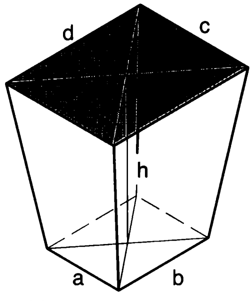


Abb. 9.51

9.60 Abb. 9.52 zeigt einen Schnitt durch einen Schütttrichter, der die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grund- und Deckfläche besitzt. Der Trichter ist bestimmt durch: $a = 3{,}50$ m; $h = 1{,}80$ m; $\alpha = 50°$.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen des Trichters?

b) Er wird innen mit Blech ausgekleidet; wie groß ist der Blechbedarf (ohne Verschnitt)?

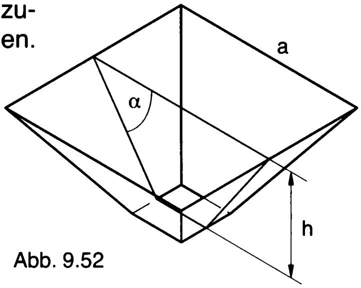


Abb. 9.52

9.61 Wie groß ist das Volumen des kreisförmigen Schachtes für Schüttgut in Abb. 9.53 (Maße in mm)?

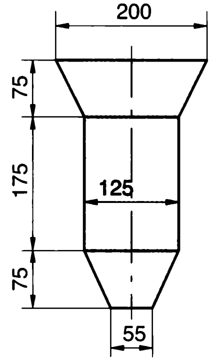


Abb. 9.53

9.62 Wie groß ist das Volumen eines Baumstammes der Länge 9 m, dessen Schnittflächen die Durchmesser 75 cm und 60 cm haben? Wie groß ist der prozentuelle Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für das Volumen?

9.63 Welche Masse besitzt ein Bolzen aus Stahl (Abb. 9.54, Maße in mm), wenn $\varrho = 7{,}85$ kg/dm^3?

9.64 Ein offener kegelstumpfförmiger Behälter aus Polyethen hat die Höhe 42 cm und die beiden Durchmesser 75 cm und 35 cm.

a) Zur Abschätzung des Materialbedarfs ist die gesamte Fläche des Behälters zu berechnen (die Behälterstärke kann vernachlässigt werden).

b) Wie groß sind die Radien und der Zentriwinkel des Kreisringsektors, der entsteht, wenn man den Behältermantel in die Ebene abwickelt?

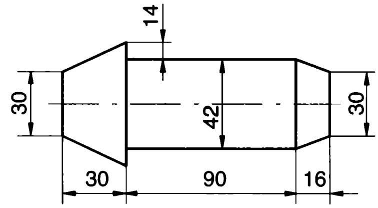


Abb. 9.54

9.65 Ein 7,20 m hoher Betonmast (Querschnitt in Abb. 9.55) hat die Form eines regelmäßigen sechseckigen Pyramidenstumpfes mit einem konisch sich nach oben verjüngenden kreisförmigen Hohlraum. Welches Volumen besitzt er, wenn $s_1 = 180$ cm und $d_1 = 120$ cm (Maße unten) sowie $s_2 = 90$ cm und $d_2 = 40$ cm (Maße oben) sind?

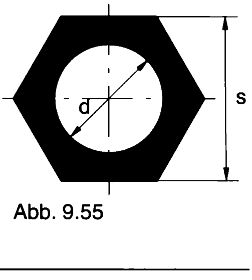


Abb. 9.55

9.4 Kugel und Kugelteile

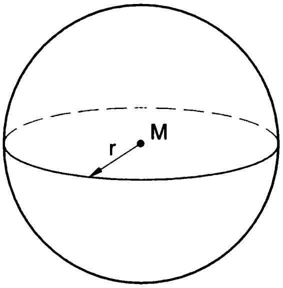


Abb. 9.56 Kugel mit Radius r

Ohne Herleitung gelten für das Volumen V und die Oberfläche O der Kugel die Formeln (Durchmesser d = 2r):

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$

$$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Von allen Körpern mit gleichem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche! Deshalb sind Seifenblasen und Wassertropfen kugelförmig.

Beispiel 9.12 : Volumen und Oberfläche einer Kugel

Der mittlere Erdradius r beträgt $6{,}371 \cdot 10^3$ km. Wie groß sind das Volumen, die Masse (mittlere Dichte $\varrho = 5{,}516$ kg/dm^3) sowie die Oberfläche der Erde?

Lösung

Die Erde hat in erster Näherung die Gestalt einer Kugel. In besserer Annäherung beschreibt man die Erdgestalt durch ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid: Der Äquatorradius misst 6378 km, der Polradius 6357 km, als mittlerer Radius gilt 6371 km (alle Werte kilometergenau). Streng genommen ist die Erde jedoch nicht durch einen einfachen geometrischen Körper beschreibbar.

$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 6371^3 \text{ km}^3 = 1{,}083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3;$

$m = \varrho \cdot V = 5{,}516 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1{,}083\ldots \cdot 10^{12} \cdot (10^3 \text{ m})^3 = 5{,}975 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx$ 6 Quadrillionen kg;

$O = 4\pi \cdot 6371^2 \text{ km}^2 = 5{,}101 \cdot 10^8 \text{ km}^2.$

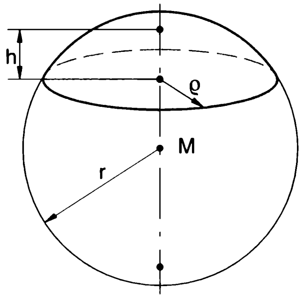


Abb. 9.57 Kugelabschnitt bzw. Kugelhaube

Eine Ebene, die eine Kugel schneidet, zerlegt den Kugel*körper* in zwei **Kugelabschnitte** (oder **Kugelsegmente**) und die Kugel*oberfläche* in zwei **Kugelkappen** (auch **Kalotten** oder **Kugelhauben** genannt). In Abb. 9.57 ist h die Höhe eines der Kugelabschnitte.

Ohne Herleitung wird das Volumen V eines Kugelabschnittes sowie der Flächeninhalt A einer Kugelkappe angegeben:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2)$$

$$A = 2\pi r h = \pi(\varrho^2 + h^2)$$

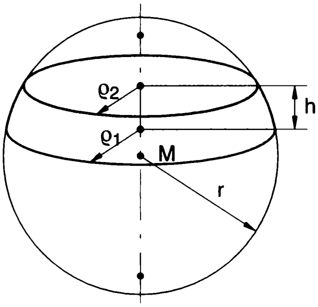


Abb. 9.58 Kugelschicht bzw. Kugelzone

Wird eine Kugel von zwei parallelen Ebenen geschnitten (Abb. 9.58), so heißt der zwischen den Ebenen liegende Teil des Kugel*körpers* eine **Kugelschicht**, der zugehörige Teil der Kugel*oberfläche* wird **Kugelzone** genannt. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 9.58 gilt für das Volumen V einer Kugelschicht sowie für den Flächeninhalt A einer Kugelzone:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2) \\ A &= 2\pi r h \end{aligned}}$$

In beiden Fällen können diese Formeln leicht als Differenz zweier Kugelabschnitte bzw. Kugelkappen hergeleitet werden.

Beispiel 9.13 : Kugelabschnitt

Eine bikonvexe sphärische Linse (Abb. 9.59) aus Glas besitzt einen Durchmesser d = 12 cm und eine größte Dicke m = 3 cm.

a) Wie groß ist ihre Masse (ϱ_{Glas} = 3,5 kg/dm^3)?

b) Wie groß ist ihre Oberfläche?

Lösung

Zu **a)** $h = \frac{m}{2} = 1{,}5$ cm; $\varrho = \frac{d}{2} = 6$ cm.

$$V = 2 \cdot \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2) = 173 \text{ cm}^3;$$

$$m = \varrho_{Glas} \cdot V = 3{,}5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 0{,}173 \text{ dm}^3 \approx 0{,}61 \text{ kg} = 61 \text{ dag}$$

Zu **b)** $A = 2 \cdot \pi(\varrho^2 + h^2) = 240$ cm^2.

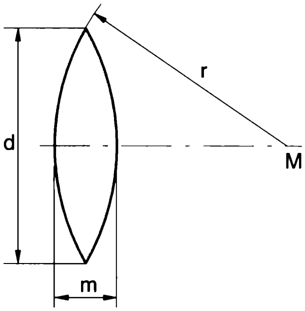


Abb. 9.59

Beispiel 9.14 : Kugelkappe

Welches Gebiet der Erdoberfläche ist von einem Satelliten aus einer Höhe von x = 700 km theoretisch sichtbar (Erdradius r = 6371 km)?

Lösung

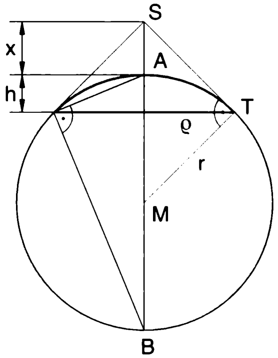


Abb. 9.60

Wir führen die Rechnung zuerst allgemein.

Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck MST (der Radius steht normal auf die Tangente!):

$\varrho^2 = (h + x) \cdot (r - h)$;

Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ABT (Dreieck im Halbkreis, Satz von Thales):

$\varrho^2 = h \cdot (2r - h)$.

Gleichsetzen:

$$(h + x) \cdot (r - h) = h \cdot (2r - h)$$
$$hr - h^2 + rx - hx = 2hr - h^2$$
$$rx = hr + hx = h \cdot (r + x)$$
$$h = \frac{rx}{r + x}.$$

Daraus: $A = 2\pi r h = 2\pi r \cdot \frac{rx}{r + x} = \frac{2\pi r^2 x}{r + x}$.

Mit r = 6371 km und x = 700 km ergibt sich $A \approx 25 \cdot 10^6$ km^2 (was etwa gleich 300-mal die Fläche von Österreich ist).

Beispiel 9.15 : Kugelschicht und Kugelzone

Wie groß ist das Fassungsvermögen und die Mantelfläche einer Schale, welche die Form einer Kugelschicht mit den (Innen-)Maßen $\varrho_1 = \varrho_2 = 20$ cm und $h = 50$ cm hat?

Lösung

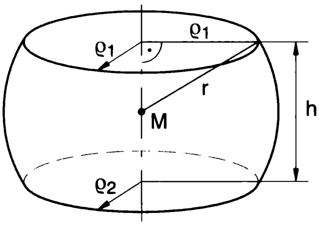


Abb. 9.61

$V = \frac{\pi h}{6} \cdot (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2) = \frac{\pi \cdot 50}{6} \cdot (3 \cdot 20^2 + 3 \cdot 20^2 + 50^2)$
$= 128\,281,\ldots \text{ cm}^3 \approx 128 \text{ dm}^3 = 128\ l.$

Den Kugelradius erhält man aus dem in Abb. 9.61 markierten rechtwinkligen Dreieck:

$$r = \sqrt{\varrho_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 32{,}0 \text{ cm.}$$

Mantelfläche:
$A = 2\pi r h = 10\,058,\ldots \text{ cm}^2 \approx 101 \text{ dm}^2 = 1{,}01 \text{ m}^2.$

Aufgaben

9.66 Welchen Radius hat eine Kugel **a)** mit dem Volumen 1 m^3, **b)** mit der Oberfläche 1 m^2?

9.67 Wie verhalten sich die Volumen von Kugel, Zylinder und Kegel, wenn die Grundkreisdurchmesser und die Höhen von Zylinder und Kegel gleich dem Kugeldurchmesser sind?

9.68 Eine Hohlkugel mit der Wandstärke 3 mm soll ein Fassungsvermögen von 1 Liter haben. Wie groß ist ihr äußerer Durchmesser?

9.69 Eine aus Messing ($\varrho = 8{,}55$ kg/dm^3) gefertigte Schwimmerkugel von 1 mm Wandstärke hat einen Außendurchmesser von 100 mm. Wie groß ist ihre Masse?

9.70 Ein kugelförmiger Ballon von 10 m Durchmesser ist mit Wasserstoff ($\varrho = 0{,}090$ g/dm^3) gefüllt. Wie groß ist die nach oben wirkende Kraft in Luft ($\varrho = 1{,}293$ g/dm^3)?

9.71 Welche Masse hat eine Korkkugel mit dem Durchmesser 1 m ($\varrho = 0{,}25$ kg/dm^3)?

9.72 Eine Hohlkugel besitzt das Volumen 50 cm^3 und eine Wandstärke 2 mm. Wie groß ist ihr Außendurchmesser?

9.73 Wie groß ist die Masse des Kugelgelenkbolzens ($\varrho = 7{,}85$ kg/dm^3, Maße in mm) in Abb. 9.62?

9.74 Eine Eisenkugel wird in eine Bleiplatte gedrückt; der Abdruck ist 5,0 mm tief und besitzt eine Fläche von 6,40 cm^2. Wie groß ist der Radius der Eisenkugel?

9.75 Ein kugelförmiges Schiebegewicht ist mit einer zylindrischen zentralen Bohrung von 1,4 cm Durchmesser versehen. Wie groß ist sein Volumen, wenn der Durchmesser 8,5 cm beträgt?

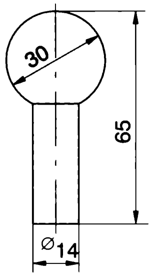


Abb. 9.62

9.76 Eine Zierkugel mit dem Durchmesser 120 cm wird so abgeflacht, dass die dadurch entstehende Auflagefläche einen Durchmesser von 80 cm hat. Wie groß ist das verbleibende Volumen?

9.77 Berechne die Masse einer Bikonkavlinse (Abb. 9.63, Maße in mm, $\varrho_{Glas} = 3{,}3$ kg/dm^3).

9.78 Eine Bikonvexlinse (Abb. 9.64, Maße in mm) erhält eine optische Vergütung durch Aufdampfen eines Belages. Zur Abschätzung des dafür nötigen Materialbedarfs ist ihre Oberfläche zu bestimmen.

9.79 Wie groß ist die Masse eines Stahlbolzens in Abb. 9.65 ($\varrho = 7{,}85$ kg/dm^3, Maße in mm)?

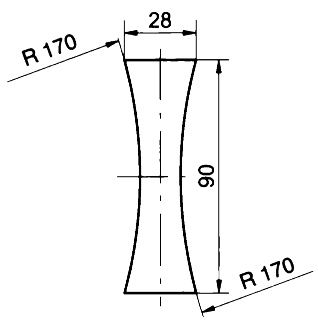


Abb. 9.63

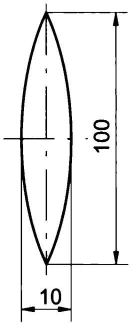


Abb. 9.64

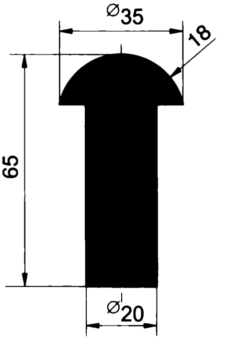


Abb. 9.65

9.80 Der größere Durchmesser einer Kugelzone ist gleich dem Kugeldurchmesser. Sie besitzt eine Höhe von 5 cm und eine Fläche von 600 cm^2. Wie groß ist das Volumen der zugehörigen Kugelschicht?

9.81 Die Fläche einer Kugelkappe ist 95 cm^2, ihre Höhe ist 3 cm. Berechne den zugehörigen Kugelabschnitt.

9.82 Ein zylinderförmiger Windkessel (Abb. 9.66, Maße in cm) ist beidseitig durch Kugelkappen abgeschlossen. Berechne sein Volumen und seine Oberfläche.

9.83 Eine Kugel (Abb. 9.67) wird zentrisch konisch ausgebohrt. Wie groß ist das Restvolumen, wenn d = 60 mm, d_1 = 24 mm und d_2 = 34 mm?

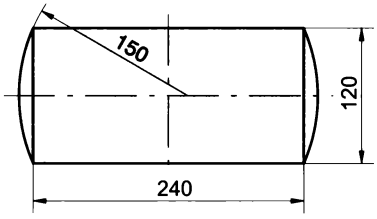


Abb. 9.66

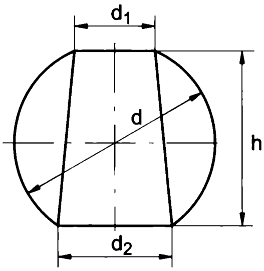


Abb. 9.67

9.84 Eine Kugel vom Durchmesser d wird bis zur Mitte eingefräst (Abb. 9.68). Wie groß ist das Restvolumen, wenn der Kugeldurchmesser d gleich 70 mm und die Fräsbreite x gleich 25 mm ist?

9.85 Eine Kugel mit einem Durchmesser von 60 mm wird beidseitig nach Abb. 9.69 (Maße in mm) abgefräst. Wie groß ist das Restvolumen?

9.86 Eine halbkugelförmige Schale (Abb. 9.70) ist mit Wasser gefüllt. Sie wird um 20° geneigt.

a) Wie viel Wasser fließt aus, wenn ihr Durchmesser 20 cm ist?

b) Wie groß ist ihr Fassungsvermögen, wenn beim Neigen 3 Liter Wasser ausfließen?

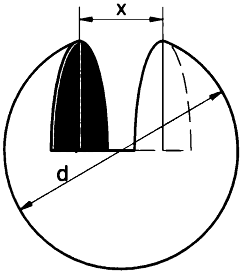


Abb. 9.68

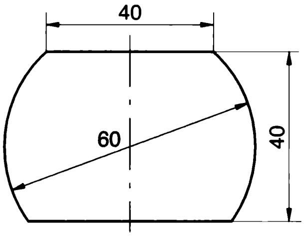


Abb. 9.69

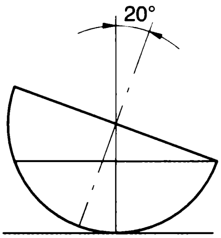


Abb. 9.70

Im Überblick: Stereometrie

Satz von Cavalieri: Wenn zwei Körper in gleicher Höhe stets flächengleiche Querschnitte haben, so ist auch ihr Volumen gleich.

Körper mit gleichbleibendem Querschnitt (Prisma und Zylinder): $V = G \cdot h$

Spitze Körper (Pyramide und Kegel): $V = \frac{1}{3} \cdot G\, h$

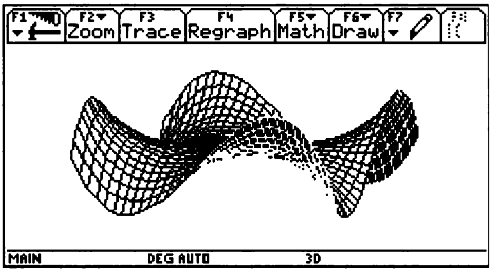
Stumpfe Körper (Pyramiden- und Kegelstumpf): $V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$

Kugelförmige Körper (Kugel, Kugelabschnitt, Kugelschicht)

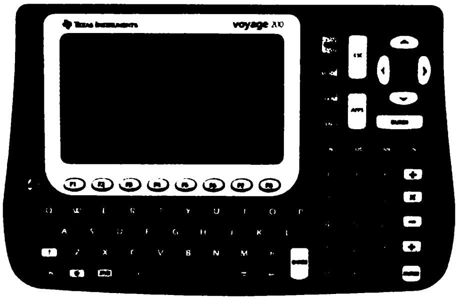
Kepler'sche Fassregel: $V = \frac{h}{6} \cdot (G_1 + 4 \cdot G_m + G_2)$

10 Moderne Hilfsmittel

Grundlagen des CAS-Rechners Voyage 200



Der Voyage 200 ist ein Graphikrechner, der auch symbolische Operationen ausführen kann (CAS- oder Computeralgebrasystem-Rechner). Darüber hinaus ist Anwendersoftware, so genannte Applikationen, für Finanzmathematik, Statistik, Tabellenkalkulation oder Analysis bereits vorinstalliert. Dazu besteht eine einfache Verbindungsmöglichkeit zum PC sowie die Möglichkeit aktuelle Software einschließlich der neuesten Version des Betriebssystems des Rechners vom Internet ("Flash-Software") herunterzuladen. Der CAS-Rechner **TI-89** besitzt abgesehen vom kleineren Speicher keinen grundsätzlichen Unterschied zum Voyage 200. Seine Tasten sind jedoch bis zu dreifach belegt.
Es folgt eine kurze Einführung in das Arbeiten mit dem Voyage 200, die sich auf die Inhalte dieses Bandes beschränkt. Umfassende Informationen dazu und darüber hinaus bietet das auf einer CD mitgelieferte Handbuch zum Rechner.



Buchstabentasten: Bis auf die Vertauschung von z und y wie auf einer PC-Tastatur.

Cursortasten: ◀ , ▲ , ▶ , ▼

Funktionstasten: F1 , F2 ..., F8

Einschalten des Rechners: ON

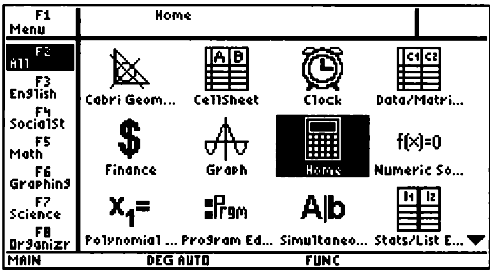
Bildschirmkontrast: ◆ − für heller, ◆ + für dunkler (eventuell mehrfach betätigen, ◆ kann dabei gedrückt bleiben)

Ausschalten des Rechners: 2ND ON

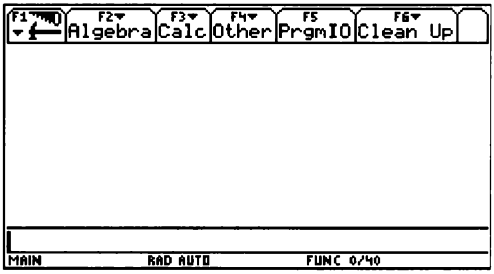
Weitere wichtige Tasten:

◆	Karo-Taste	Aktiviert die Anweisungen, die in grüner Schrift über bestimmten Tasten angezeigt werden
2ND	Zweitfunktionstaste (Second)	Aktiviert beim nächsten Tastendruck die Anweisungen, die in blauer Schrift über bestimmten Tasten angezeigt werden
↑	Hochstellen-Taste (Shift)	Übergang zu Großbuchstaben; der Rechner kennt keinen Unterschied zwischen Groß- und Kleinbuchstaben
ESC	Escape	Verlassen von Menüs, verlässt Einstellungsänderungen ohne diese zu speichern; beseitigt Fehlermeldungen, usw.
ENTER	Dreifach vorhanden	Abschließen von Eingaben oder Menüwahlen, speichert Veränderungen in Dialogfenstern
CLEAR		Löscht die Eingaben in der Eingabezeile rechts vom Cursor
MODE		Einleitung verschiedener grundlegender Einstellungen
APPS		Anzeige der verfügbaren Anwendungen (Applikationen)

APPS-Desktop



Leerer Hauptbildschirm (Home-Bildschirm)

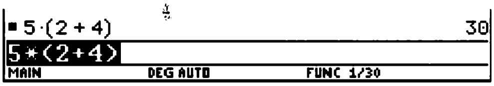


Da wir nicht spezielle Anwendungen ausführen, wechseln wir vom APPS-Desktop in den **Hauptbildschirm (Home-Bildschirm)** als Ausgangspunkt für allgemeine Berechnungen. Dazu wählt man, wie abgebildet, mit dem Cursor das Home-Symbol und drückt ENTER .

Stets erfolgt der **Aufruf oder die Rückkehr zum Hauptbild-Bildschirm durch ◆ Q**.

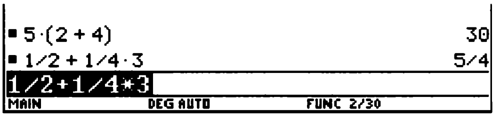
Erste Eingaben

$5\cdot(2+4)$ 5 X (2 + 4) ENTER


```
■ 5·(2+4)                         30
5*(2+4)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 1/30
```

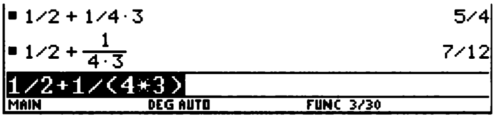
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 3$ Nach Drücken der ersten Taste für eine neue Eingabe wird die noch markierte "alte" Eingabe gelöscht.

1 ÷ 2 + 1 ÷ 4 X 3
ENTER


```
■ 5·(2+4)                         30
■ 1/2+1/4·3                      5/4
1/2+1/4*3
MAIN        DEG AUTO        FUNC 2/30
```

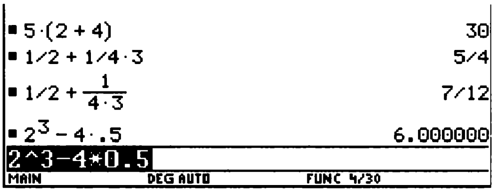
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 3}$ 1 ÷ 2 + 1 ÷ (4 X 3) ENTER

Beachte die Klammerung des Nenners!


```
■ 1/2+1/4·3                      5/4
■ 1/2 + 1/(4·3)                 7/12
1/2+1/(4*3)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 3/30
```

$2^3-4\cdot 0{,}5$ 2 ^ 3 − 4 X 0 . 5
ENTER

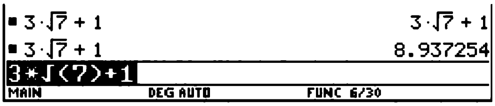
Statt eines Dezimalkommas ist ein Punkt zu setzen! Die Null vor dem Punkt kann weggelassen werden.


```
■ 5·(2+4)                         30
■ 1/2+1/4·3                      5/4
■ 1/2 + 1/(4·3)                 7/12
■ 2^3 - 4·.5                6.000000
2^3-4*0.5
MAIN        DEG AUTO        FUNC 4/30
```

Das Auftreten einer einzigen Kommazahl in der Eingabe genügt, so dass auch das Ergebnis als (gerundete) Kommazahl dargestellt wird.

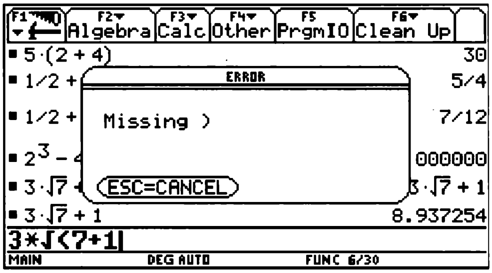
$3\cdot\sqrt{7}+1$ 3 X 2ND X 7) + 1
ENTER

Das Multiplikationszeichen vor der Wurzel braucht nicht gesetzt werden.


```
■ 3·√7 + 1                  3·√7 + 1
■ 3·√7 + 1                  8.937254
3*√(7)+1
MAIN        DEG AUTO        FUNC 6/30
```

Der Abschluss mit ENTER liefert das exakte Ergebnis, jener mit ◆ ENTER liefert eine (gerundete) Kommazahl. Letzteres tritt auch ein wenn man mindestens einmal eine Kommazahl eingibt, etwa 1 . statt 1.

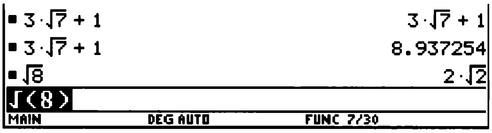
Setzt man bei der Wurzeleingabe die schließende Klammer nicht, so hat dies eine Fehlermitteilung zur Folge.



```
F1      F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6▾
▾ƒ      Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ 5·(2 + 4)                              30
■ 1/2 +          ERROR                  5/4
■ 1/2 +   Missing )                    7/12
■ 2³ – 4                             000000
■ 3·√7 +  ESC=CANCEL                 3·√7 + 1
■ 3·√7 + 1                         8.937254
3*√(7+1|
MAIN       DEG AUTO       FUNC 6/30
```

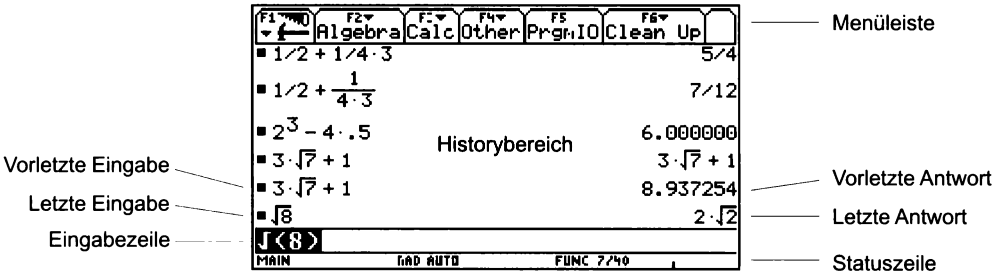
$\sqrt{8}$ 2ND X 8) ENTER

Hier wird eine wesentliche Eigenschaft des Rechners besonders sichtbar: die Rechnung ist exakt; das Ergebnis wird nicht näherungsweise als Kommazahl angezeigt.



```
■ 3·√7 + 1                         3·√7 + 1
■ 3·√7 + 1                         8.937254
■ √8                                   2·√2
√(8)
MAIN       DEG AUTO       FUNC 7/30
```

Hauptbildschirm (Home-Bildschirm)



```
F1      F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6▾
▾ƒ      Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ 1/2 + 1/4·3                           5/4
■ 1/2 + 1/(4·3)                        7/12
■ 2³ – 4·.5                        6.000000
■ 3·√7 + 1                         3·√7 + 1
■ 3·√7 + 1                         8.937254
■ √8                                   2·√2
√(8)
MAIN       RAD AUTO       FUNC 7/40
```

Der **Historybereich** (Protokollbereich) zeigt die letzten History Pairs (Eingabe/Antwort-Paare) an. In unserem Beispiel wird in der Statuszeile durch "7/40" angezeigt, dass 7 von hier insgesamt 40 möglichen History Pairs gespeichert wurden. Die Anzahl der History Pairs kann auf maximal 99 eingestellt werden (F1 9 (9:Format) oder ◆ F]). Ist der Bildschirm voll, so werden die oberen Paare über den oberen Bildschirmrand hinausgeschoben; mit wiederholter Betätigung der Cursortaste ▲ können diese aber wieder angezeigt werden. Mit ESC gelangt man wieder in die Eingabezeile.

Historybereich löschen: F1 8 (8:Clear Home)

Bestimmtes Eingabe/Antwort-Paar löschen: Markieren mit dem Cursor und CLEAR.

Löschen der Eingabezeile: CLEAR löscht alle Zeichen rechts vom Cursor, *nochmaliges* Drücken von CLEAR löscht den Rest.

Betriebsarten (Modi)

Dadurch kann beispielsweise festgelegt werden, wie Zahlen (Anzahl der Nachkommastellen, ...) oder Graphen angezeigt werden, ob ein Winkel im Gradmaß oder im Bogenmaß genommen wird u.a.m.

Drücken von MODE öffnet das Dialogfeldmenü MODE. Die Liste der Betriebsarten (Modi) umfasst drei Seiten, die durch Drücken von F1 , F2 oder F3 angezeigt werden können. Momentan nicht aktive Betriebsarten werden unscharf angezeigt.

Modus-Einstellungen ändern:

(1) MODE-Taste drücken

(2) Modus-Einstellung, die geändert werden soll, markieren. Dazu verwendet man die Tasten ▼ oder ▲ (eventuell zusammen mit F1 , F2 oder F3).

(3) Drücken von ▶ öffnet ein Menü mit Auswahlmöglichkeiten. Danach die gewünschte Einstellung mit dem Cursor markieren und ENTER drücken oder die entsprechende Ziffer eingeben.

(4) Falls gewünscht weitere Modus-Einstellungen nach (2) bis (3) ändern.

(5) Zuletzt ENTER, um alle Änderungen zu speichern und das MODE-Dialogfeld zu verlassen. ESC statt ENTER würde Abbrechen bedeuten, durchgeführte Änderungen werden gelöscht.

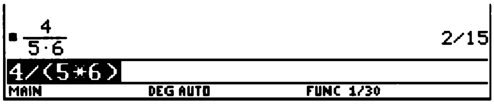
Übersicht über einige wichtige Betriebsarten (Modi):

Graph	Zeigt die Art des darzustellenden Graphen an; soll der Graph einer Funktion y = f (x) gezeichnet werden, so ist FUNCTION zu wählen. Der aktuelle Graph-Modus ist in der Statuszeile des Hauptbildschirms ersichtlich, z.B. FUNC für FUNCTION
Current Folder	Verzeichnis zum Abspeichern und Abrufen von Variablen, Listen, Matrizen, Programmen u.a. MAIN ist der Name des stets vorhandenen Verzeichnisses. Das aktuelle Verzeichnis wird ebenfalls in der Statuszeile angeführt.
Display Digits (Angezeigte Ziffern)	Anzeige einer "Standardzahl" mit Kommastellen: FIX n: es werden n Ziffern nach dem Komma angezeigt. FLOAT n: es werden insgesamt höchstens n Stellen angezeigt, also Stellen vor und nach dem Komma. Nullen am Zahlenende werden nicht angezeigt. In beiden Fällen wird *gerundet*. Kann eine Zahl nicht wie ausgewählt dargestellt werden, so erfolgt die Anzeige in der wissenschaftlichen Anzeige (siehe Menüpunkt Exponential Format). Unabhängig von der Anzeige wird intern stets mit 14 geltenden Ziffern gerechnet; angezeigt werden bis zu 12 Ziffern.
Angle	Deutung eines Winkels im Grad- oder Bogenmaß. Das aktuelle Winkelmaß ist in der Statuszeile des Hauptbildschirms angeführt: DEGREE = Gradmaß, RADIAN = Bogenmaß.
Exponential Format	Numerisches Anzeigeformat der intern als Gleitkommazahl dargestellten Zahl. NORMAL: Übliche Darstellung einer Zahl mit Ziffern vor und nach dem Komma (wenn gemäß FIX n und FLOAT n möglich). SCIENTIFIC: Anzeige in wissenschaftlicher Zehnerpotenzschreibweise, also in normierter Gleikommadarstellung. Stellenanzahl der Mantisse gemäß FIX n bzw. FLOAT n. ENGINEERING: Anzeige erfolgt in technischer Zehnerpotenzschreibweise; zum Unterschied von der wissenschaftlichen Schreibweise ist der Exponent der Zehnerpotenz stets ein Vielfaches von 3; dementsprechend wird die Mantisse mit bis zu 3 Stellen vor dem Komma angezeigt.

Exact/Approx

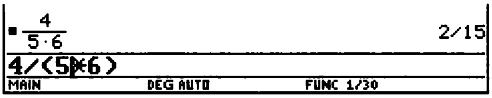
EXACT: Jedes ganzzahlige Ergebnis wird ohne Komma und jedes nichtganzzahlige Ergebnis als Bruch mit bis zu 614 Stellen im Nenner und im Zähler oder möglicherweise als Symbol (z.B. π, $\sqrt{8}$, ...) dargestellt.
APPROXIMATE: Anzeige numerischer Ergebnisse gemäß den Einstellungen in den Menüpunkten "Angezeigte Ziffern" und "Exponentialformat".
AUTO: Verwendet die EXACT-Form, wenn bei der Eingabe kein Komma vorkommt. **AUTO ist die *bevorzugte* Einstellung**.
Der aktuelle Exact/Approx-Modus ist in der Statuszeile des Hauptbildschirms abzulesen.

Term in der Eingabezeile bearbeiten



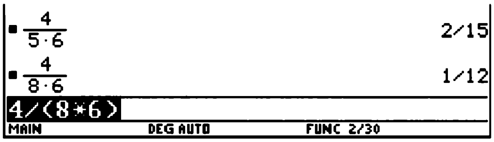
■ $\frac{4}{5\cdot 6}$ 2/15
4/(5*6)
MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

Es soll beispielsweise in der Eingabezeile die Zahl 5 durch 8 ersetzt werden.
Zuerst ist die Markierung aufzuheben. Dazu drückt man die Cursortaste ▶ oder ◀ : ◀ setzt den Cursor an den Anfang, ▶ an das Ende des Ausdrucks; wir tun letzteres.



■ $\frac{4}{5\cdot 6}$ 2/15
4/(5|*6)
MAIN DEG AUTO FUNC 1/30

Der Cursor in Form eines schmalen Strichs blinkt nun hinter der sich schließenden Klammer. Diese Cursorform zeigt übrigens an, dass sich der Rechner im *Einfügemodus* (nicht im Überschreibmodus) befindet.

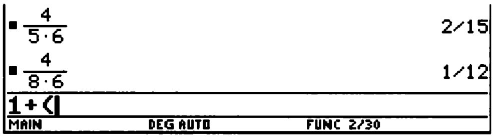


■ $\frac{4}{5\cdot 6}$ 2/15
■ $\frac{4}{8\cdot 6}$ 1/12
4/(8*6)
MAIN DEG AUTO FUNC 2/30

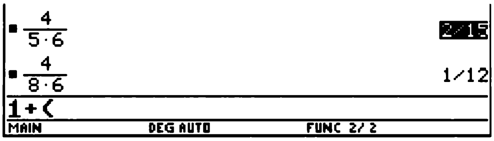
Durch dreimaliges Drücken von ◀ bewegt man den Cursor hinter die Ziffer 5.
Durch Drücken der Taste ← (unterste Tastenreihe) **löscht** man das Zeichen 5 und tippt die Zahl 8 ein. Abschluss durch ENTER .

Tipp: 2ND ◀ bewegt den Cursor an den Anfang eines Ausdrucks in der Eingabezeile, 2ND ▶ an das Ende.

Aus dem Historybereich eine frühere Eingabe oder Antwort in die Eingabezeile übernehmen



■ $\frac{4}{5\cdot 6}$ 2/15
■ $\frac{4}{8\cdot 6}$ 1/12
1+(|
MAIN DEG AUTO FUNC 2/30

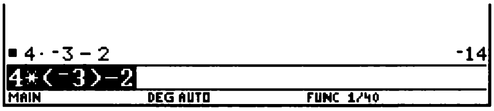


■ $\frac{4}{5\cdot 6}$ 2/15
■ $\frac{4}{8\cdot 6}$ 1/12
1+(
MAIN DEG AUTO FUNC 2/2

In der Eingabezeile soll der Term $\left(\frac{2}{15}\right)^2$ zu 1 addiert werden. Dazu soll in die Eingabezeile eingefügt werden.
Durch dreimaliges Drücken von ▲ markiert man den Term 2/15.
Durch Drücken von ENTER wird der markierte Term 2/15 in die Eingabezeile übernommen.
Danach) ^ 2 ENTER .

Weitere Beispiele für Eingaben von Zahlen

$4\cdot(-3)-2$ 4 **x** ((-) 3) − 2 **ENTER**



■ 4·⁻3 − 2 ⁻14

4*(⁻3)-2

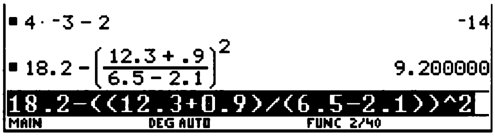
MAIN DEG AUTO FUNC 1/40

Beachte:

(-) Vorzeichenminus, − Subtraktionsminus

Die beiden Minuszeichen unterscheiden sich etwas in der Anzeige am Bildschirm!

$18{,}2-\left(\frac{12{,}3+0{,}9}{6{,}5-2{,}1}\right)^2$ Die Tastenfolge kann aus dem nebenstehenden Display entnommen werden.



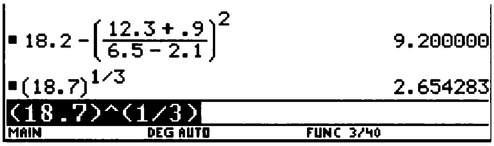
■ 4·⁻3 − 2 ⁻14

■ $18.2-\left(\frac{12.3+.9}{6.5-2.1}\right)^2$ 9.200000

18.2-((12.3+0.9)/(6.5-2.1))^2

MAIN DEG AUTO FUNC 2/40

$\sqrt[3]{18{,}7}$ 18 . 7 ^ (1 ÷ 3) **ENTER**



■ $18.2-\left(\frac{12.3+.9}{6.5-2.1}\right)^2$ 9.200000

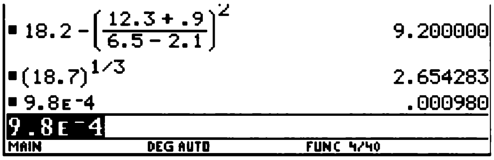
■ $(18.7)^{1/3}$ 2.654283

(18.7)^(1/3)

MAIN DEG AUTO FUNC 3/40

Wurzeln sind im Allgemeinen als Potenzen einzugeben. Der Wurzelexponent ist der Nenner der Hochzahl. Hochzahl klammern!

$9{,}8\cdot10^{-4}$ 9 . 8 2ND 1 (-) 4 **ENTER**



■ $18.2-\left(\frac{12.3+.9}{6.5-2.1}\right)^2$ 9.200000

■ $(18.7)^{1/3}$ 2.654283

■ 9.8E⁻4 .000980

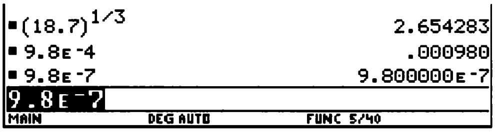
9.8E⁻4

MAIN DEG AUTO FUNC 4/40

Eingabe einer Zahl im wissenschaftlichen Format; die Basis 10 darf nicht geschrieben werden!

Die Anzeige ist wegen FIX 6 (Einstellung Display Digits) im "NORMAL"-Modus möglich.

$9{,}8\cdot10^{-7}$ 9 . 8 2ND 1 (-) 7 **ENTER**



■ $(18.7)^{1/3}$ 2.654283

■ 9.8E⁻4 .000980

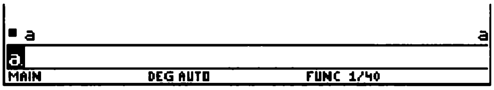
■ 9.8E⁻7 9.800000E⁻7

9.8E⁻7

MAIN DEG AUTO FUNC 5/40

Anzeige im "SCIENTIFIC"-Format, da (wegen FIX 6) sechs Nachkommastellen nicht ausreichend sind.

Wert einer Variablen zuweisen (speichern)

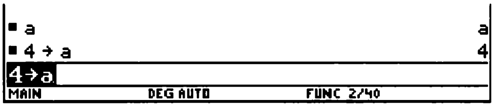


■ a a

a

MAIN DEG AUTO FUNC 1/40

Der Variablen a wurde noch kein Wert zugewiesen, sie ist "**undefiniert**".



■ a a

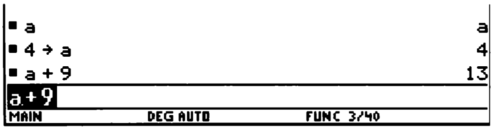
■ 4 → a 4

4→a

MAIN DEG AUTO FUNC 2/40

4 STO▸ a **ENTER**

Mit der STO▸-Taste (in der untersten Tastenreihe) wird der Variablen a ein Wert zugewiesen. Man spricht nun von einer "**definierten**" Variable, eigentlich liegt eine Konstante mit dem Namen a vor. Bei einem Aufruf einer definierten Variable wird diese durch ihren Wert ersetzt.



■ a a

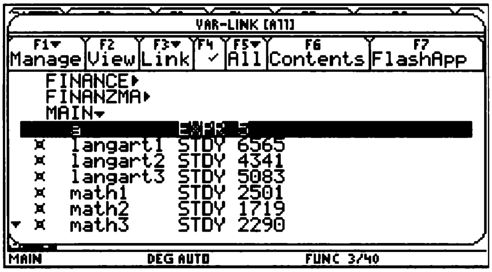
■ 4 → a 4

■ a + 9 13

a+9

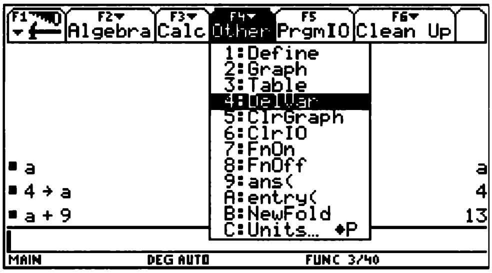
MAIN DEG AUTO FUNC 3/40

Regeln für Variablennamen:
Bis zu 8 Buchstaben oder Ziffern, das erste Zeichen darf jedoch keine Ziffer sein. Es besteht kein Unterschied zwischen Groß- und Kleinbuchstaben.

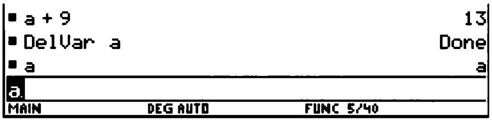


```
FINANCE▸
FINANZMA▸
MAIN▾
  a        EXPR 5
× langart1 STDY 6565
× langart2 STDY 4341
× langart3 STDY 5083
× math1    STDY 2501
× math2    STDY 1719
× math3    STDY 2290
MAIN    DEG AUTO    FUNC 3/40
```

2ND − ruft den so genannten VAR LINK-Bildschirm auf. Dort sind alle Verzeichnisse ("Folder") und in diesen alle dort definierten Variablen, Funktionen und Programme alphabetisch aufgelistet. Im Hauptverzeichnis, genannt MAIN, sind auch andere definierte Variablen angeführt. Die Variable a ist als "EXPR" (= Expression) ausgewiesen.
Findet man MAIN ▶ vor, so ist die Ansicht mit ▸ , der Cursortaste rechts, zu erweitern. ◆ Q Rückkehr in den Hauptbildschirm.

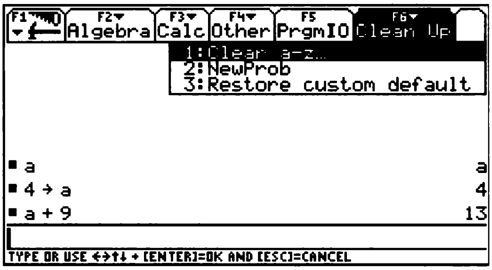


```
■ a          a
■ 4 → a      4
■ a + 9     13
MAIN    DEG AUTO    FUNC 3/40
```



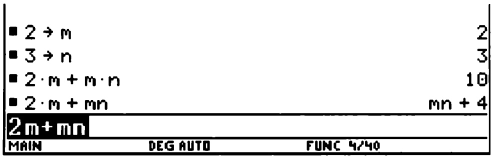
```
■ a + 9        13
■ DelVar a   Done
■ a             a
a
MAIN    DEG AUTO    FUNC 5/40
```

Das Löschen des Wertes einer oder mehrerer Variablen kann durch die Anweisung DelVar erfolgen: F4 4 a
Diese Anweisung kann auch zeichenweise eingetippt werden, auf Groß- und Kleinbuchstaben braucht dabei nicht geachtet werden. Danach wird die zu löschende Variable geschrieben;
Abschluss durch ENTER .



```
■ a          a
■ 4 → a      4
■ a + 9     13
TYPE OR USE ←→↑↓ + [ENTER]=OK AND [ESC]=CANCEL
```

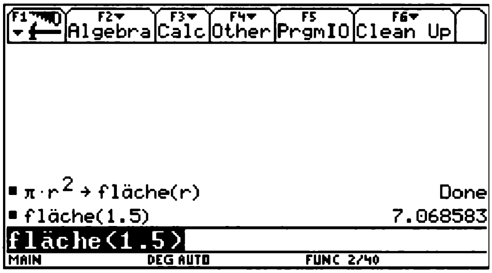
Tipp: Viel einfacher löscht man alle nur mit einem Buchstaben benannten Variablen durch F6 1 ENTER .
Es empfiehlt sich, nur kurzfristig genutzte Variablen mit nur einem Buchstaben zu benennen (abzuspeichern). Diese können dann regelmäßig in der erwähnten Weise schnell gelöscht werden. Auf diese Weise verhindert man das Entstehen von Datenmüll.



```
■ 2 → m              2
■ 3 → n              3
■ 2·m + m·n         10
■ 2·m + mn      mn + 4
2m+mn
MAIN    DEG AUTO    FUNC 4/40
```

Während das Multiplikationszeichen zwischen einer Zahl und einer Variablen entfallen kann, ist dies bei der Multiplikation zweier Variablen nötig! Andernfalls entsteht der Name einer neuen Variablen.

Eine Funktion definieren und Funktionswerte ermitteln



■ $\pi \cdot r^2 \rightarrow$ fläche(r) Done

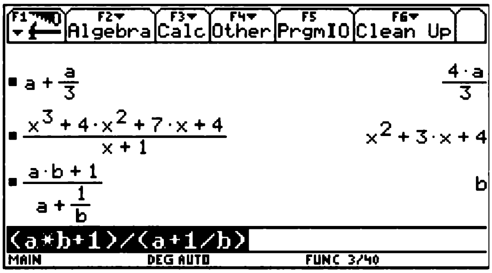
■ fläche(1.5) 7.068583

fläche(1.5)

Um beispielsweise die Funktion A (r) = π · r² zu definieren, kann folgendermaßen vorgegangen werden: man speichert den Funktionsterm π · r² etwa als fläche(r) ab; das Pfeilzeichen erhält man durch Drücken von STO▸ in der untersten Tastenreihe; ä durch 2ND U (wie Umlaut), dann a. "fläche" ist der Funktionsname (Namensregeln wie bei Variablen), r die unabhängige Variable.

Das Ermitteln eines Funktionswertes kann durch Eingabe des Funktionsterms mit dem gewünschten Wert für die unabhängige Variable, danach **ENTER** geschehen.

Symbolisches Rechnen

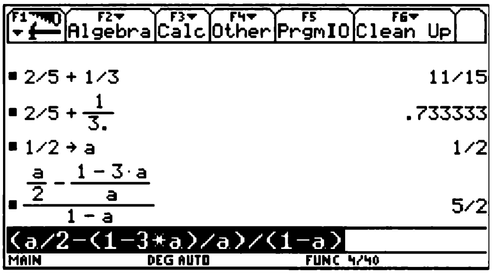


■ $a + \frac{a}{3}$ $\frac{4 \cdot a}{3}$

■ $\frac{x^3 + 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 4}{x + 1}$ $x^2 + 3 \cdot x + 4$

■ $\frac{a \cdot b + 1}{a + \frac{1}{b}}$ b

(a*b+1)/(a+1/b)



■ 2/5 + 1/3 11/15

■ $2/5 + \frac{1}{3.}$ .733333

■ 1/2 → a 1/2

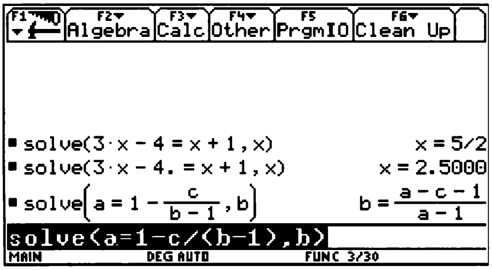
■ $\frac{\frac{a}{2} - \frac{1 - 3 \cdot a}{a}}{1 - a}$ 5/2

(a/2-(1-3*a)/a)/(1-a)

Beim symbolisches Rechnen erfolgt eine Verarbeitung der Variablen und Zahlen nach den Regeln der Algebra durch ein CAS (Computeralgebrasystem).
Das Rechnen mit Zahlen ist exakt, es gibt keine Rundungsfehler.
Voraussetzung: Einstellung des Rechners auf AUTO (erkenntlich in der Statuszeile des Hauptbildschirms). In dieser Einstellung versucht der Rechner wenn möglich symbolisch zu rechnen.

Bei ausschließlicher Verwendung von Zahlen und/oder definierten Variablen (Konstanten) veranlasst das Auftreten eines Dezimalpunktes oder der Abschluss der Eingabe durch ◆ **ENTER** statt mit **ENTER** den Rechner, numerisch zu rechnen, also wie ein gewöhnlicher Taschenrechner vorzugehen.

Lösen von Gleichungen



■ solve(3·x − 4 = x + 1 , x) x = 5/2

■ solve(3·x − 4. = x + 1 , x) x = 2.5000

■ solve$\left(a = 1 - \frac{c}{b - 1}, b\right)$ $b = \frac{a - c - 1}{a - 1}$

solve(a=1-c/(b-1),b)

F2 1 oder **F2 ENTER**, danach die Gleichung eintippen, die Gleichungsvariable angeben, die Klammer schließen, **ENTER**.

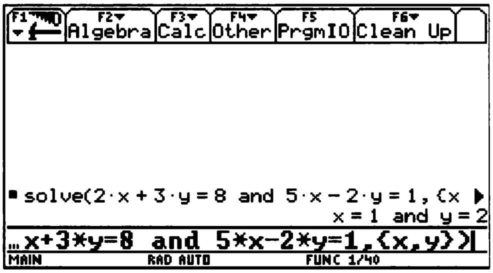
Enthält die Gleichung wenigstens einen Dezimalpunkt oder wird die Eingabe durch ◆ **ENTER** abgeschlossen, so erfolgt die Berechnung numerisch.

Lösen von linearen Gleichungssystemen

Beispiel: $2x + 3y = 8$
$\underline{5x - 2y = 1}$

a) Mit dem Befehl solve()

F2 1 oder F2 ENTER, danach die Gleichungen des Systems eintippen, zwischen den Gleichungen ist *and* zu setzen, dann nach einem Beistrich in geschwungenen Klammern (2ND (bzw. 2ND)) die Unbekannten angeben, die runde Klammer schließen und mit ENTER abschließen.

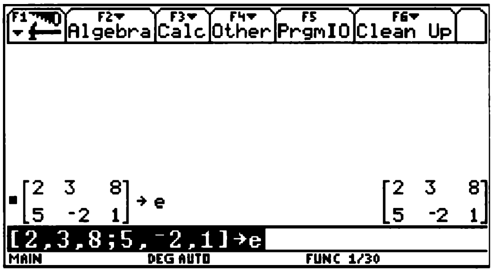


```
■ solve(2·x + 3·y = 8 and 5·x − 2·y = 1, {x ▶
                                  x = 1 and y = 2
…x+3*y=8 and 5*x−2*y=1,{x,y})
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/40
```

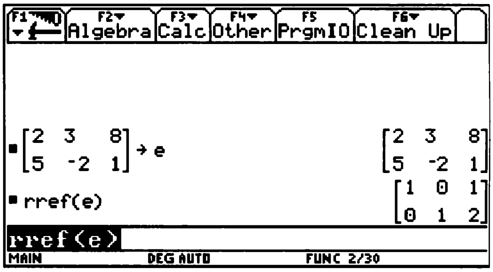
b) Mit dem Befehl rref()

$$\underline{\begin{array}{l} 2\cdot x + \quad 3\cdot y = 8 \\ 5\cdot x + (-2)\cdot y = 1 \end{array}} \quad \text{kann durch Äquivalenzumformungen auf die Form} \quad \underline{\begin{array}{l} 1\cdot x + 0\cdot y = 1 \\ 0\cdot x + 1\cdot y = 2 \end{array}}$$

gebracht werden. Diese Form des linearen Gleichungssystems heißt ihre **reduzierte zeilengestaffelte Form** (engl. row reduced echelon form). Sie lässt sofort die Lösung erkennen: x = 1; y = 2. Verwendet man die Matrixschreibweise, so geht es darum, die erweiterte Koeffizientenmatrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems (Seite 258) auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ zu bringen. Die Spalte ganz rechts gibt, wenn das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösungswerte an. Die Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix A_{erw} des Gleichungssystems auf die erweiterte Matrix ihrer reduzierten zeilengestaffelten Form erfolgt durch die Funktion rref(), benannt nach den Anfangsbuchstaben der englischen Bezeichnung für diese Umformung des Gleichungssystems. A_{erw} kann unmittelbar in die Eingabezeile geschrieben und danach abgespeichert oder mit Hilfe des Matrixeditors (Seite 257) eingegeben werden. rref() wird am Besten zeichenweise eingetippt.



```
■[2  3  8]→e                    [2  3  8]
 [5 -2  1]                      [5 -2  1]
[2,3,8;5,⁻2,1]→e
MAIN          DEG AUTO          FUNC 1/30
```

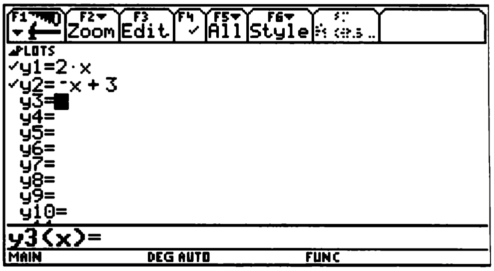


```
■[2  3  8]→e                    [2  3  8]
 [5 -2  1]                      [5 -2  1]
■ rref(e)                       [1  0  1]
                                [0  1  2]
rref(e)
MAIN          DEG AUTO          FUNC 2/30
```

Graph einer Funktion

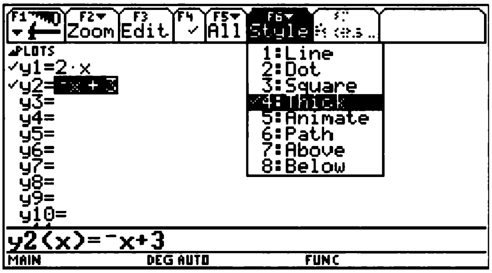
Beispiel: Es sollen die Graphen der Funktionen $y = 2x$ und $y = -x + 3$ gezeichnet werden.

Im ersten Schritt wird der y-Editor durch ◆ W aufgerufen, mit dem Funktionen eingegeben werden können. Bei y1 = wird der Funktionsterm 2·x eingegeben und mit ENTER bestätigt. Anschließend wird bei y2 = der Term −x + 3 eingegeben und ebenfalls mit ENTER bestätigt.



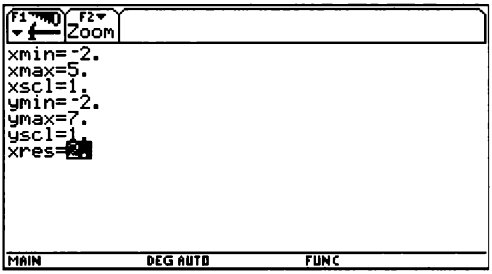
```
PLOTS
✓y1=2·x
✓y2=⁻x + 3
 y3=■
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
 y10=
y3(x)=
MAIN          DEG AUTO          FUNC
```

Will man eine Eingabe ändern, so ist die entsprechende Zeile zu markieren und F3 (Edit) zu drücken. Zu beachten ist ferner, dass als unabhängige Variable x zu verwenden ist.



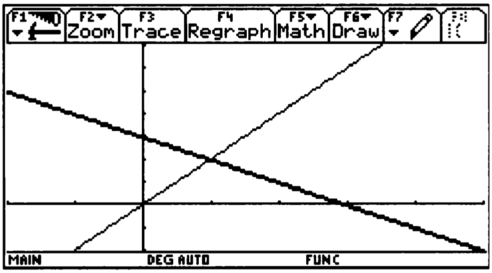
PLOTS
✓y1=2·x
✓y2=-x+3
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y9=
y10=
y2(x)=⁻x+3

Man kann für die Graphen der eingegebenen Funktionen unterschiedliche **Zeichenstile** wählen. Dazu markiert man den gewünschten Funktionsterm, etwa –x + 3, und drückt F6 (Style). Es öffnet sich ein Menü, in dem man vier verschiedene Zeichenstile aussuchen kann (1 bis 4). Danach ENTER.

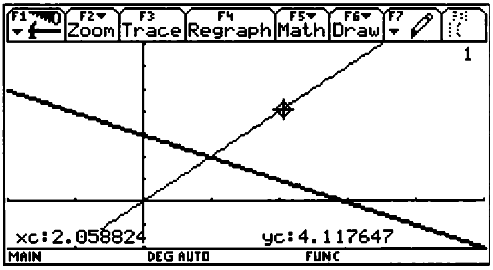


xmin=⁻2.
xmax=5.
xscl=1.
ymin=⁻2.
ymax=7.
yscl=1.
xres=2.

Im *zweiten* Schritt wird zum Festlegen des Ansichtfensters (des Zeichenbereiches) der **Window-Editor** durch ♦ E aufgerufen.
xmin und xmax sind die horizontalen, ymin und ymax die vertikalen Grenzen des Zeichenbereichs.
xscl und yscl sind die Abstände der Skalierungsstriche auf den Achsen.
xres (1 bis 10) gibt die Pixel-Auflösung für das Zeichnen an: bei xres = 1 wird die Funktion bei jedem Pixel entlang der x-Achse berechnet, bei xres = 10 nur bei jedem zehnten Pixel.



Im *dritten* Schritt wird der Graph im **Graphikfenster** gezeichnet. Dies geschieht durch Drücken von ♦ R. Gezeichnet werden alle Graphen, deren Funktionsgleichungen im y-Editor durch ✓ aktiviert sind. Deaktivieren und Aktivieren erfolgt durch F4.
Rückkehr zum Hauptbildschirm: ♦ Q.



xc:2.058824 yc:4.117647

Ermitteln von Funktionswerten:

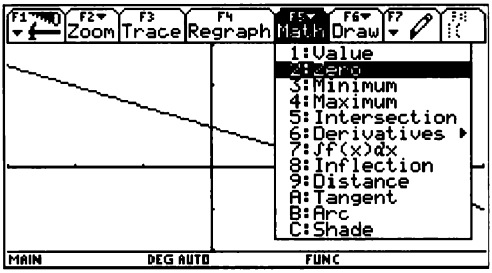
Nach Drücken von F3 (Trace) kann der Zeichencursor entlang des Graphen entsprechend der Vorgabe durch xres bewegt werden; dabei werden die Koordinaten der Punkte angezeigt. Abbruch durch ESC. Wechsel des Graphen durch eine Cursortaste ▾ oder ▴.

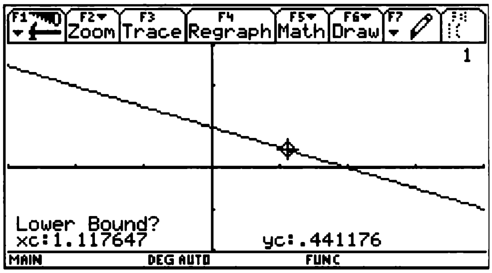
Funktionswert an einer *bestimmten* Stelle x: F5 1, x-Wert eintippen, ENTER.

Rückkehr zum Hauptbildschirm: ♦ Q.

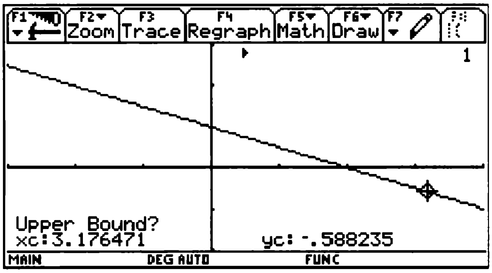
Ermitteln von Nullstellen

Beispiel: $y = -\frac{1}{2}x + 1.$

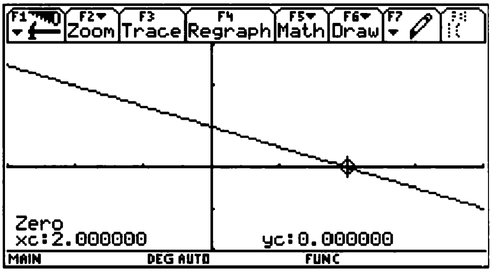




```
Lower Bound?
xc:1.117647              yc:.441176
```



```
Upper Bound?
xc:3.176471              yc: -.588235
```



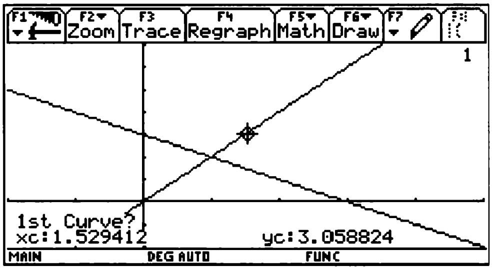
```
Zero
xc:2.000000              yc:0.000000
```

Man aktiviert F5 2 (2:Zero) im Graphik-Fenster. Danach wird man aufgefordert, die Grenzen eines Intervalls (Lower Bound, Upper Bound) einzugeben, das die gesuchte Nullstelle enthält. Das kann durch Eintippen eines x-Wertes oder durch Bewegung des Cursors (eventuell verstärkt durch 2ND) erfolgen. Danach jeweils ENTER.

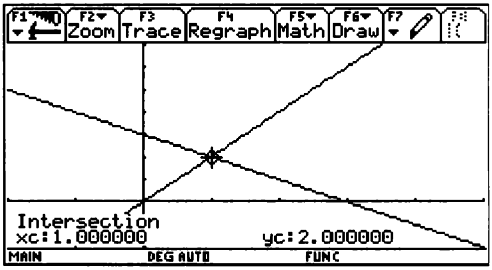
Rückkehr zum Hauptbildschirm: ◆ Q.

Ermitteln von Schnittpunkten

Beispiel: Schnittpunkt der Graphen von $y = 2x$ und $y = -x + 3$.



```
1st Curve?
xc:1.529412              yc:3.058824
```



```
Intersection
xc:1.000000              yc:2.000000
```

Man aktiviert F5 5 (5:Intersection) im Graphik-Fenster. Mit dem Cursor wird zuerst der erste Graph angesteuert, was hier schon der Fall ist, und mit ENTER bestätigt; dann der zweite und wieder ENTER.

Danach wird man wie bei der Nullstellenermittlung aufgefordert, die Grenzen eines Intervalls (Lower Bound, Upper Bound) einzugeben, das die gesuchte Schnittstelle enthält. Das kann durch Eintippen eines x-Wertes oder durch Bewegung des Cursors (eventuell verstärkt durch 2ND) erfolgen. Danach jeweils ENTER. Rückkehr zum Hauptbildschirm: ◆ Q.

Mathematische Zeichen

Logik

$\wedge$	und	$\Rightarrow$	wenn, dann; hinreichend für
$\vee$	oder (nicht ausschließend)	$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn; notwendig und hinreichend für
$\neg$	nicht		

Mengenlehre

$\in$	ist Element von	$=$	hat die gleichen Elemente wie
$\notin$	ist nicht Element von	$\cup$	vereinigt mit
$\subseteq$	Teilmenge von	$\cap$	geschnitten mit
$\subset$	echte Teilmenge von	$\setminus$	Differenzmenge von … und …
$\{x \in M \mid \dots\}$	Menge aller x aus M, für die gilt …		
$\{\,\}$	leere Menge		

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	Menge der rationalen, Menge der reellen, Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$	Menge der reellen Zahlenpaare
$[a,b],\ ]a,b[,\ ]a,b],\ [a,b[$	abgeschlossenes, offenes, links offenes bzw. rechts offenes Intervall

Arithmetik

$\approx$	ungefähr gleich	$\widehat{=}$	entspricht
$\lvert a \rvert$	Betrag von a	sgn a	Vorzeichen von a
Σ	Summe von	Δ	Differenz

Geometrie

A, B, …	Punkte	AB	Strecke AB
$\overline{AB}$	Länge der Strecke AB	$\overset{\frown}{AB}$	Länge des Bogens AB
$\parallel$	parallel	⊾	rechter Winkel

Griechisches Alphabet

α	A	Alpha	η	H	Eta	ν	N	Ny	τ	T	Tau
β	B	Beta	ϑ	Θ	Theta	ξ	Ξ	Xi	υ	Y	Ypsilon
γ	Γ	Gamma	ι	I	Iota	o	O	Omikron	φ	Φ	Phi
δ	Δ	Delta	κ	K	Kappa	π	Π	Pi	χ	X	Chi
ε	E	Epsilon	λ	Λ	Lambda	ϱ	P	Rho	ψ	Ψ	Psi
ζ	Z	Zeta	μ	M	My	σ	Σ	Sigma	ω	Ω	Omega

Formelsammlung

Potenzen

a^n a … Grundzahl oder Basis, n … Hochzahl oder Exponent

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren, n = 2, 3, …); $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Potenzgesetze: $(m, n \in \mathbb{Z})$

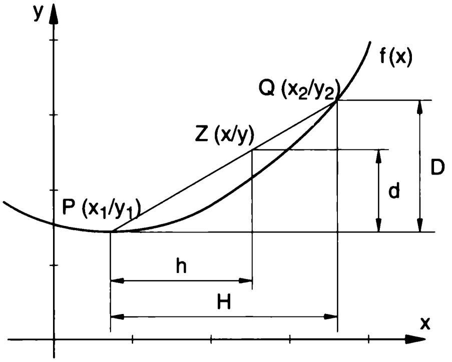
(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; (2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; (3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; (5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Wurzel als Potenz: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(a \geqslant 0, n \in \mathbb{N}^*)$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$.

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Lineare Interpolation



Interpolationsformel:

$y = y_1 + d$ mit $d = \frac{h}{H} \cdot D$

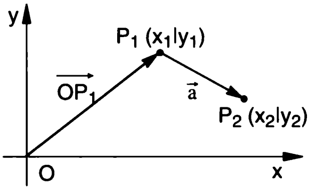
$h = x - x_1$ …. Argumentzuwachs

$H = x_2 - x_1$ … Schrittweite

$D = y_2 - y_1$ … Tafeldifferenz

Wird die Zwischenstelle x verlangt, so vertauscht man in der Interpolationsformel überall die x- und die y-Werte.

Vektorrechnung



Ortsvektor von $P_1 (x_1|y_1)$: $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Vektor von $P_1 (x_1|y_1)$ nach $P_2 (x_2|y_2)$:

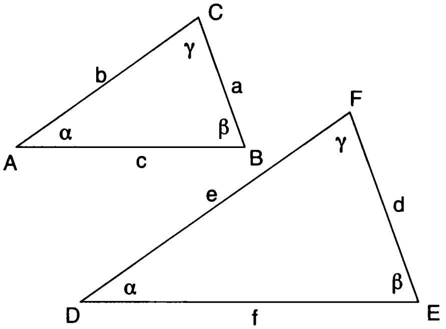
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ … "Spitze minus Schaft"

$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$ ist Gegenvektor von $\vec{a}$.

Betrag von $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; Einheitsvektor von $\vec{a}$: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$

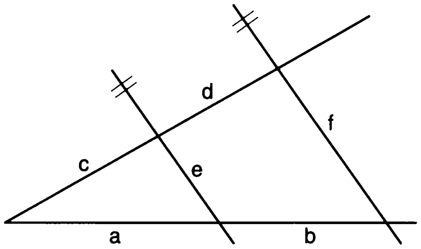
$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$; $k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

Ähnliche Dreiecke



$\alpha = \beta = \gamma$ und $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

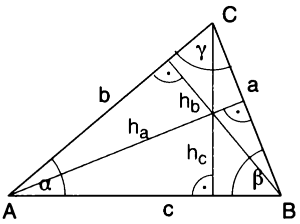
Strahlensätze



1. Strahlensatz: $a : (a + b) = c : (c + d)$
bzw. $a : b = c : d$

2. Strahlensatz: $e : f = a : (a + b)$

Allgemeines Dreieck



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

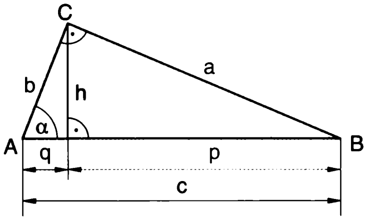
$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ ... "Grundlinie mal Höhe durch 2"

Heron'sche Flächenformel:

$A = \sqrt{s(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, mit $s = \frac{a + b + c}{2}$

Der Schwerpunkt teilt eine Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.

Rechtwinkliges Dreieck



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

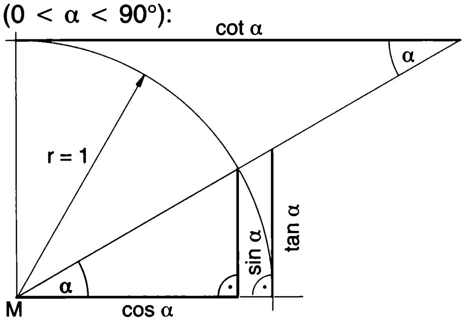
Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

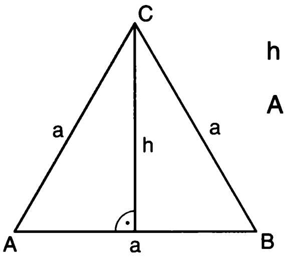
Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$

Kreisfunktionswerte am Einheitskreis

($0 < \alpha < 90°$):



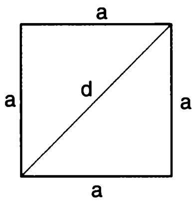
Gleichseitiges Dreieck



$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

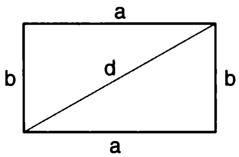
Quadrat



$A = a^2$

$d = a \cdot \sqrt{2}$

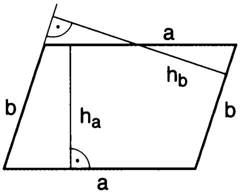
Rechteck



$A = a \cdot b$

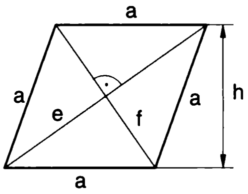
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Parallelogramm



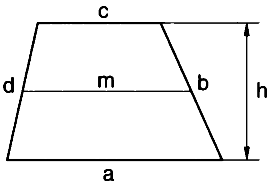
$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Raute (Rhombus)



$A = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$

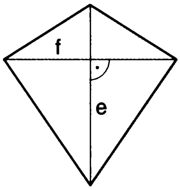
Trapez



$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

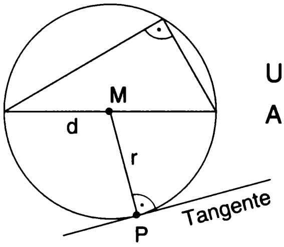
$m = \frac{a + c}{2}$

Deltoid



$A = \frac{e \cdot f}{2}$

Kreis



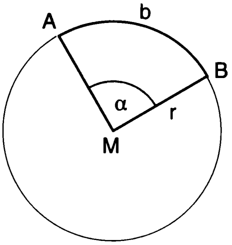
$U = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$

$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$

Tangente und Radius (zum Tangentenberührpunkt P) stehen normal aufeinander.

Satz des Thales: Jedes Dreieck im Halbkreis ist rechtwinklig.

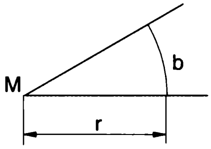
Kreisbogen und -sektor



$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$

$A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} b \cdot r$

Bogenmaß eines Winkels



$\alpha \text{ rad} = \frac{b}{r}$

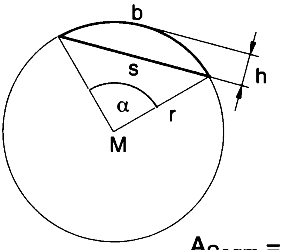
$\pi = 180^\circ$

$1 \text{ rad} = 57{,}3^\circ$

Umrechnung: $\alpha \text{ rad} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ bzw.

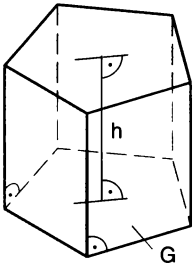
$\alpha^\circ = \alpha \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

Kreissegment



$A_{Segm} = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s\,(r - h)}{2}$

Prisma



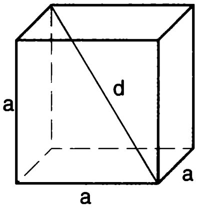
$V = G \cdot h$

$O = 2 \cdot G + M$

Gerades Prisma:

$M = U \cdot h$

Würfel

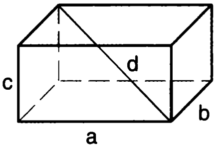


$V = a^3$

$O = 6 \cdot a^2$

$d = a \cdot \sqrt{3}$

Quader

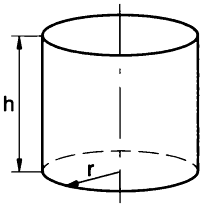


$V = a \cdot b \cdot c$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(Dreh-)Zylinder



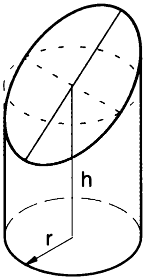
$V = \pi r^2 \cdot h$

$M = 2\pi r \cdot h$

$O = 2\pi r \cdot (h + r)$

Gleichseitiger Zylinder: $h = 2r$

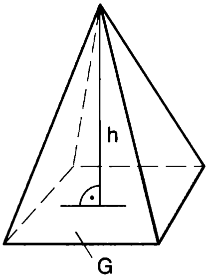
Schief abgeschnittener Zylinder



$V = \pi r^2 \cdot h$

$M = 2\pi r \cdot h$

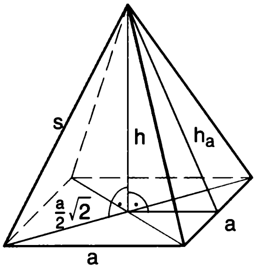
Pyramide



$V = \frac{1}{3} G \cdot h$

$O = G + M$

Regelmäßige quadratische Pyramide



$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

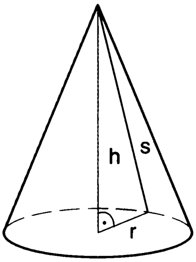
$M = 2a \cdot h_a$

$O = a(a + 2h_a)$

$h_a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$

$s^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$

(Dreh-)Kegel



$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$M = \pi r s$

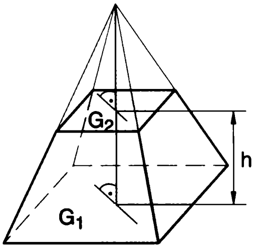
$O = \pi r (r + s)$

$s^2 = h^2 + r^2$

Gleichseitiger Kegel:

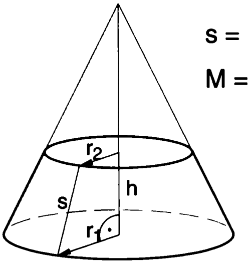
$s = 2r$

Pyramidenstumpf



$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$$

(Dreh-)Kegelstumpf

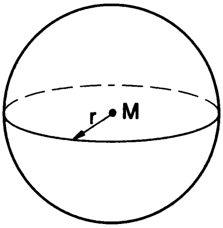


$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$M = \pi\, s (r_1 + r_2)$$

$$V = \frac{\pi\, h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

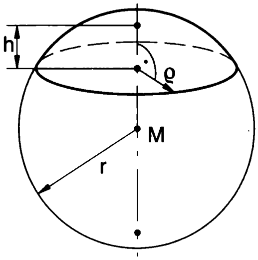
Kugel



$$V = \frac{4}{3} \pi\, r^3 = \frac{\pi}{6}\, d^3$$

$$O = 4 \pi\, r^2 = \pi\, d^2$$

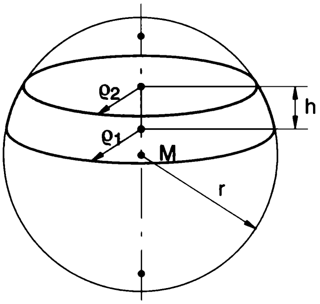
Kugelabschnitt und -kappe



$$V = \frac{\pi\, h^2}{3} (3r - h) = \frac{\pi\, h}{6} (3\varrho^2 + h^2)$$

$$A = 2\, \pi\, r\, h = \pi\, (\varrho^2 + h^2)$$

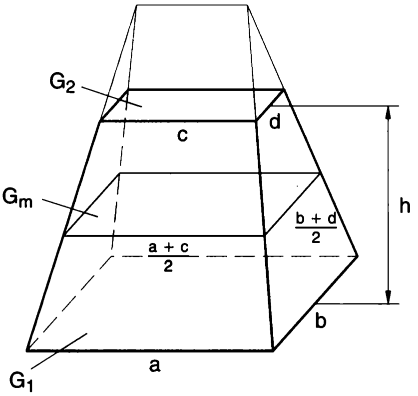
Kugelschicht und -zone



$$V = \frac{\pi\, h}{6} (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$

$$A = 2 \pi\, r\, h$$

Kepler'sche Fassregel



$$V = \frac{h}{6} \cdot (G_1 + 4 \cdot G_m + G_2)$$

Diese Formel ist exakt für die bisher angeführten Körper, aber auch für viele weitere (Keil, Ponton, Ellipsoid, ...). Die "Mittelfläche" G_m errechnet sich aus den mittleren Seitenlängen.

Stichwortverzeichnis

A

abhängige Variable 167
absoluter Fehler 109 f
Abszissenachse 116
Achsensymmetrie 118
Addition
- von Brüchen 46
- von Bruchtermen 80
- von Vektoren 282
Additionsverfahren 253
ähnliche Dreiecke 127 f
algebraische Gleichung 214
allgemeines Dreieck 122
allgemein gültige Gleichung 214
allgemein gültige lineare Gleichung 215
Anschaffungswert 197
Äquivalenz 17
Äquivalenzumformungen
-, mit dem TI-92 213
-, von Gleichungen 5, 212
-, von Ungleichungen 243
Argument 167
arithmetisches Mittel 42
Assoziativgesetz 49
Aussage 13
Aussageform 13
Aussagenlogik 12
Aussageverbindungen 14

B

Betrag einer Zahl 36 f
Betragsfunktion 191
Betragsgleichung 217
Betragsungleichung 243 ff
Binomsche Formeln 52 f
Bogenmaß 163 f
Bruchgleichungen 215, 219 ff
Bruchterme 78
-, Addition 80
-, Division 82
-, Kürzen 79
-, Multiplikation 82
-, Subtraktion 80
-, Überblick über 86
Bruchungleichungen 245
Buchwert 197

C

Cosinus 140
Cotangens 140
Cramer'sche Regel 258 f

D

Definitionsmenge
-, einer Funktion 167
-, einer Gleichung 210
dekadische Vorsilben 70
Deltoid 149
Determinanten 256 f
-, Regel von Sarrus 256
-, Taschenrechner-Berechnung 257
Dezimalzahlen 32, 92
Differenzmenge 23
Differenzenquotient 177
direkte Proportionalität 205
direktes Verhältnis 240
Disjunktion 15
Distributivgesetz 49
Division
-, von Brüchen 47
-, von Bruchtermen 82
Doppelbrüche 47
Drachenviereck 149
Drehung 119
Drehzylinder 296
Dreieck 121 ff
-, ähnliches 127 f
-, allgemeines 121
-, gleichschenkliges 122
-, gleichseitiges 122
-, kongruentes 127
-, rechtwinkliges 122
-, stumpfwinkliges Dreieck 122
-, Überblick über 139
Dreieckskonstruktion 125
Durchschnitt von Mengen 22

E

Einheitskreis 141
Einheitsvektor 289
Einsetzungsverfahren 253
Einsetzungsverfahren mit dem TI-92 253
elementare Geometrie 115 f
empirische Funktionen 168
erfüllbare Gleichungen 214
Erlösfunktion 193 f
erweiterte Matrix 258

F

Faktorisieren 53
Fehler
-, absoluter 110
-, relativer 110
Flächeninhalt 115, 126, 152
- des Dreiecks 126
- des Polygons 152
Flächenmaße 70
Flächenprojektion 145
Formelsammlung 328 ff
Formelumwandlungen 6 ff, 231 ff
Formvariable 216
fortlaufende Proportion 238
Fraktale 154
Fünfeck 153
Funktionen 166 ff
-, empirische 168
-, Grundbegriffe 167 f
-, lineare 174 ff
-, stückweise lineare 202 f
-, Überblick über 173
-, Überblick über lineare 182
Funktionsgleichung 167
Funktionstabellen 185
Funktionswert 167, 178

G

ganze Zahlen 33
Ganzzahldivision 30 f
Ganzzahliger-Anteil-Funktion 191
Gauß'sches Eliminationsverfahren 269
Gegenvektor 278
geltende Ziffern einer Zahl 100 f
Genau-dann-wenn-Verknüpfung 17
Genauigkeit des Taschenrechners 106
Genauigkeit eines Rechenergebnisses 110 f
Genauigkeitsschranken 110

geometrisches Mittel 235
Gerade 174
Geradengleichung 174
Geradenspiegelung 118
gerades Prisma 295
Gewinnfunktion 193
Gewinnschwelle 195
gleichschenkliges Dreieck 122
gleichseitiges Dreieck 122
Gleichsetzungsverfahren 252
Gleichungen mit Formvariablen 216
Gleichungssystem mit Bruchtermen 254
Gleitkommadarstellung 68 f
Goldener Schnitt 134
Gradmaß 117, 164
Graph einer linearen Funktion 178 ff
graphische Lösung einer linearen Funktion 192 ff
Gleichung 4, 210 ff
-, allgemein gültige lineare 215
- Betragsgleichung 216
- Bruchgleichung 219
-, Definitionsmenge der 211
-, Einteilung der 214
-, lineare 215 ff
-, mit Formvariablen 216
-, nicht erfüllbare 220
-, nicht erfüllbare lineare 216
-, Textaufgaben 223 ff
-, Überblick über 221
graphische Lösung eines linearen Gleichungssystems 251
Grundgebühr 197
Grundmenge 210, 211
Grundrechnungsarten 27

H

Halbgerade 115
Heron'sche Flächenformel 126
Höhen 122
Höhenlinien 122
Höhensatz 132
Höhenschnittpunkt 122
Hohlzylinder 296

I

Implikation 16
indirekte Proportionalität 206
indirekter Beweis 28
indirektes Verhältnis 241
indizierte Variable 42
Inkreis 123
Integerfunktion 191
Interpolation 185 ff
Interpolationsformel 186
Intervalle 38 f
inverser Vektor 278
irrationalen Zahlen 33

K

Kalotte 311
Kartesisches Koordinatensystem 116
Kathetensatz 132
Kegel 303
Kegelstumpf 308
Kepler'sche Fassregel 309
Klammerrechnung 50 f
kleinstes gemeinsames Vielfaches 29
Koeffizientenmatrix 258
Kommutativgesetz 49
Komplementäre Winkel 117
Konditionierungsproblem 250
kongruente Dreiecke 124
Kongruenzsätze 124
Konjuktion 14
Koordinatensystem 116
Kosinus 140
Kostenfunktion 193 ff
Kotangens 140
Kreis 156
Kreisbogen 156
Kreisfläche 157
Kreisfunktionen 177
- Cosinus 140
- Cotangens 140
- Sinus 140
- Tangens 140
Kreisfunktionswerte
-, für besondere Winkel 141
-, Taschenrechner-Berechnung 142
Kreisring 159
Kreissegment 158
Kreissektor 158
Kreisteile 158
Kreisumfang 157
Kugel 311
Kugelabschnitt 311 f
Kugelkappe 311 f
Kugelschicht 312 f
Kugelzone 313 f

L

Längenmaße 70
leere Menge 21
lineare Abschreibung 197
lineare Funktion 174
-, Grundbegriffe 174 ff
-, stückweise 192, 200
-, Überblick über 182
lineare Gleichung in 2 Variablen 247 f
lineare Gleichungen 210, 214
lineare Gleichungssysteme 247, 249 ff
- Genauigkeitsprobleme 250
- in 2 Variablen 249
- in 3 oder mehr Variablen 268, 270
-, Lösbarkeit 250 f, 259, 270
-, Textaufgaben 264 ff
-, Überblick über 262
lineare Interpolation 185 ff
- einer empirischen Funktion 186
- einer nichtlinearen Funktion 186
- einer Tabelle 187
- Interpolationsformel 186
- Überblick über 188
lineare Kostenfunktion 193 ff
lineare Ungleichungen 243
linearer Tarif 197
Logik 12
Lösungsmenge 211

M

mathematische Zeichen 327
Massenmaße 70
Maßstab 91
Matrix-(Matrizen) 255
-, erweiterte 258
-, Koeffizientenmatrix 258
Mengen 20 ff
-, aufzählend 20
-, beschreibend 21
-, Gleichheit von 21
Mengendiagramme 23
Mengenlehre 20
Mittelpunkt einer Strecke 135, 290
Monotonie 172

Multiplikation eines Vektors
  mit einer Zahl 287

N

Näherungswerte 109 ff
natürliche Zahlen 27
Nebenwinkel 117
Negation 16
nicht erfüllbare Gleichung
  214, 220
nicht erfüllbare lineare Gleichung 216
Normalform der linearen
  Funktion 175
Normalform der linearen Gleichung 215
Nullstelle 170, 172
Nullvektor 278
Numerisches Rechnen 99 ff
Nutzungsdauer 197

O

Oder-Verknüpfung 15
Ordinatenabstand 176
Ordinatenachse 116
Ortsvektor 278

P

parallele Geraden 115
Parallelogramm 149 f
Parallelwinkel 117
Parts per Million, ppm 92, 94
Pentagon 153
Peripheriewinkelsatz 157
Polygon 152
Polynomdivision 84 ff
Potenzen 27, 58 ff
-, mit negativer Hochzahl 59
-, mit positiver Hochzahl 59
-, Rechengesetze für 62 ff
-, Wurzel als 75
Primfaktorenzerlegung 28
Primzahl 27 ff
Prisma 294
 -, gerades 294 f
 -, schiefes 296
Produktgleichung 234
Produkt-Null-Satz 48
Promille 92, 94
Proportion 234
Proportionalität 205
-, direkte 205
-, indirekte 206
Proportionalitätsfaktor 205,
  234
Prozent 92 ff
prozentueller Anteil 93
Pyramide 302
- gerade 302
- schiefe 303
Pyramidenstumpf 307
Pythagoräischer Lehrsatz 132

Q

Quader 295
Quadrat 149
Quadratische Ergänzung 53 f
Quadratur des Kreises 157

R

rationale Zahlen 32
Raummaße 70
Raute 149
Rechenregeln 44
- Vorrangregel 44
- Vorzeichenregel 45
Rechnen mit Brüchen 46
-, Addition 46
-, Division 47
-, Multiplikation 47
-, Subtraktion 46
Rechnen mit Näherungswerten 111
Rechteck 149
rechtwinkliges Dreieck 122
Rechtwinkliges Koordinatensystem 116
reelle Zahlen 33
Regel von Sarrus 256
regelmäßiges Fünfeck 153
Relationen 169
relativer Fehler 110
Rhombus 149
Runden 99, 100
Rundungsintervall 100
Rundungsregel 99

S

Satz des Phytagoras 132
Satz von Cavalieri 294
Satz des Thales 131
Sätze im rechtwinkligen Dreieck 131
Scheitelwinkel 117
schiefes Prisma 296
Schlussrechnungen 240
Schwerlinien 123
Schwerpunkt 123
Seitensymmetrale 122
signifikante Ziffern 100
Signumfunktion 191
Sinus 140
Skalar 296
Steigung 177, 179
Steigungsdreieck 177
Steigungswinkel 177
Stereometrie 294
Stichwortverzeichnis 333 ff
Strahlensatz 128 f
-, erster 128
-, zweiter 128
Strecke 115
Streckenprojektion 144
Streckensymmetrale 118
streng monoton fallend 172
streng monoton steigend 172
Stückweise lineare Funktionen 192, 200
stumpfwinkliges Dreieck 122
Subtraktion
-, von Brüchen 46
-, von Bruchtermen 80
Subtraktion von Vektoren 283
Supplementärwinkel 117
Symmetrieachse 118

T

Tangens 140
Taschenrechner 9 ff, 105 ff,
  316 ff
Teilbarkeitsregeln 29
Teilmenge 22
Teilung einer Strecke 129
Terme 40 f, 211
Textaufgaben 223, 263
Thaleskreis 131
TI-89 316
Trägergerade 195
Trapez 149 f
Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks 140

U

Überschlagsrechnung 102 f
Umformungen von Verhältnissen 90
Umkreis 122
Umkreismittelpunkt 122
Umwandlung von Formeln
  6 ff, 231 ff

unabhängige Variable 167
Und-Verknüpfung 14
Ungleichungen 242 ff
Ursprung 116
Ursprungsgerade 176

V

Variable 40
-, abhängige 167
-, indizierte 42
-, unabhängige 167
Vektor
-, Addition 282
-, Betrag oder Länge 276, 279
-, Einheitsvektor 289
-, Gleichheit von 277
-, inverser 278
-, Koordinaten eines 275
-, Multiplikation mit einer Zahl 287
-, Richtung 277
-, Subtraktion 283
-, Zerlegung 291
Vereinigung von Mengen 22 ff
Verhältnis von Flächeninhalten 92
Verhältnisgleichung 234
Verhältnisse 90 ff
- direktes 240
- indirektes 241
- Überblick über 95
Verneinung 16
Verschlüsselung von Nachrichten 29
Vielecke 152
Vierecke 148
Vorrangregeln 44 f
Vorzeichenfunktion 191
Voyage 200 316 ff
- APPS-Desktop 317
- Betriebsarten 318 f
- Funktion definieren 323
- Funktionswert ermitteln 323, 325
- Graph einer Funktion 324
- Hauptbildschirm 318
- Historybereich 318
- Home-Bildschirm 318
- Lösen von Gleichungen 323
- Lösen von linearen Gleichungssystemen 324
- Nullstellen einer Funktion 326
- Protokollbereich 318
- Schnittpunkte ermitteln 326
- Symbolisches Rechnen 323
- Tastatur 316
- Variable definieren 321
- Variable löschen 322
- Variable speichern 321
- VAR-LINK-Bildschirm 322
- Wert einer Variablen zuweisen 321

W

Wahrheitstabelle
-, Äquivalenz 17
-, Disjunktion 15
-, Implikation 16
-, Konjuktion 14
-, Negation 16
Weg-Zeit-Funktion 198, 201
Wenn-dann-Verknüpfung 16
Wertemenge einer Funktion 167
Wertetabelle 166, 171, 178
Winkel 116 ff
-, komplementär 117
-, supplementär 117
Winkelberechnung 118
Winkelberechnung im Dreieck 121
Winkelfunktionen 140
- Cosinus 140
- Cotangens 140
- Sinus 140
- Tangens 140
Winkelhalbierende 118, 123
Winkelmessung 117
Winkelpaare 117
Winkelsumme im Viereck 148
Winkelsummensatz 121
Winkelsymmetrale 118
Würfel 295
Wurzeln 74 f

X

x-Achse 116

Y

y-Achse 116
y-Achsenabschnitt 176

Z

Zahlen
-, ganze 30, 33
-, irrationale 33
-, natürliche 27 ff
-, rationale 32 f
-, reelle 33
Zahlenarten 27
Zahlengerade 36 ff, 241
Zahnradgetriebe 236
Zehnerpotenzen 60
Zerlegung eines Vektors 291
Zuordnung 167
Zylinder 296
-, gerader 296
-, schief abgeschnittener 297